Exame final nacional de Matemática A (2017, 2.ª fase)

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Temos que os algarismos pares, ficando juntos podem ocupar 4 grupos de duas posições adjacentes e trocando entre si, podem figurar no número de 2×4 formas distintas.
   Os algarismos ímpares devem ocupar as 3 posições restantes, podendo trocar entre si, o que corresponde a ${}^{3}A_3 = P_3 = 3!$ disposições diferentes.
   Assim, considerando todas as disposições diferentes dos algarismos, temos que o total de números naturais nas condições do enunciado é: $2 \times 4 \times 3! = 8 \times 6 = 48$

   Resposta: **Opção B**

2. Temos que:

$$P(X > 1 | X \leq 3) = \frac{P(X > 1 \cap X \leq 3)}{P(X \leq 3)} = \frac{P(2 \leq X \leq 3)}{1 - P(X > 3)} = \frac{P(X = 2) + P(X = 3)}{1 - P(X = 4)} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{5}{9}$$

   Resposta: **Opção D**

3. Temos que, pela definição de derivada num ponto, $f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

   Assim, vem que:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{f(x) - f(2)} = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \to 2} \frac{1}{\frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2x}} = 4 \Leftrightarrow \frac{\lim\limits_{x \to 2} 1}{\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2x}} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x(x - 2)}} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{1}{x} \times \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right)} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x} \times \lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{2} \times f'(2)} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = 4 \times \frac{1}{2} \times f'(2) \Leftrightarrow 1 = \frac{4}{2} \times f'(2) \Leftrightarrow 1 = 2f'(2) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = f'(2)$$

   Resposta: **Opção C**

4. Temos que $(g \circ f)(x) = 0 \Leftrightarrow g\big(f(x)\big) = 0$

   Como o único zero da função g é 2, ou seja, $g(a) = 0 \Leftrightarrow a = 2$, então vem que:

   $$g\big(f(x)\big) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2$$

   E, por observação do gráfico de f podemos verificar que, os objetos cuja imagem é 2, pela função f, são 1 e 5

   Resposta: **Opção B**

5. Relacionando o sinal da segunda derivada de f com o sentido das concavidades do gráfico, temos:

x	$-\infty$	-10		0		10	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\frown$	Pt. I.	$\smile$	Pt. I.	$\frown$	Pt. I.	$\smile$

   Como o gráfico de $f(x-5)$ é uma translação horizontal do gráfico de f associada ao vetor de coordenadas $(5,0)$, e o gráfico de $-f(x-5)$ é simétrico relativamente ao eixo das abcissas do gráfico de $f(x-5)$, podemos relacionar o sinal de $f''(x-5)$ com o sinal da segunda derivada de $-f''(x-5)$:

x	$-\infty$	-5		5		15	$+\infty$
$f''(x-5)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$-f''(x-5)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
g	$\smile$	Pt. I.	$\frown$	Pt. I.	$\smile$	Pt. I.	$\frown$

   Logo, podemos concluir que o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]-5,5[$ e também no intervalo $]15,+\infty[$

   Resposta: **Opção C**

6. Temos que:

   - os argumentos dos complexos z e $5z$ são iguais

   $$\text{Arg}\,(5z) = \text{Arg}\,(z) = \frac{\pi}{5}$$

   - os argumentos de complexos simétricos, $-5z$ e $5z$, diferem de π

   $$\text{Arg}\,(-5z) = \text{Arg}\,(5z) - \pi = \frac{\pi}{5} - \pi = -\frac{4\pi}{5}$$

   - a multiplicação por i de um complexo corresponde a somar $\frac{\pi}{2}$ ao seu argumento

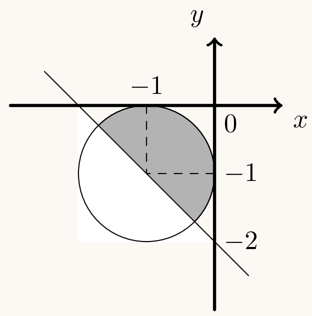
   $$\text{Arg}\,(-5iz) = \text{Arg}\,(-5z) + \frac{\pi}{2} = -\frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{10} + \frac{5\pi}{10} = -\frac{3\pi}{10}$$

