Prova Escrita de MATEMÁTICA A - 12º Ano
2018 - 2ª Fase

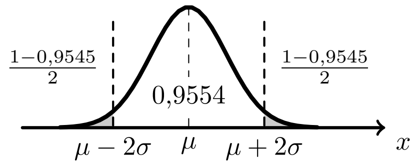
Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1. Como $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$, logo como $(P(X < \mu - 2\sigma) = P(X > \mu + 2\sigma)$, temos que:

$$P(X < \mu - 2\sigma) \approx \frac{1-0{,}9545}{2}$$



E assim, vem que:

$$P(X > \mu - 2\sigma) = 1 - P(X < \mu - 2\sigma) \approx 1 - \frac{1-0{,}9545}{2} \approx 0{,}977$$

Resposta: **Opção C**

1.2. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, vem que:

$$A\hat{C}B = 180 - A\hat{B}C - B\hat{A}C = 180 - 81 - 57 = 42°$$

E assim, calculando o valor de $\overline{AB}$ recorrendo à Lei dos senos, e arredondando o resultado às centésimas, temos que:

$$\frac{\operatorname{sen} A\hat{B}C}{\overline{AC}} = \frac{\operatorname{sen} A\hat{C}B}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} 81°}{5} = \frac{\operatorname{sen} 42°}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{5 \times \operatorname{sen} 42°}{\operatorname{sen} 81°} \Rightarrow \overline{AB} \approx 3{,}39$$

Resposta: **Opção C**

2. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um atleta do clube, e os acontecimentos:
B:≪O atleta praticar basquetebol≫
F:≪O atleta praticar futebol≫

Temos que $P(B) = \frac{1}{5}$; $P(F) = \frac{2}{5}$ e $P\left(\overline{B}|\overline{F}\right) = \frac{3}{4}$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{F}\right) = 1 - P(F) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$
- $P\left(\overline{B} \cap \overline{F}\right) = P\left(\overline{F}\right) \times P\left(\overline{B}|\overline{F}\right) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$
- $P\left(\overline{B} \cap F\right) = P\left(\overline{B}\right) - P\left(\overline{B} \cap \overline{F}\right) = \frac{4}{5} - \frac{9}{20} = \frac{16-9}{20} = \frac{7}{20}$
- $P(B \cap F) = P(F) - P\left(\overline{B} \cap F\right) = \frac{2}{5} - \frac{7}{20} = \frac{1}{20}$

	F	$\overline{F}$	
B	$\frac{1}{20}$		
$\overline{B}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{4}{5}$
	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

Desta forma, como $P(B \cap F) > 0$, temos que, existe pelo menos, um atleta do clube que pratica as duas modalidades desportivas.

3.

3.1. Como existem 5 vogais, existem 5 hipóteses para o primeiro dígito do código.
Para os restantes 3 dígitos do código existem 9 algarismos disponíveis, e como os algarismos devem ser todos diferentes, para as restantes 3 dígitos existem ${}^{9}A_3$ escolhas diferentes.

Assim, nas condições do enunciado existem $5 \times {}^{9}A_3 = 2520$ números.

Resposta: **Opção D**

3.2. Como existem 14 caracteres diferentes e nos códigos possíveis são constituídos por 4 caracteres, eventualmente repetidos, então o número de códigos diferentes que é possível formar, ou seja o número de casos possíveis, é ${}^{14}A'_4 = 14^4$
Para que um código seja constituído por quatro algarismos diferentes cujo produto seja um número ímpar, deve ser constituído só por algarismos ímpares, pelo que existem 5 algarismos (1, 3, 5, 7 e 9), que podem ser colocados em 4 posições, cuja ordem é relevante e sem repetição. Isto é, existem ${}^{5}A_4$ casos favoráveis.

Assim, recorrendo à Regra de Laplace, calculando a probabilidade de selecionar um código nas condições do enunciado e arredondando o resultado às milésimas, temos:

$$p = \frac{{}^{5}A_4}{{}^{14}A'_4} = \frac{5 \times 4}{14^4} \approx 0{,}003$$

4.

