Exame final nacional de Matemática A **(2018, 2.ª fase)**

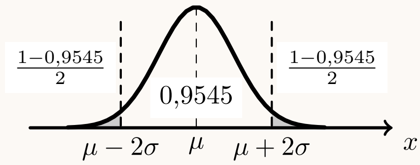
Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1. Como $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$ e $P(X < \mu - 2\sigma) = P(X > \mu + 2\sigma)$, temos que:

$$P(X < \mu - 2\sigma) \approx \frac{1 - 0{,}9545}{2}$$



E assim, vem que:

$$P(X > \mu - 2\sigma) = 1 - P(X < \mu - 2\sigma) \approx 1 - \frac{1 - 0{,}9545}{2} \approx 0{,}977$$

Resposta: **Opção C**

1.2. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, vem que:

$$A\hat{C}B = 180 - A\hat{B}C - B\hat{A}C = 180 - 81 - 57 = 42^\circ$$

E assim, calculando o valor de $\overline{AB}$ recorrendo à Lei dos senos, e arredondando o resultado às centésimas, temos que:

$$\frac{\operatorname{sen} A\hat{B}C}{\overline{AC}} = \frac{\operatorname{sen} A\hat{C}B}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} 81^\circ}{5} = \frac{\operatorname{sen} 42^\circ}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{5 \times \operatorname{sen} 42^\circ}{\operatorname{sen} 81^\circ} \Rightarrow \overline{AB} \approx 3{,}39$$

Resposta: **Opção C**

2. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um atleta do clube, e os acontecimentos:
B:≪O atleta praticar basquetebol≫
F:≪O atleta praticar futebol≫

Temos que $P\left(B\right) = \frac{1}{5}$; $P(F) = \frac{2}{5}$ e $P\left(\overline{B}|\overline{F}\right) = \frac{3}{4}$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{F}\right) = 1 - P\left(F\right) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$
- $P\left(\overline{B} \cap \overline{F}\right) = P\left(\overline{F}\right) \times P\left(\overline{B}|\overline{F}\right) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$
- $P\left(\overline{B} \cap F\right) = P\left(\overline{B}\right) - P\left(\overline{B} \cap \overline{F}\right) = \frac{4}{5} - \frac{9}{20} = \frac{16-9}{20} = \frac{7}{20}$
- $P\left(B \cap F\right) = P(F) - P\left(\overline{B} \cap F\right) = \frac{2}{5} - \frac{7}{20} = \frac{1}{20}$

	F	$\overline{F}$	
B	$\frac{1}{20}$		
$\overline{B}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{4}{5}$
	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

Desta forma, como $P\left(B \cap F\right) > 0$, temos que, existe pelo menos, um atleta do clube que pratica as duas modalidades desportivas.

3.

3.1. Como existem 5 vogais, existem 5 hipóteses para o primeiro dígito do código.
Para os restantes 3 dígitos do código existem 9 algarismos disponíveis, e como os algarismos devem ser todos diferentes, para as restantes 3 dígitos existem ${}^9A_3$ escolhas diferentes.

Assim, nas condições do enunciado existem $5 \times {}^9A_3 = 2520$ números.

Resposta: **Opção D**

3.2. Como existem 14 caracteres diferentes e nos códigos possíveis são constituídos por 4 caracteres, eventualmente repetidos, então o número de códigos diferentes que é possível formar, ou seja o número de casos possíveis, é ${}^{14}A'_4 = 14^4$
Para que um código seja constituído por quatro algarismos diferentes cujo produto seja um número ímpar, deve ser constituído só por algarismos ímpares, pelo que existem 5 algarismos (1, 3, 5, 7 e 9), que podem ser colocados em 4 posições, cuja ordem é relevante e sem repetição. Isto é, existem ${}^5A_4$ casos favoráveis.

Assim, recorrendo à Regra de Laplace, calculando a probabilidade de selecionar um código nas condições do enunciado e arredondando o resultado às milésimas, temos:

$$p = \frac{{}^5A_4}{{}^{14}A'_4} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{14^4} \approx 0{,}003$$

4.