   Resposta: **Opção A**

7. Observando que $(x+1)^2+(y+1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow (x-(-1))^2+(y-(-1))^2 \leq 1^2$, temos que esta condição representa o círculo de centro no ponto $(-1,-1)$ e raio 1

   Observando que $x+y+2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -x-2$, temos que esta condição representa o semiplano superior limitado pela reta de declive -1 e ordenada na origem -2

   Representando a sombreado a interseção dos dois conjuntos de pontos, como na figura ao lado, podemos observar que corresponde a um semi-círculo de raio 1



   Assim, o perímetro da região definida pela condição é a soma do semi-perímetro do círculo com o diâmetro do círculo $(2r)$:

$$P = \frac{2\pi r}{2} + 2r = \frac{2\pi \times 1}{2} + 2 \times 1 = \pi + 2$$

   Resposta: **Opção C**

8. Temos que:

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} = \frac{1}{2} \times 2^n = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1} = 1 \times 2^{n-1}$$

   Assim, como $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n-1+1}}{2^{n-1}} = \frac{2^n}{2^n \times 2^{-1}} = \frac{2^n}{2^n} \times \frac{1}{2^{-1}} = 1 \times 2 = 2$, (u_n) é uma progressão geométrica de razão 2

   Resposta: **Opção B**

GRUPO II

---

1. Como $z_1 \times \overline{z_2} = 4-3i \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{4-3i}{z_1}$, calculando o valor de $\overline{z_2}$, temos:

$$\overline{z_2} = \frac{4-3i}{2+i} = \frac{(4-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{8-4i-6i+3i^2}{2^2-i^2} = \frac{8-10i-3}{4-(-1)} = \frac{5-10i}{5} = 1-2i$$

   E assim, temos que: $\overline{z_2} = 1-2i \Leftrightarrow z_2 = 1+2i$

   Escrevendo $\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$ na forma algébrica, temos:

$$\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right) = \frac{2}{2} + \frac{2}{2}\,i = 1+i$$

   Assim, o número complexo anterior verifica a condição $|z-z_1| = |z-z_2|$, porque:

   - $|(1+i)-(2+i)| = |1+i-2-i| = |1-2+0i| = |-1| = 1$
   - $|(1+i)-(1+2i)| = |1+i-1-2i| = |1-1-i| = |-i| = 1$

   Como o número complexo $\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$ verifica a condição $|z-z_1| = |z-z_2|$, então a representação geométrica deste número complexo está a igual distância das representações geométricas dos complexos z_1 e z_2

2.

2.1. Sabemos que:

- ponto A pertence ao plano xOy, pelo que tem cota nula ($z_A = 0$)
- a aresta $[DA]$ pertence ao plano xOy e é perpendicular ao eixo Oy, pelo que a ordenada do ponto A é igual à ordenada do ponto D ($y_A = y_D = 4$)

Assim, substituindo os valores da ordenada e da cota do ponto A na equação do plano ACG, podemos calcular o valor da abcissa (x_A):

$$x_A + y_A - z_A - 6 = 0 \Leftrightarrow x_A + 4 + 0 - 6 = 0 \Leftrightarrow x_A - 2 = 0 \Leftrightarrow x_A = 2$$

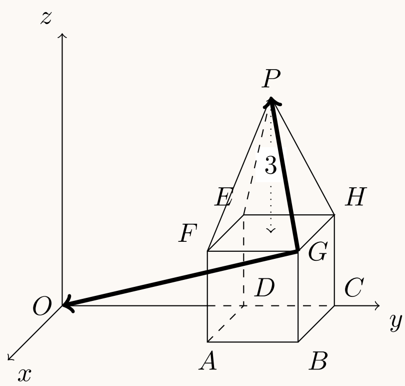
2.2. As coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ACG, verificam simultaneamente a equação do plano e as equações da reta, ou seja, podem ser calculadas resolvendo o sistema seguinte:

$$\begin{cases} x + y - z - 6 = 0 \\ x - 1 = 1 - y \\ x - 1 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z - 6 = 0 \\ y = -x + 2 \\ x - 1 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x + 2 - (x - 1) - 6 = 0 \\ y = -x + 2 \\ x - 1 = z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x + 1 - 6 = 0 \\ y = -x + 2 \\ x - 1 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 1 - 6 = x \\ y = -x + 2 \\ x - 1 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = x \\ y = -(-3) + 2 \\ -3 - 1 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = x \\ y = 5 \\ -4 = z \end{cases}$$

