

## Exame final nacional de Matemática A (2019, 2.ª fase)

Proposta de resolução



---

### Caderno 1

---

1.

- 1.1. Como  $[ABCDEFGH]$  é um paralelepípedo e os pontos  $A$ ,  $B$  e  $G$  pertencem ao plano  $xOy$  (porque têm todos cota nula), então a reta  $CB$  é paralela ao eixo  $Oz$ , e o ponto  $B$  tem abscissa e ordenada, respetivamente iguais às do ponto  $C$  e cota nula (porque pertence ao eixo  $Oy$ , ou seja, as coordenadas do ponto  $B$  são  $(0,3,0)$ )

Como o ponto  $A$  pertence ao eixo  $Ox$  tem ordenada e cota nulas, e como pertence ao plano  $ABC$ , podemos determinar a sua abscissa substituindo o valor da ordenada na equação do plano:

$$3x + 4(0) - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x + 0 = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{3} \Leftrightarrow x = 4$$

Assim, temos que as coordenadas do ponto  $A$  são  $(4,0,0)$ , e, calculando a distância entre dois pontos, temos que o volume do paralelepípedo, é:

$$\begin{aligned} V_{[ABCDEFGH]} &= \overline{AB} \times \overline{BG} \times \overline{BC} = \\ &= \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2 + (0-0)^2} \times \sqrt{(0-6)^2 + (3-11)^2 + (0-0)^2} \times \sqrt{(0-0)^2 + (3-3)^2 + (0-6)^2} = \\ &= \sqrt{16+9} \times \sqrt{36+64} \times \sqrt{36} = \sqrt{25} \times \sqrt{100} \times 6 = 5 \times 10 \times 6 = 300 \end{aligned}$$

- 1.2. Como a reta  $r$  é perpendicular ao plano  $ABC$ , vetor normal do plano ( $\vec{v} = (3,4,0)$ ) é um vetor diretor da reta, e assim, considerando as coordenadas do ponto  $P$ , temos que uma equação vetorial da reta  $r$  é:

$$(x,y,z) = (1, -4,3) + \lambda(3,4,0), \lambda \in \mathbb{R}$$

Assim, as coordenadas de todos os pontos da reta  $r$ , e em particular o ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $ABC$ , para  $\lambda \in \mathbb{R}$ , são da forma:

$$(x,y,z) = (1, -4,3) + \lambda(3,4,0) = (1 + 3\lambda, -4 + 4\lambda, 3 + 0 \times \lambda) = (1 + 3\lambda, -4 + 4\lambda, 3)$$

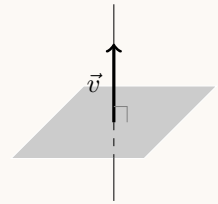
Como o ponto de interseção pertence ao plano  $ABC$  podemos determinar o valor de  $\lambda$  substituindo as coordenadas genéricas do ponto, na equação do plano:

$$3(1 + 3\lambda) + 4(-4 + 4\lambda) - 12 = 0 \Leftrightarrow 3 + 9\lambda - 16 + 16\lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow 25\lambda = -3 + 16 + 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25\lambda = 25 \Leftrightarrow \lambda = \frac{25}{25} \Leftrightarrow \lambda = 1$$

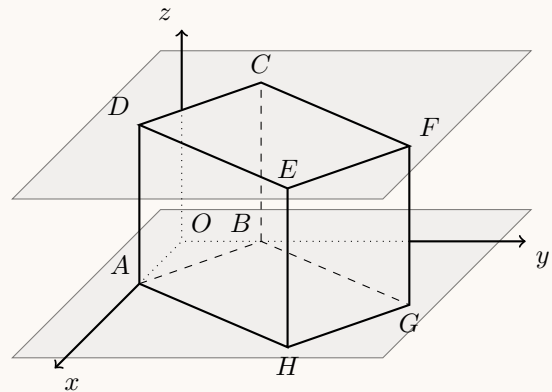
Desta forma temos que as coordenadas do ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $ABC$  são:

$$(1 + 3 \times 1 - 4 + 4 \times 1, 3) = (1 + 3, -4 + 4, 3) = (4,0,3)$$



- 1.3. Para que a terceira coordenada do vetor  $\overrightarrow{XY}$  seja igual a zero, isto é, para que os pontos  $X$  e  $Y$  tenham a mesma cota, como  $[ABCDEFGH]$  é um paralelepípedo retângulo e o vértice  $A$  pertence ao eixo  $Ox$  e o vértice  $B$  pertence ao eixo  $Oy$ , então os pontos  $X$  e  $Y$  pertencem ambos ao plano  $ABG$ , ou pertencem ambos ao plano  $CDE$

Assim, como existem 8 vértices do paralelepípedo, o número de vetores diferentes que podem ser definidos, ou seja o número de casos possíveis, é  ${}^8C_2$



Como em cada um dos 2 grupos de vértices que originam um vetor  $\overrightarrow{XY}$  com cota nula existem 4 vértices, temos que o número de vetores diferentes nas condições do enunciado, ou seja, o número de casos favoráveis, é  $2 \times {}^4C_2$

Assim, recorrendo à Regra de Laplace, calculando a probabilidade e apresentando o resultado na forma de fração irredutível, temos:

$$p = \frac{2 \times {}^4C_2}{{}^8C_2} = \frac{3}{7}$$



2.

2.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno da escola, e os acontecimentos:

$R$ : «O aluno é um rapaz»

$D$ : «O aluno frequenta o décimo ano»

Temos que  $P(R|D) = \frac{3}{5}$ ;  $P(R) = \frac{11}{21}$  e  $P(R \cap D) = \frac{1}{7}$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(D) = \frac{P(R \cap D)}{P(R|D)} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{21}$
- $P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}$
- $P(R \cap \bar{D}) = P(R) - P(D \cap R) = \frac{11}{21} - \frac{1}{7} = \frac{8}{21}$

|           |                 |           |                 |
|-----------|-----------------|-----------|-----------------|
|           | $R$             | $\bar{R}$ |                 |
| $D$       | $\frac{1}{7}$   |           | $\frac{5}{21}$  |
| $\bar{D}$ | $\frac{8}{21}$  |           | $\frac{16}{21}$ |
|           | $\frac{11}{21}$ |           | 1               |

Assim, a probabilidade de o aluno escolhido ser uma rapariga e não frequentar o 10.º ano, na forma de dízima, arredondado às centésimas, é:

$$P(\bar{R} \cap \bar{D}) = P(\bar{D}) - P(R \cap \bar{D}) = \frac{16}{21} - \frac{8}{21} = \frac{8}{21} \approx 0,38$$

2.2. Como o delegado de turma tem de fazer parte da comissão e esta deve incluir rapazes e raparigas, os restantes dois membros devem ser duas raparigas ou um rapaz e uma rapariga.

Como a turma tem 15 raparigas, seleccionando duas delas, temos que existem  ${}^{15}C_2 = 105$  comissões formadas pelo delegado e por mais duas raparigas.

Seleccionando uma das 15 raparigas, e um dos  $26 - 15 - 1 = 10$  rapazes (correspondendo a retirar dos 26 alunos, as 15 raparigas e o delegado que deve integrar a comissão obrigatoriamente), temos que existem  $15 \times 10 = 150$  comissões formadas pelo delegado e por um rapaz e uma rapariga.

Assim, o número de comissões diferentes, que incluam rapazes e raparigas, se podem formar, sabendo-se que o delegado de turma tem de fazer parte da comissão é:

$${}^{15}C_2 + 15 \times 10 = 105 + 150 = 255$$

Resposta: **Opção D**



3.