4.1. Como o ponto P tem abcissa 1 ($x_P = 1$), e ordenada 3 ($y_P = 3$), substituindo estas coordenadas na equação da superfície esférica, calculamos a cota (z_P):

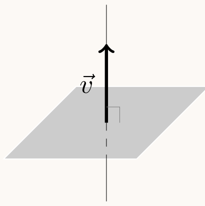
$$(x_P-1)^2+(y_P-2)^2+(z_P+1)^2 = 10 \Leftrightarrow (1-1)^2+(3-2)^2+(z_P+1)^2 = 10 \Leftrightarrow 0^2+1^2+(z_P+1)^2 = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (z_P+1)^2 = 10-1\ \Leftrightarrow\ z_P+1 = \pm\sqrt{9}\ \Leftrightarrow\ z_P = -1\pm 3\ \Leftrightarrow\ z_P = -4\ \vee\ z_P = 2$$

Como a cota do ponto P é negativa, as coordenadas do ponto P são $(1{,}3,-4)$

Como o plano é perpendicular à reta r, vetor diretor da reta ($\vec{v} = (4{,}1,-2)$) é um vetor normal do plano, e assim a equação do plano é da forma:

$$4x+y-2z+d = 0$$



E como o ponto P pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo as coordenadas, na equação anterior:

$$4(1)+3-2(-4)+d = 0\ \Leftrightarrow\ 4+3+8+d = 0\ \Leftrightarrow\ 15+d = 0\ \Leftrightarrow\ d = -15$$

E assim, uma equação do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta r, é:

$$4x+y-2z-15 = 0$$

4.2. Como a superfície esférica tem de equação

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2 = 10\ \Leftrightarrow\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-(-1))^2 = 10$$

As coordenadas do centro são $C(1{,}2,-1)$, pelo que as coordenadas do ponto A são $(1{,}2{,}1)$
Assim temos que, como O é a origem do referencial $\overrightarrow{OA} = (1{,}2{,}1)$ e $\overrightarrow{OC} = (1{,}2,-1)$, pelo que:

- $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$
- $\left\|\overrightarrow{OC}\right\| = \sqrt{1^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

E assim, recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos\left(\overrightarrow{OA}\,\widehat{\ }\,\overrightarrow{OC}\right) = \frac{\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OC}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OC}\right\|} = \frac{(1{,}2{,}1).(1{,}2,-1)}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}} = \frac{1+4-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Logo, a amplitude do ângulo AOC, em graus, arredondado às unidades, é:

$$A\hat{O}C = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48^\circ$$

5. No primeiro instante considerado a amplitude do ângulo ASM é α, e a distância de Mercúrio ao Sol é $d(\alpha) = \dfrac{555}{10 - 2{,}06\cos\alpha}$

   Relativamente ao segundo instante considerado, a amplitude do ângulo ASM é três vezes maior, ou seja, 3α, e a distância respetiva é $d(3\alpha) = \dfrac{555}{10 - 2{,}06\cos(3\alpha)}$

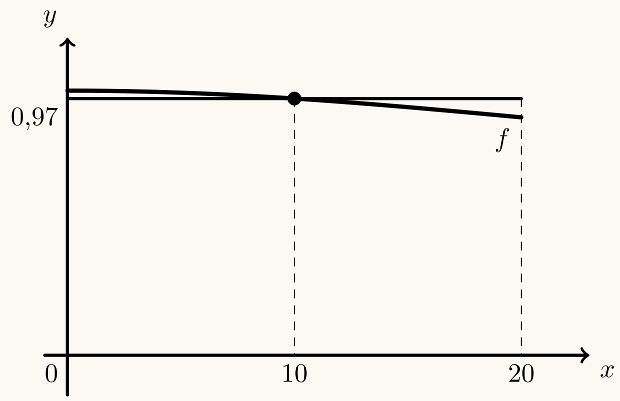
   Ainda relativamente ao segundo instante considerado, como a distância do planeta Mercúrio ao Sol diminuiu 3%, é igual a 97% da distância anterior, ou seja:

$$d(3\alpha) = 0{,}97 \times d(\alpha) \Leftrightarrow \frac{555}{10 - 2{,}06\cos(3\alpha)} = 0{,}97 \times \frac{555}{10 - 2{,}06\cos\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{10 - 2{,}06\cos\alpha}{10 - 2{,}06\cos(3\alpha)} = 0{,}97 \times \frac{555}{555} \Leftrightarrow \frac{10 - 2{,}06\cos\alpha}{10 - 2{,}06\cos(3\alpha)} = 0{,}97$$

   Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função $f(x) = \dfrac{10 - 2{,}06\cos x}{10 - 2{,}06\cos(3x)}$, e a reta horizontal de equação $y = 0{,}97$, para $0 < x < 20$ (porque α está compreendido entre 0 e 20 graus), reproduzido na figura ao lado, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às unidades) da abcissa do ponto de interseção, ou seja:

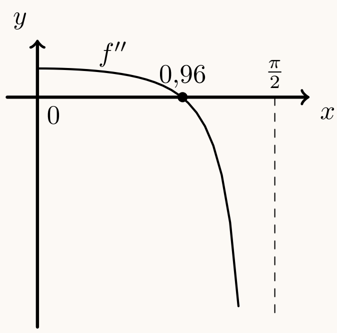
$$\alpha \approx 10°$$



6. Como a abcissa do ponto de inflexão é o zero da segunda derivada da função, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$f''(x) = (f'(x))' = (3x - \operatorname{tg} x)' = (3x)' - (\operatorname{tg} x)' = 3 - \frac{(x)'}{\cos^2 x} = 3 - \frac{1}{\cos^2 x}$$

   Representando na calculadora gráfica o gráfico da função f'', para valores de $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, (reproduzido na figura ao lado) e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados dos zeros de uma função determinamos o valor (aproximado às centésimas) do zero da função f''



   Assim, temos que a abcissa do ponto de inflexão do gráfico da função f, aproximado às centésimas, é 0,96

   Resposta: **Opção D**

7. Como o terceiro termo da progressão aritmética é 4, designado a razão por r, temos que:

- $u_3 = 4 \Leftrightarrow u_1 + (3-1) \times r = 4 \Leftrightarrow u_1 + 2r = 4 \Leftrightarrow u_1 = 4 - 2r$
- $u_{12} = u_1 + (12-1) \times r = u_1 + 11r$
- a soma dos 12 primeiros termos é:

$$S_{12} = \frac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12 = \frac{u_1 + u_1 + 11r}{2} \times 12 = (4 - 2r + 4 - 2r + 11r) \times \frac{12}{2} = (8 + 7r) \times 6$$

Como a soma dos doze primeiros termos é 174, temos que:

$$S_{12} = 174 \Leftrightarrow (8+7r) \times 6 = 174 \Leftrightarrow 8 + 7r = \frac{174}{6} \Leftrightarrow 7r = 29 - 8 \Leftrightarrow r = \frac{21}{7} \Leftrightarrow r = 3$$

Assim, vem que:

- $u_1 = 4 - 2 \times 3 = 4 - 6 = -2$
- $u_n = u_1 + (n-1) \times r = -2 + 3(n-1)$

E assim, resolvendo a equação $u_n = 5371$, vem:

$$u_n = 5371 \Leftrightarrow -2 + 3(n-1) = 5371 \Leftrightarrow 3n - 3 = 5371 + 2 \Leftrightarrow 3n = 5373 + 3 \Leftrightarrow n = \frac{5376}{3} \Leftrightarrow n = 1792$$

Como a solução da equação é um número natural, então 5371 é o termo de ordem 1972 da sucessão (u_n), ou seja, $u_{1792} = 5371$

8. Como a circunferência tem raio 1, e o ponto C pertence ao semieixo real negativo, designado por w o número complexo cujo afixo é o ponto C, temos que $w = -1$

Como z e w são ambos raízes de índice 5 do mesmo número complexo, temos que:

$$z^5 = w^5 = (-1)^5 = -1$$

Resposta: **Opção A**

Caderno 2

9.