Logo a reta r e o plano ACG intersectam-se no ponto de coordenadas $(-3{,}5, -4)$

2.3. Como a base do cubo é um quadrado de lado 2 ($\overline{AD} = 2$), temos que a área da base é:



$$A_{[EFGH]} = \overline{AD}^2 = 2^2 = 4$$

Como o volume da pirâmide é 4, então calculando a altura h da pirâmide, temos:

$$V_{[ABCDEFGHP]} = \frac{1}{3} \times A_{[EFGH]} \times h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 = \frac{1}{3} \times 4 \times h \Leftrightarrow \frac{4 \times 3}{4} = h \Leftrightarrow h = 3$$

Como a cota do ponto P é superior a 2 e a aresta do cubo é 2, então a cota do ponto P é

$$z_P = 2 + h = 2 + 3 = 5$$

Como a projeção do ponto P no plano xOy é o centro do quadrado $[ABCD]$, temos que a abcissa é $x_P = 1$ e a ordenada é $y_P = 5$, pelo que as coordenadas do ponto P são $(1,5,5)$

Como as coordenadas do ponto G são $(2,6,2)$, podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{GP}$, e a sua norma:

$$\overrightarrow{GP} = P - G = (1,5,5) - (2,6,2) = (-1,-1,3)$$

$$\left\|\overrightarrow{PG}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$$

Como O é a origem do referencial, podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{GO}$, e a sua norma:

$$\overrightarrow{GO} = O - G = (0,0,0) - (2,6,2) = (-2,-6,-2)$$

$$\left\|\overrightarrow{GO}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+36+4} = \sqrt{44}$$

Recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos\left(\overrightarrow{GP}\,\overrightarrow{GO}\right) = \frac{\overrightarrow{GP} \,.\, \overrightarrow{GO}}{\left\|\overrightarrow{GP}\right\| \times \left\|\overrightarrow{GO}\right\|} = \frac{(-1,-1,3).(-2,-6,-2)}{\sqrt{11} \times \sqrt{44}} = \frac{2+6-6}{\sqrt{11 \times 44}} = \frac{2}{\sqrt{484}}$$

Logo, a amplitude do ângulo OGP, em graus, arredondado às unidades, é

$$O\hat{G}P = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{484}}\right) \approx 85^\circ$$

3.

3.1. De acordo com os acontecimentos A e B definidos, e os dados do enunciado, temos que:

- $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 0{,}82$
- $P\left(B|A\right) = \frac{1}{3}$

Assim, usando as Leis de De Morgan, e o teorema do acontecimento contrário, temos que:

$$P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 0{,}82 \Leftrightarrow P\left(\overline{A \cap B}\right) = 0{,}82 \Leftrightarrow 1 - P\left(A \cap B\right) = 0{,}82 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(A \cap B\right) = 1 - 0{,}82 \Leftrightarrow P\left(A \cap B\right) = 0{,}18$$

Usando a definição de probabilidade condiciona, podemos calcular $P(A)$:

$$P\left(B|A\right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{0{,}18}{P(A)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0{,}18 \times 3 = P(A) \Leftrightarrow P(A) = 0{,}54$$

3.2. Como são extraídos 4 cartões simultaneamente de um conjunto de 30, o número extrações diferentes que podem ser feitas, ou seja o número de casos possíveis, é ${}^{30}C_4$

Para que num extração os menores números saídos sejam o 7 e o 22, então estes dois números devem estar no conjunto dos 4 cartões extraídos e os restantes dois números devem ser escolhidos de entre os $30 - 22 = 8$ cartões com números superiores a 22, ou seja, existem ${}^1C_1 \times^1 C_1 \times {}^8C_2 = {}^8C_2$ conjuntos de cartões nestas condições, ou seja o número de casos favoráveis é ${}^8C_2$

Assim, recorrendo à Regra de Laplace, calculando a probabilidade de selecionar 4 dos 30 cartões e os menores números saídos serem o 7 e o 22 e arredondando o resultado às milésimas, temos:

$$p = \frac{{}^8C_2}{{}^{30}C_4} \approx 0{,}001$$

4.