3.1. Como a caixa contém duas bolas brancas e três bolas pretas, num total de cinco e se retiram-se, ao acaso e em simultâneo, duas bolas da caixa, identificando os valores que a variável  $X$  pode assumir, e calculando as respetivas probabilidades, temos:

- 0 - correspondente à extração de duas bolas pretas;

$$P(X = 0) = \frac{{}^3C_2}{{}^5C_2} = \frac{3}{10}$$

- 1 - correspondente à extração de uma bola branca e outra preta;

$$P(X = 1) = \frac{{}^3C_1 \times {}^2C_1}{{}^5C_2} = \frac{3}{5}$$

- 2 - correspondente à extração de duas bolas brancas;

$$P(X = 2) = \frac{{}^2C_2}{{}^5C_2} = \frac{1}{10}$$

Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória  $X$  é:

|              |                |               |                |
|--------------|----------------|---------------|----------------|
| $x_i$        | 0              | 1             | 2              |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{10}$ |

E assim, o valor médio da variável  $X$ , é:

$$\mu = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{3}{5} + \frac{2}{10} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 0,8$$

Resposta: **Opção B**

3.2. Como o ângulo interno de maior amplitude se opõe ao lado maior do triângulo (concretamente o lado de comprimento 6), podemos calcular o valor de  $\cos \alpha$  recorrendo à Lei dos cossenos:

$$6^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \times \cos \alpha \Leftrightarrow 36 = 25 + 16 - 40 \cos \alpha \Leftrightarrow 40 \cos \alpha = 41 - 36 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{5}{40} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{8}$$

Recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria, como o  $\alpha$  é um ângulo interno de um triângulo, então  $\sin \alpha > 0$ , e assim temos que o valor de  $\sin \alpha$ , arredondado às milésimas, é:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{8}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{64} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{63}{64}} \Rightarrow \sin \alpha \approx 0,992$$

Resposta: **Opção B**

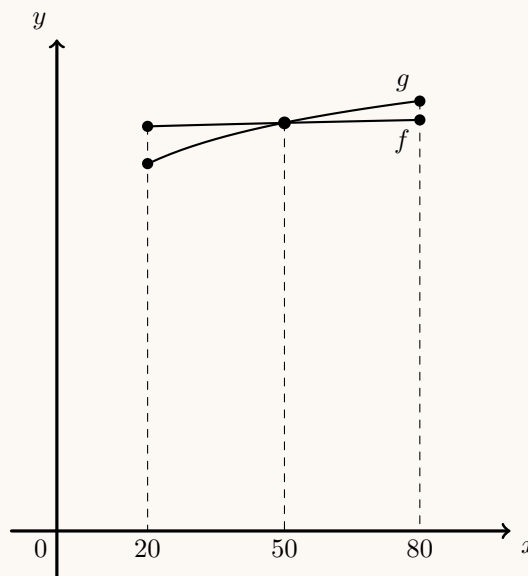


4. Relativamente a um nível de som inicial do despertador, um aumento da respetiva intensidade em  $150 \mu W/m^2$  é representado por  $60 + 10 \log_{10}(I + 150)$  e 1,4% do quadrado do nível inicial é representado por  $0,014 (60 + 10 \log_{10} I)^2$ , pelo que o valor da intensidade inicial do som desse despertador, é a solução da equação:

$$60 + 10 \log_{10}(I + 150) = 0,014 (60 + 10 \log_{10} I)^2$$

Assim, visualizando na calculadora gráfica os gráficos das funções  $f(x) = 60 + 10 \log_{10}(I + 150)$  e  $g(x) = 0,014 (60 + 10 \log_{10} I)^2$ , para  $20 < x < 80$ , reproduzido na figura ao lado, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às unidades) da abcissa do ponto de interseção, ou seja, o valor da intensidade inicial do som desse despertador:

$$50 \mu W/m^2$$



5. Como a função é contínua em  $\mathbb{R}$ , também é contínua em  $x = 1$ , pelo que

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

Temos que  $f(1) = \log_3 k$

E calculando  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ , vem:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Como  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , podemos calcular o valor de  $k$ :

$$\log_3 k = 2 \Leftrightarrow k = 3^2 \Leftrightarrow k = 9$$

Resposta: **Opção D**



6. Como 2,  $a$  e  $b$  são três termos consecutivos de uma progressão geométrica, designado por  $r$  a razão da progressão, temos que:

$$2 \times r = a \Leftrightarrow r = \frac{a}{2}, \text{ e também que } a \times r = b \Leftrightarrow r = \frac{b}{a}$$