4.1. Como o ponto P tem abcissa 1 ($x_P = 1$), e ordenada 3 ($y_P = 3$), substituindo estas coordenadas na equação da superfície esférica, calculamos a cota (z_P):

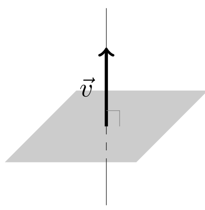
$$(x_P-1)^2+(y_P-2)^2+(z_P+1)^2 = 10 \Leftrightarrow (1-1)^2+(3-2)^2+(z_P+1)^2 = 10 \Leftrightarrow 0^2+1^2+(z_P+1)^2 = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z_P+1)^2 = 10-1 \Leftrightarrow z_P+1 = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow z_P = -1 \pm 3 \Leftrightarrow z_P = -4 \vee z_P = 2$$

Como a cota do ponto P é negativa, as coordenadas do ponto P são $(1,3,-4)$

Como o plano é perpendicular à reta r, vetor diretor da reta ($\vec{v} = (4,1,-2)$) é um vetor normal do plano, e assim a equação do plano é da forma:

$$4x + y - 2z + d = 0$$



E como o ponto P pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo as coordenadas, na equação anterior:

$$4(1) + 3 - 2(-4) + d = 0 \Leftrightarrow 4+3+8+d = 0 \Leftrightarrow 15+d = 0 \Leftrightarrow d = -15$$

E assim, uma equação do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta r, é:

$$4x + y - 2z - 15 = 0$$

4.2. Como a superfície esférica tem de equação

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=10 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-(-1))^2=10$$

As coordenadas do centro são $C(1{,}2,-1)$, pelo que as coordenadas do ponto A são $(1{,}2{,}1)$
Assim temos que, como O é a origem do referencial $\overrightarrow{OA}=(1{,}2{,}1)$ e $\overrightarrow{OC}=(1{,}2,-1)$, pelo que:

- $\left\|\overrightarrow{OA}\right\|=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$
- $\left\|\overrightarrow{OC}\right\|=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$

E assim, recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos\left(\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OC}\right)=\frac{\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OC}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OC}\right\|}=\frac{(1{,}2{,}1).(1{,}2,-1)}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{1+4-1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Logo, a amplitude do ângulo AOC, em graus, arredondado às unidades, é:

$$A\hat{O}C=\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\approx 48^\circ$$

5. No primeiro instante considerado a amplitude do ângulo ASM é α, e a distância de Mercúrio ao Sol é $d(\alpha)=\dfrac{555}{10-2{,}06\cos\alpha}$

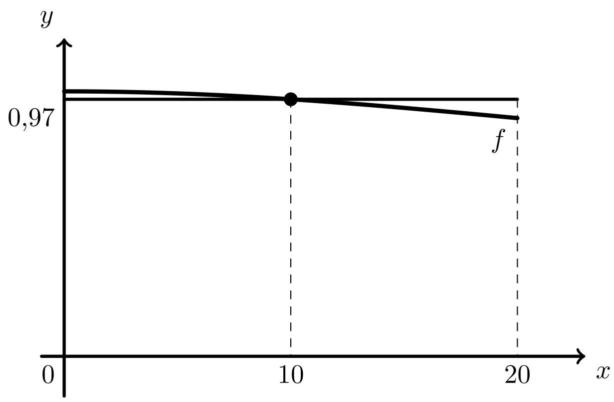
Relativamente ao segundo instante considerado, a amplitude do ângulo ASM é três vezes maior, ou seja, 3α, e a distância respetiva é $d(3\alpha)=\dfrac{555}{10-2{,}06\cos\alpha}$
Ainda relativamente ao segundo instante considerado, como a distância do planeta Mercúrio ao Sol diminuiu 3%, é igual a 97% da distância anterior, ou seja:

$$d(3\alpha)=0{,}97\times d(\alpha) \Leftrightarrow \frac{555}{10-2{,}06\cos(3\alpha)}=0{,}97\times\frac{555}{10-2{,}06\cos\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{10-2{,}06\cos\alpha}{10-2{,}06\cos(3\alpha)}=0{,}97\times\frac{555}{555} \Leftrightarrow \frac{10-2{,}06\cos\alpha}{10-2{,}06\cos(3\alpha)}=0{,}97$$