4.1. Como a função é contínua em $\mathbb{R}^+$, a reta de equação $x = 0$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f. Para averiguar esta hipótese vamos calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 0^+}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, podemos concluir a reta de equação $x = 0$ é a única assíntota vertical do gráfico de f, ou seja, paralela ao eixo das ordenadas.

Como o domínio da função é $\mathbb{R}^+$, para averiguar a existência de assíntotas paralelas ao eixo das abcissas, vamos calcular $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 0$$

Logo, podemos concluir que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f, quando $x \to +\infty$, e que é a única assíntota do gráfico de f paralela ao eixo das abcissas.

4.2. Resolvendo a inequação, temos que:

$$f(x) > 2\ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} > 2\ln x \underset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x > x \times 2\ln x \Leftrightarrow \ln x - x \times 2\ln x > 0 \Leftrightarrow (\ln x)(1-2x) > 0$$

Como o domínio da função é $\mathbb{R}^+$ estudamos o sinal do produto, em $]0, +\infty[$, através de um quadro de variação de sinal, para resolver a inequação:

x	0		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$\ln x$	n.d.	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$1-2x$	n.d.	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$(\ln x)(1-2x)$	n.d.	$-$	0	$+$	0	$-$

Assim, temos que o conjunto solução da inequação é $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$

4.3. Como os extremos relativos correspondem aos zeros da função derivada, começamos por determinar a expressão da função derivada da função g:

$$g'(x) = \left(\frac{k}{x} + f(x)\right)' = \left(\frac{k}{x}\right)' + \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{k' \times x - x' \times k}{x^2} + \frac{(\ln x)'x - x'(\ln x)}{x^2} =$$

$$= \frac{0 - 1 \times k}{x^2} + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} \underset{x \neq 0}{=} \frac{-k + 1 - \ln x}{x^2}$$

Como a função tem um extremo relativo para $x = 1$, então 1 é zero da função derivada ($g'(1) = 0$), pelo que podemos determinar o valor de k resolvendo a equação seguinte:

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{-k + 1 - \ln 1}{1^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-k + 1 - 0}{1} = 0 \Leftrightarrow -k + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = k$$

5. Calculando o desenvolvimento do quadrado da soma, temos:

$$\left(2x \operatorname{sen} \alpha + \frac{\cos \alpha}{x}\right)^2 = (2x \operatorname{sen} \alpha)^2 + 2(2x \operatorname{sen} \alpha)\left(\frac{\cos \alpha}{x}\right) + \left(\frac{\cos \alpha}{x}\right)^2 =$$

$$= 4x^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{4x \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{x} + \frac{\cos^2 \alpha}{x^2} = 4x^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 4 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{x^2}$$

Assim, nos três termos do desenvolvimento o termo independente é $4 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$, pelo que, como sabemos que o termo independente é igual a 1, calculando os valores de α pertencentes ao intervalo $]\pi,2\pi[$, vem:

$$4 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 1 \Leftrightarrow 2 \times 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 1 \Leftrightarrow 2 \times \operatorname{sen}(2\alpha) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2\alpha) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2\alpha) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

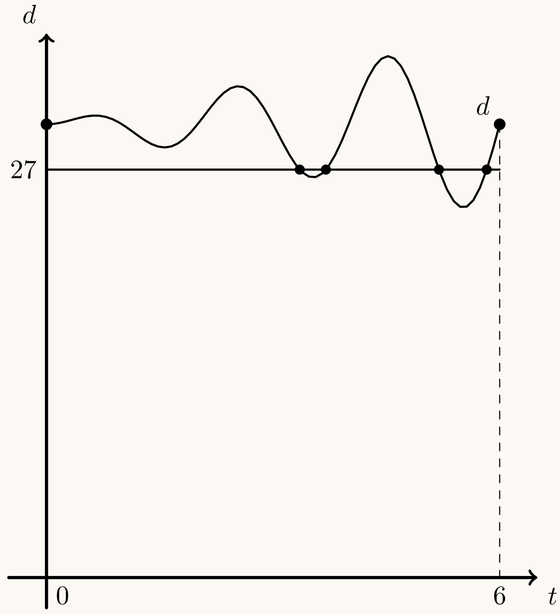
$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como se pretende identificar os valores de $\alpha \in]\pi,2\pi[$, atribuindo valores inteiros a k para identificar as soluções no intervalo definido, temos:

- $k = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} \vee \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} \quad \left(\frac{\pi}{12} \notin]\pi,2\pi[\quad \text{e} \quad \frac{5\pi}{12} \notin]\pi,2\pi[\right)$
- $k = 1 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12} \vee \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{17\pi}{12}$
- $k = 2 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} + 2\pi = \frac{25\pi}{12} \vee \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} + 2\pi = \frac{29\pi}{12} \quad \left(\frac{25\pi}{12} \notin]\pi,2\pi[\quad \text{e} \quad \frac{29\pi}{12} \notin]\pi,2\pi[\right)$

Assim, os valores de α nas condições do enunciado são $\frac{13\pi}{12}$ e $\frac{17\pi}{12}$

6.



6.1. Representando na calculadora gráfica o gráfico da função d, para valores de $t \in [0{,}6]$, ou seja, para $t \leq 12$ e a reta de equação $d = 27$, (reproduzido na figura ao lado) podemos observar que a reta interseta o gráfico da função neste intervalo em 4 pontos, pelo que o número de soluções da equação $d = 27$, no intervalo $[0{,}6]$ é 4

No contexto da situação descrita, a existência de 4 soluções no intervalo $[0{,}6]$, significa que a criança esteve a uma distância de 27 decímetros do muro, por quatro vezes, nos primeiros seis segundos.

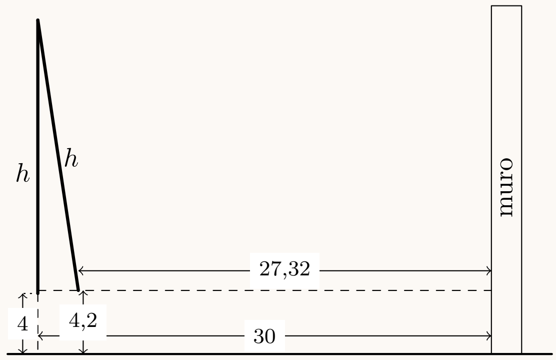
6.2. No instante inicial as hastes estão na vertical e a distância ao chão é de 4 dm, e, no mesmo instante a distância ao muro é dada por:

$$d(0) = 30 + 0 \times \text{ sen}\, \pi \times 0) = 30 + 0 = 30 \text{ dm}$$

Passados treze segundos e meio a distância ao chão é de 4,2 dm e a distância ao muro é dada por:

$$d(13{,}5) = 30 + 12e^{12-13{,}5} \,\text{sen}\, (\pi \times 13{,}5) =$$

$$= 30 + 12e^{-1{,}5} \,\text{sen}\, (\pi \times 13{,}5) \approx 27{,}32 \text{ dm}$$

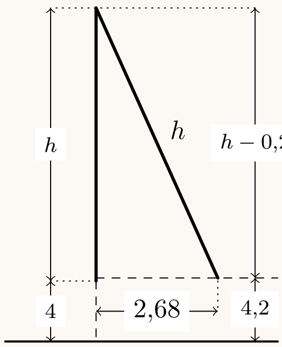


Assim, podemos considerar um triângulo retângulo, cuja hipotenusa tem o comprimento da haste (h), o cateto maior mede $h + 4 - 4{,}2 = h - 0{,}2$ e o cateto menor mede $d(0) - d(13{,}5) \approx 30 - 27{,}32 \approx 2{,}68$

E assim, recorrendo ao teorema de Pitágoras, um valor aproximado do comprimento da haste é dado por:

$$h^2 = (h - 0{,}2)^2 + 2{,}68^2 \;\Leftrightarrow\; h^2 = h^2 - 0{,}4h + 0{,}2^2 + 2{,}68^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 0{,}4h = 0{,}2^2 + 2{,}68^2 \;\Leftrightarrow\; h = \frac{0{,}2^2 + 2{,}68^2}{0{,}4}$$



Como $\dfrac{0{,}2^2 + 2{,}68^2}{0{,}4} \approx 18$, o valor do comprimento da haste, arredondado às unidades, é 18 dm