E assim, vem que:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow a^2 = 2b$$

Por outro lado, como  $a - 2$ ,  $b$  e 2 são três termos consecutivos de uma progressão aritmética, designado por  $k$  a razão da progressão, temos que:

$$a - 2 + k = b \Leftrightarrow k = b - a + 2, \text{ e também que } b + k = 2 \Leftrightarrow k = 2 - b$$

E assim, vem que:

$$b - a + 2 = 2 - b \Leftrightarrow 2b = a$$

Resolvendo o sistema seguinte, determinamos  $a$  e  $b$ :

$$\begin{cases} a^2 = 2b \\ 2b = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ b = \frac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a = 0 \\ b = \frac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a - 1) = 0 \\ b = \frac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \vee a - 1 = 0 \\ b = \frac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow_{a \neq 0} \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

7. Considerando  $\overline{AB} = \rho$  e o ângulo definido pelo semieixo positivo horizontal e a reta  $AD$  com amplitude  $\theta$ , temos que  $z = \rho e^{i\theta}$

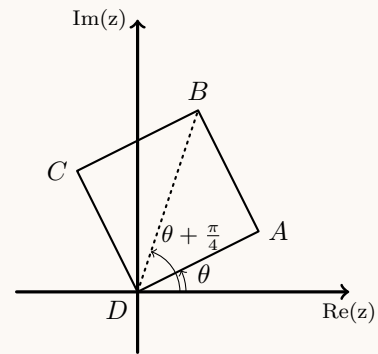
Como  $[ABCD]$  é um quadrado, a diagonal  $\overline{BD} = \rho\sqrt{2}$  e  $\widehat{ADB} = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$ , pelo que o ângulo definido pelo semieixo positivo horizontal e a reta  $BD$  tem amplitude  $\theta + \frac{\pi}{4}$ . Assim, temos que o ponto  $B$  é o afixo do número complexo

$$w = \rho\sqrt{2}e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}$$

Decompondo o número complexo num produto de dois números complexos, vem que:

$$w = \rho\sqrt{2}e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})} = \rho e^{i\theta} \times \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})} = z \times \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = z \times \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = z(1 + i)$$

Resposta: **Opção A**



## Caderno 2

8. Simplificando a expressão de  $w$ , como  $i^7 = i^{4+3} = i^4 \times i^3 = 1 \times (-i) = -i$ , e  $\overline{z_2} = 1 + 2i$ , temos que:

$$\begin{aligned} w &= \frac{3(2 - 3i) - i(1 + 2i)}{1 + (-i)} = \frac{6 - 9i - i - 2i^2}{1 - i} = \frac{6 - 10i - 2(-1)}{1 - i} = \frac{6 - 10i + 2}{1 - i} = \frac{8 - 10i}{1 - i} = \\ &= \frac{(8 - 10i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{8 + 8i - 10i - 10i^2}{1^2 - i^2} = \frac{8 - 2i - 10(-1)}{1 - (-1)} = \frac{8 - 2i + 10}{1 + 1} = \frac{18 - 2i}{2} = 9 - i \end{aligned}$$

Calculando a distância entre os afixos de  $z_1$  e  $w$ , temos:

$$|w - z_1| = |9 - i - (2 - 3i)| = |9 - i - (2 - 3i)| = |9 - i - 2 + 3i| = |7 + 2i| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{49 + 4} = \sqrt{53}$$

Como a distância entre os afixos de  $z_1$  e  $w$  é igual a  $\sqrt{53}$ , o afixo do número complexo  $w$  pertence à circunferência de centro no afixo (imagem geométrica) de  $z_1$  e raio igual a  $\sqrt{53}$



9.