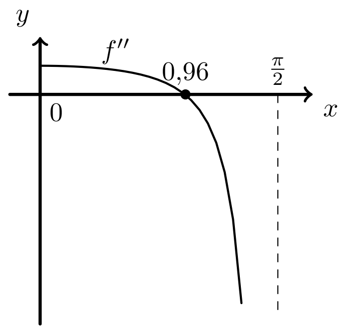
Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função $f(x)=\dfrac{10-2{,}06\cos x}{10-2{,}06\cos(3x)}$, e a reta horizontal de equação $y=0{,}97$, para $0<x<20$ (porque α está compreendido entre 0 e 20 graus), reproduzido na figura ao lado, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às unidades) da abcissa do ponto de interseção, ou seja:

$$\alpha\approx 10^\circ$$



6. Como a abcissa do ponto de inflexão é o zero da segunda derivada da função, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$f''(x) = (f'(x))' = (3x - \operatorname{tg} x)' = (3x)' - (\operatorname{tg} x)' = 3 - \frac{(x)'}{\cos^2 x} = 3 - \frac{1}{\cos^2 x}$$



Representando na calculadora gráfica o gráfico da função f'', para valores de $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, (reproduzido na figura ao lado) e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados dos zeros de uma função determinamos o valor (aproximado às centésimas) do zero da função f''

Assim, temos que a abcissa do ponto de inflexão do gráfico da função f, aproximado às centésimas, é 0,96

Resposta: **Opção D**

7. Como o terceiro termo da progressão aritmética é 4, designado a razão por r, temos que:

- $u_3 = 4 \Leftrightarrow u_1 + (3-1) \times r = 4 \Leftrightarrow u_1 + 2r = 4 \Leftrightarrow u_1 = 4 - 2r$
- $u_{12} = u_1 + (12-1) \times r = u_1 + 11r$
- a soma dos 12 primeiros termos é:

$$S_{12} = \frac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12 = \frac{u_1 + u_1 + 11r}{2} \times 12 = (4 - 2r + 4 - 2r + 11r) \times \frac{12}{2} = (8 + 7r) \times 6$$

Como a soma dos doze primeiros termos é 174, temos que:

$$S_{12} = 174 \Leftrightarrow (8 + 7r) \times 6 = 174 \Leftrightarrow 8 + 7r = \frac{174}{6} \Leftrightarrow 7r = 29 - 8 \Leftrightarrow r = \frac{21}{7} \Leftrightarrow r = 3$$

Assim, vem que:

- $u_1 = 4 - 2 \times 3 = 4 - 6 = -2$
- $u_n = u_1 + (n-1) \times r = -2 + 3(n-1)$

E assim, resolvendo a equação $u_n = 5371$, vem:

$$u_n = 5371 \Leftrightarrow -2 + 3(n-1) = 5371 \Leftrightarrow 3n - 3 = 5371 + 2 \Leftrightarrow 3n = 5373 + 3 \Leftrightarrow n = \frac{5376}{3} \Leftrightarrow n = 1792$$

Como a solução da equação é um número natural, então 5371 é o termo de ordem 1992 da sucessão (u_n), ou seja, $u_{1796} = 5371$

8. Como a circunferência tem raio 1, e o ponto C pertence ao semieixo real negativo, designado por w o número complexo cujo afixo é o ponto C, temos que $w = -1$

Como z e w são ambos raízes de índice 5 do mesmo número complexo, temos que:

$$z^5 = w^5 = (-1)^5 = -1$$

Resposta: **Opção A**

Caderno 2

9.