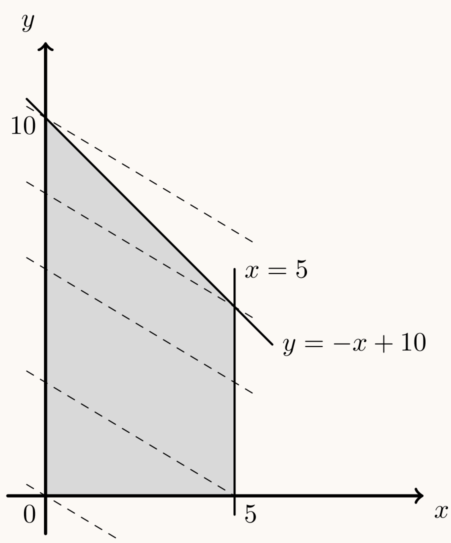
9.1. Representando a região admissível, de acordo com as restrições apresentadas, reproduzida na figura ao lado, e retas com o declive igual à reta definida pela função objetivo:

$$L = 3x + 5y \Leftrightarrow 5y = -3x + L \Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}x + \frac{L}{5}$$

Podemos verificar que o máximo é obtido no vértice de coordenadas (0,10). Assim, substituindo as coordenadas deste ponto na função objetivo, temos:

$$L = 3(0) + 5(10) = 0 + 50 = 50$$

Resposta: **Opção B**



9.2. Como a $\overline{F_1F_2} = 12$, ou seja a distância entre os focos é $2c = 12$, então a distância dos focos ao centro da elipse é:

$$c = \frac{\overline{F_1F_2}}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Como a soma das distâncias aos focos de qualquer ponto da elipse é igual ao comprimento do eixo maior ($2a$), temos que:

$$2a = \overline{PF_1} + \overline{PF_2} \Leftrightarrow 2a = 20 \Leftrightarrow a = \frac{20}{2} \Leftrightarrow a = 10$$

Assim podemos calcular o comprimento do semi-eixo menor (b), sabendo que $a^2 = b^2 + c^2$:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 10^2 = b^2 + 6^2 \Leftrightarrow 100 = b^2 + 36 \Leftrightarrow 100 - 36 = b^2 \Leftrightarrow 64 = b^2$$

Assim, temos que a equação da elipse centrada na origem e com os focos sobre o eixo Ox é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ou seja, nas condições do enunciado, } \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

Resposta: **Opção B**

10. Simplificando a expressão de z, como $i^{15} = i^{4\times 3+3} = i^3 = -i$, temos que:

$$z = \frac{(2-i)^2 + 1 + i}{1-2i} + 3i^{15} = \frac{4 - 2\times 2i + i^2 + 1 + i}{1-2i} + 3(-i) = \frac{4 - 4i - 1 + 1 + i}{1-2i} - 3i =$$

$$= \frac{4-3i}{1-2i} - 3i = \frac{(4-3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} - 3i = \frac{4 + 8i - 3i - 6i^2}{1 + 2i - 2i - 4i^2} - 3i = \frac{4 + 5i - 6(-1)}{1 - 4(-1)} - 3i =$$

$$= \frac{4 + 5i + 6}{1+4} - 3i = \frac{10 + 5i}{5} - 3i = 2 + i - 3i = 2 - 2i$$

Assim, vem que $\overline{z} = 2 + 2i$, pelo que:

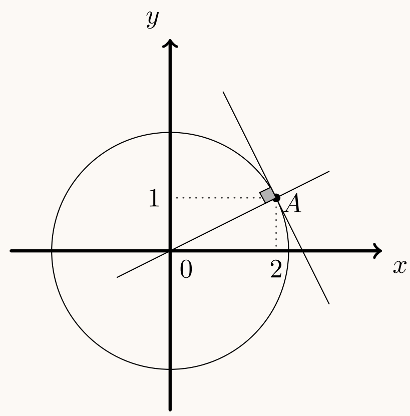
$$-\frac{1}{2} \times \overline{z} = -\frac{1}{2} \times (2 + 2i) = -1 - i$$

Escrevendo $-\frac{1}{2} \times \overline{z}$ na forma trigonométrica ($\rho e^{i\theta}$) temos:

- $\rho = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{-1}{-1} = 1$; como $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 3º quadrante, logo $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Assim $-\frac{1}{2} \times \overline{z} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$

11. Como a tangente é perpendicular ao raio, a reta r é perpendicular à reta OA, ou seja, declive da reta r é o simétrico do declive da reta OA



Calculando o declive da reta OA, temos:

$$m_{OA} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$$

Assim, o declive da reta r, é:

$$m_r = -\frac{1}{m_{OA}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

Logo a equação da reta r é da forma $y = -2x + b$ pelo que, substituindo as coordenadas do ponto A na equação da reta, podemos calcular o valor de b, ou seja, da ordenada na origem:

$$1 = -2 \times 2 + b \Leftrightarrow 1 = -4 + b \Leftrightarrow 1 + 4 = b \Leftrightarrow 5 = b$$

Resposta: **Opção B**

12.

12.1. Para averiguar a existência de pontos que pertençam simultaneamente aos planos α, β e γ, ou seja, que pertençam à interseção dos três planos, resolvemos o sistema seguinte:

$$\begin{cases} y = -x \\ y = z \\ 2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = y \\ 2(-y) + 3y - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = y \\ -2y + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = y \\ 0y = 1 \end{cases}$$

Como a equação $0y = 1$ é impossível, o sistema é impossível, ou seja, não existem pontos que pertençam aos três planos, ou seja, a interseção dos três planos é o conjunto vazio.

Resposta: **Opção D**

12.2. Calculando o valor do limite, vem que:

$$\lim \left(\frac{n+5}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim \left(\frac{n\left(1+\frac{5}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\lim \left(\frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\lim\left(1+\frac{5}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{e^5}{e^1}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(e^{5-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(e^4\right)^{\frac{1}{2}} = e^{4\times\frac{1}{2}} = e^2$$

Resposta: **Opção D**

13. Resolvendo a inequação, como $3 = \log_2 8$, temos que:

$$\log_2(x+1) \leq 3 - \log_2(8-x) \Leftrightarrow \log_2(x+1) + \log_2(8-x) \leq 3 \Leftrightarrow \log_2\big((x+1)\times(8-x)\big) \leq \log_2 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(8-x) \leq 8 \Leftrightarrow 8x - x^2 + 8 - x \leq 8 \Leftrightarrow 7x - x^2 \leq 8 - 8 \Leftrightarrow 7x - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x(7-x) \leq 0$$

Mas como a expressão $\log_2(x+1) \leq 3 - \log_2(8-x)$ só está definida se:

$$x+1 > 0 \land 8-x > 0 \Leftrightarrow x > -1 \land 8 > x \Leftrightarrow x > -1 \land x < 8$$

E como $x(7-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor 7 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor 7 = x$, podemos estudar o sinal de $x(7-x)$, para os valores de x definidos, recorrendo a uma tabela:

x	-1		0		7		8
x	n.d.	$-$	0	$+$	$+$	$+$	n.d.
$7-x$	n.d.	$+$	$+$	$+$	0	$-$	n.d.
$x(7-x)$	n.d.	$-$	0	$+$	0	$-$	n.d.

Pelo que o conjunto dos números reais que são soluções da inequação é: $]-1,0] \cup [7,8[$

14.

14.1. Recorrendo à definição de derivada num ponto, temos que:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{3 + \frac{e^x}{1-x} - \left(3 + \frac{e^0}{1-0}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3 + \frac{e^x}{1-x} - 3 - \frac{1}{1}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x}{1-x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x}{1-x} - \frac{1-x}{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x - (1-x)}{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-(1-x)}{x(1-x)} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x-(1-x)}{x(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + x}{x(1-x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x-1}{x(1-x)} + \frac{x}{x(1-x)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x-1}{x} \times \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-x}\right) = \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-x} + \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-x} =$$

$$= 1 \times \frac{1}{1-0} + \frac{1}{1-0} = 1 \times 1 + 1 = 2$$

14.2. Para averiguar a existência de assíntotas horizontais vamos calcular o limite da função quando $x \to -\infty$ e quando $x \to -\infty$:

- $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(3+\frac{e^x}{1-x}\right) = \lim_{x\to-\infty} 3 + \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1-x} = 3+\frac{e^{-\infty}}{1-(-\infty)} =$$
$$= 3+\frac{0^+}{1+\infty} = 3+\frac{0^+}{+\infty} = 3+0 = 3$$

  Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$, a reta de equação $y=3$ é assíntota horizontal do gráfico de f

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2)+2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x^2)}{x}+\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2)}{x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x} + \frac{2}{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\left(2\times\frac{\ln x}{x}\right) + 0 = \lim_{x\to+\infty} 2 \times \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 2\times 0 = 0$$

  Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, a reta de equação $y=0$ também é assíntota horizontal do gráfico de f

14.3. Considerando a função h, podemos observar que:

$$h(1) = 1+1 \Leftrightarrow h(1) = 2 \Leftrightarrow h^{-1}(2) = 1$$

E assim, vem que:

$$\left(f\circ h^{-1}\right)(2) = f\left(h^{-1}(2)\right) = f(1) = \frac{\ln(1^2)+2}{1} = \frac{0+2}{1} = 2$$

Resposta: **Opção C**

15. Como o declive da reta tangente ao gráfico de g em cada ponto é dado pela função derivada, começamos por determinar a expressão de g':

$$g'(x) = \left(2\,\text{sen}\,x + \text{sen}^2 x\right)' = \left(2\,\text{sen}\,x\right)' + \left(\text{sen}^2 x\right)' = 2\cos x + \left(\text{sen}\,x \times \text{sen}\,x\right)' =$$

$$= 2\cos x + \left(\text{sen}\,x\right)' \times \text{sen}\,x + \text{sen}\,x \times \left(\text{sen}\,x\right)' = 2\cos x + \cos x \times \text{sen}\,x + \text{sen}\,x \times \cos x =$$
$$= 2\cos x + 2 \times \text{sen}\,x \times \cos x = 2\cos x + \text{sen}\,(2x)$$

Como o máximo de uma função corresponde a um zero da função derivada, vamos determinar a expressão da função derivada da função g', ou seja g'', para determinar o declive máximo:

$$g''(x) = (g'(x))' = (2\cos x + \text{sen}\,(2x))' = (2\cos x)' + (\text{sen}\,(2x))' = 2 \times (-\,\text{sen}\,x) + (2x)' \times \cos(2x) =$$

$$= -2\,\text{sen}\,x + 2\cos(2x)$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função ($[0,\pi]$), vem:

$$-2\,\text{sen}\,x + 2\cos(2x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\cos(2x) = 2\,\text{sen}\,x \;\Leftrightarrow\; \cos(2x) = \text{sen}\,x \underset{\text{sen}\,x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\; \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \;\Leftrightarrow\; 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \;\vee\; 2x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2x + x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\vee\; 2x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\vee\; 2x - x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \;\vee\; x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z}$$

Como se pretende identificar os valores de $x \in [0,\pi]$, atribuindo valores inteiros a k para identificar as soluções no intervalo definido, temos:

- $k = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \notin [0,\pi]\right)$
- $k = 1 \;\rightarrow\; x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = -\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \quad \left(\frac{3\pi}{2} \notin [0,\pi]\right)$
- $k = 2 \;\rightarrow\; x = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{8\pi}{6} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 4\pi \quad \left(\frac{3\pi}{2} \notin [0,\pi] \quad \text{e} \quad 4\pi - \frac{\pi}{2} \notin [0,\pi]\right)$

Assim, as soluções da equação $g''(x) = 0$, que pertencem ao domínio da função, são $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$, pelo que Estudando a variação do sinal da derivada de g', e relacionando com a monotonia do declive, vem:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
g''	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
g'	min	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	min	$\nearrow$	Máx

Assim temos que os valores máximos do declive são:

- $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{6} + \text{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
- $g'(\pi) = 2\cos\pi + \text{sen}\,(2\pi) = 2 \times (-1) + 0 = -2$

Como $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) > g(\pi)$ então $g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ é o máximo absoluto e o valor máximo do declive das retas tangentes ao gráfico de g, ou seja, o declive da reta r é:

$$m_r = g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$