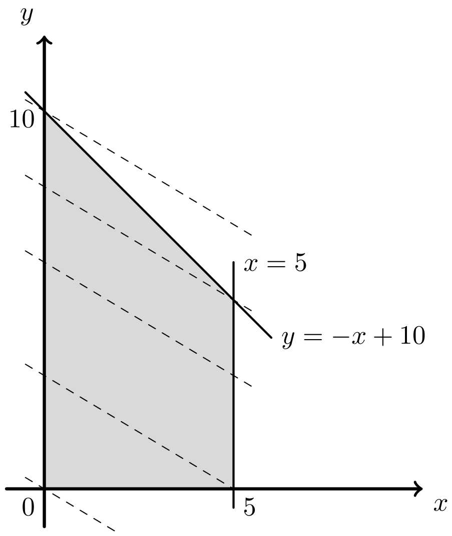
9.1. Representando a região admissível, de acordo com as restrições apresentadas, reproduzida na figura ao lado, e retas com o declive igual à reta definida pela função objetivo:

$$L = 3x + 5y \Leftrightarrow 5y = -3x + L \Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}x + \frac{L}{5}$$

Podemos verificar que o máximo é obtido no vértice de coordenadas (0,10). Assim, substituindo as coordenadas deste ponto na função objetivo, temos:

$$L = 3(0) + 5(10) = 0 + 50 = 50$$

Resposta: **Opção B**



9.2. Como a $\overline{F_1F_2} = 12$, ou seja a distância entre os focos é $2c = 12$, então a distância dos focos ao centro da elipse é:

$$c = \frac{\overline{F_1F_2}}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Como a soma das distâncias aos focos de qualquer ponto da elipse é igual ao comprimento do eixo maior $(2a)$, temos que:

$$2a = \overline{PF_1} + \overline{PF_2} \Leftrightarrow 2a = 20 \Leftrightarrow a = \frac{20}{2} \Leftrightarrow a = 10$$

Assim podemos calcular o comprimento do semi-eixo menor (b), sabendo que $a^2 = b^2 - c^2$:

$$a^2 = b^2 - c^2 \Leftrightarrow 10^2 = b^2 - 6^2 \Leftrightarrow 100 = b^2 - 36 \Leftrightarrow 100 - 36 = b^2 \Leftrightarrow 64 = b^2$$

Assim, temos que a equação da elipse centrada na origem e com os focos sobre o eixo Ox é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ou seja, nas condições do enunciado, } \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

Resposta: **Opção B**

10. Simplificando a expressão de z, como $i^{15}=i^{4\times 3+3}=i^3=-i$, temos que:

$$z=\frac{(2-i)^2+1+i}{1-2i}+3i^{15}=\frac{4-2\times 2i+i^2+1+i}{1-2i}+3(-i)=\frac{4-4i-1+1+i}{1-2i}-3i=$$
$$=\frac{4-3i}{1-2i}-3i=\frac{(4-3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}-3i=\frac{4+8i-3i-6i^2}{1+2i-2i-4i^2}-3i=\frac{4+5i-6(-1)}{1-4(-1)}-3i=$$
$$=\frac{4+5i+6}{1+4}-3i=\frac{10+5i}{5}-3i=2+i-3i=2-2i$$

Assim, vem que $\overline{z}=2+2i$, pelo que:

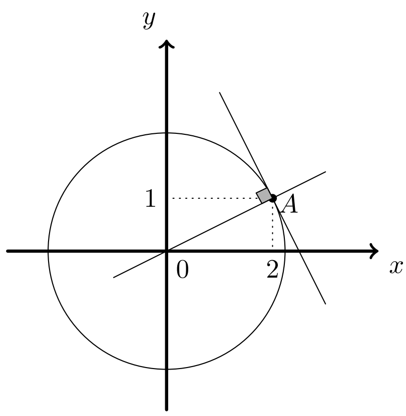
$$-\frac{1}{2}\times\overline{z}=-\frac{1}{2}\times(2+2i)=-1-i$$

Escrevendo $-\frac{1}{2}\times\overline{z}$ na forma trigonométrica $(\rho e^{i\theta})$ temos:

- $\rho=|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta=\frac{-1}{-1}=1$; como $\operatorname{sen}\theta<0$ e $\cos\theta<0$, θ é um ângulo do 3º quadrante, logo $\theta=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$

Assim $-\frac{1}{2}\times\overline{z}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$

11. Como a tangente é perpendicular ao raio, a reta r é perpendicular à reta OA, ou seja, declive da reta r é o simétrico do declive da reta OA



Calculando o declive da reta OA, temos:

$$m_{OA}=\frac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\frac{1-0}{2-0}=\frac{1}{2}$$

Assim, o declive da reta r, é:

$$m_r=-\frac{1}{m_{OA}}=-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2$$

Logo a equação da reta r é da forma $y=-2x+b$ pelo que, substituindo as coordenadas do ponto A na equação da reta, podemos calcular o valor de b, ou seja, da ordenada na origem:

$$1=-2\times 2+b\ \Leftrightarrow\ 1=-4+b\ \Leftrightarrow\ 1+4=b\ \Leftrightarrow\ 5=b$$

Resposta: **Opção B**

12.

12.1. Para averiguar a existência de pontos que pertençam simultaneamente aos planos α, β e γ, ou seja, que pertençam à interseção dos três planos, resolvemos o sistema seguinte:

$$\begin{cases} y=-x \\ y=z \\ 2x+3y-z-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-y \\ z=y \\ 2(-y)+3y-y-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-y \\ z=y \\ -2y+2y=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-y \\ z=y \\ 0y=1 \end{cases}$$

Como a equação $0y=1$ é impossível, o sistema é impossível, ou seja, não existem pontos que pertençam aos três planos, ou seja, a interseção dos três planos é o conjunto vazio.

Resposta: **Opção D**

12.2. Calculando o valor do limite, vem que:

$$\lim\left(\frac{n+5}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim\left(\frac{n\left(1+\frac{5}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\lim\left(\frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\lim\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n}}{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{e^5}{e^1}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(e^{5-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(e^4\right)^{\frac{1}{2}} = e^{4\times\frac{1}{2}} = e^2$$

Resposta: **Opção D**

13. Resolvendo a inequação, como $3 = \log_2 8$, temos que:

$$\log_2(x+1) \leq 3 - \log_2(8-x) \Leftrightarrow \log_2(x+1) + \log_2(8-x) \leq 3 \Leftrightarrow \log_2\big((x+1)\times(8-x)\big) \leq \log_2 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(8-x) \leq 8 \Leftrightarrow 8x - x^2 + 8 - x \leq 8 \Leftrightarrow 7x - x^2 \leq 8 - 8 \Leftrightarrow 7x - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x(7-x) \leq 0$$

Mas como a expressão $\log_2(x+1) \leq 3 - \log_2(8-x)$ só está definida se:

$$x+1>0 \wedge 8-x>0 \Leftrightarrow x>-1 \wedge 8>x \Leftrightarrow x>-1 \wedge x<8$$

E como $x(7-x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee 7-x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee 7=x$, podemos estudar o sinal de $x(7-x)$, para os valores de x definidos, recorrendo a uma tabela:

x	-1		0		7		8
x	n.d.	$-$	0	$+$	$+$	$+$	n.d.
$7-x$	n.d.	$+$	$+$	$+$	0	$-$	n.d.
$x(7-x)$	n.d.	$-$	0	$+$	0	$-$	n.d.

Pelo que o conjunto dos números reais que são soluções da inequação é: $]-1{,}0[\cup]7{,}8[$

14.

14.1. Recorrendo à definição de derivada num ponto, temos que:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{3+\frac{e^x}{1-x}-\left(3+\frac{e^0}{1-0}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{3+\frac{e^x}{1-x}-3-\frac{1}{1}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x}{1-x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x}{1-x}-\frac{1-x}{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-(1-x)}{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1-x)}{x(1-x)} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1-x)}{x(1-x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+x}{x(1-x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x(1-x)}+\frac{x}{x(1-x)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-x}\right) = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{Lim. Notável}}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}+\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x} =$$

$$= 1\times\frac{1}{1-0}+\frac{1}{1-0} = 1\times 1+1 = 2$$

14.2. Para averiguar a existência de assíntotas horizontais vamos calcular o limite da função quando $x \to -\infty$ e quando $x \to -\infty$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(3 + \frac{e^x}{1-x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1-x} = 3 + \frac{e^{-\infty}}{1-(-\infty)} =$

$$= 3 + \frac{0^+}{1+\infty} = 3 + \frac{0^+}{+\infty} = 3 + 0 = 3$$

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$, a reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal do gráfico de f

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2)+2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x} + \frac{2}{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \left(2 \times \frac{\ln x}{x}\right) + 0 = \lim_{x\to+\infty} 2 \times \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 \times 0 = 0$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, a reta de equação $y = 0$ também é assíntota horizontal do gráfico de f

14.3. Considerando a função h, podemos observar que:

$$h(1) = 1 + 1 \Leftrightarrow h(1) = 2 \Leftrightarrow h^{-1}(2) = 1$$

E assim, vem que:

$$\left(f \circ h^{-1}\right)(2) = f\left(h^{-1}(2)\right) = f(1) = \frac{\ln(1^2)+2}{1} = \frac{0+2}{1} = 2$$

Resposta: **Opção C**

15. Como o declive da reta tangente ao gráfico de g em cada ponto é dado pela função derivada, começamos por determinar a expressão de g':

$$g'(x) = \left(2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x\right)' = \left(2\operatorname{sen} x\right)' + \left(\operatorname{sen}^2 x\right)' = 2\cos x + \left(\operatorname{sen} x \times \operatorname{sen} x\right)' =$$

$$= 2\cos x + \left(\operatorname{sen} x\right)' \times \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \times \left(\operatorname{sen} x\right)' = 2\cos x + \cos x \times \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \times \cos x =$$

$$= 2\cos x + 2 \times \operatorname{sen} x \times \cos x = 2\cos x + \operatorname{sen}(2x)$$

Como o máximo de uma função corresponde a um zero da função derivada, vamos determinar a expressão da função derivada da função g', ou seja g'', para determinar o declive máximo:

$$g''(x) = (g'(x))' = (2\cos x + \operatorname{sen}(2x))' = (2\cos x)' + (\operatorname{sen}(2x))' = 2 \times (-\operatorname{sen} x) + (2x)' \times \cos(2x) =$$

$$= -2\operatorname{sen} x + 2x\cos(2x)$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função ($[0,\pi]$), vem:

$$-2\operatorname{sen} x + 2\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos(2x) = 2\operatorname{sen} x \Leftrightarrow \cos(2x) = \operatorname{sen} x \underset{\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee 2x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 2x - x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como se pretende identificar os valores de $x \in [0,\pi]$, atribuindo valores inteiros a k para identificar as soluções no intervalo definido, temos:

- $k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \notin [0,\pi]\right)$
- $k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = -\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \quad \left(\frac{3\pi}{2} \notin [0,\pi]\right)$
- $k = 2 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{8\pi}{6} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 4\pi \quad \left(\frac{3\pi}{2} \notin [0,\pi] \quad \text{e} \quad 4\pi - \frac{\pi}{2} \notin [0,\pi]\right)$

Assim, as soluções da equação $g''(x) = 0$, que pertencem ao domínio da função, são $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$, pelo que Estudando a variação do sinal da derivada de g', e relacionando com a monotonia do declive, vem:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$g''(x)$	+	+	0	−	0	+	+
$g'(x)$	min	↗	Máx	↘	min	↗	Máx

Assim temos que os valores máximos do declive são:

- $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
- $g'(\pi) = 2\cos\pi + \operatorname{sen}(2\pi) = 2 \times (-1) + 0 = -2$

Como $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) > g(\pi)$ então $g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ é o máximo absoluto e o valor máximo do declive das retas tangentes ao gráfigo de g, ou seja, o declive da reta r é:

$$m_r = g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$