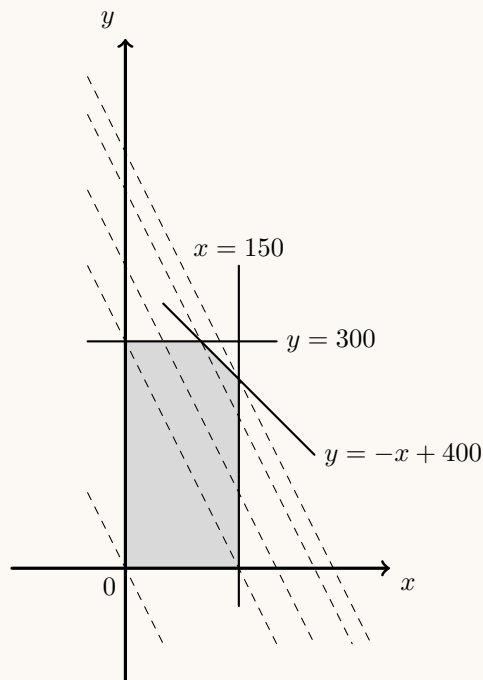
- 9.1. Representando a região admissível, de acordo com as restrições apresentadas, reproduzida na figura ao lado, e retas com o declive igual à reta definida pela função objetivo:

$$L = 2x + y \Leftrightarrow y = L - 2x \Leftrightarrow y = -2x + L$$

Podemos verificar que o máximo é obtido no vértice que resulta da interseção da reta  $x = 150$  com a reta  $y = -x + 400$ , ou seja o ponto de coordenadas  $(150, -150 + 400)$ . Assim, substituindo as coordenadas deste ponto na função objetivo, calculamos o valor máximo que a função objetivo pode alcançar nesta região:

$$L = 2(150) + (-150 + 400) = 300 + 250 = 550$$

Resposta: **Opção C**



- 9.2. Como  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ , então  $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ , e assim:

$$\sin \left( 3 \arccos \frac{1}{2} \right) = \sin \left( 3 \times \frac{\pi}{3} \right) = \sin (\pi) = 0$$

Resposta: **Opção C**

10. Como o ponto  $B$  pertence ao semieixo positivo  $Oy$  e à reta de equação  $y = 2x + 4$ , as suas coordenadas são  $(0,4)$

Como o ponto  $A$  pertence ao semieixo negativo  $Ox$ , tem ordenada nula, pelo que a sua abcissa é:  
 $0 = 2x + 4 \Leftrightarrow -4 = 2x \Leftrightarrow -\frac{4}{2} = x \Leftrightarrow -2 = x$

Assim, as coordenadas do ponto médio,  $M$ , do segmento de reta  $[AB]$ , são:

$$\left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left( \frac{-2 + 0}{2}, \frac{0 + 4}{2} \right) = (-1, 2)$$

Resposta: **Opção B**



11.

11.1. As equações que definem a reta  $r$  podem ser escritas na forma seguinte:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{3-y}{4} = z \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-0}{1}$$

Assim, um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{v} = (2, -4, 1)$ 

Desta forma, de entre as opções apresentadas, o único vetor que pode ser um vetor diretor de uma reta perpendicular à reta  $r$ , por ser perpendicular a um vetor diretor da reta  $r$  (ou seja, o produto escalar entre os dois vetores é nulo), é o vetor  $\vec{c}$ , de acordo com a verificação apresentada a seguir:

- $\vec{a} \cdot \vec{v} = (2, 4, 1) \cdot (2, -4, 1) = 2 \times 2 + 4 \times (-4) + 1 \times 1 = 4 - 16 + 1 = -11$
- $\vec{b} \cdot \vec{v} = (-3, 1, 0) \cdot (2, -4, 1) = -3 \times 2 + 1 \times (-4) + 0 \times 1 = -6 - 4 + 0 = -10$
- $\vec{c} \cdot \vec{v} = (1, 1, 2) \cdot (2, -4, 1) = 1 \times 2 + 1 \times (-4) + 2 \times 1 = 2 - 4 + 2 = 0$
- $\vec{d} \cdot \vec{v} = (-4, 2, 0) \cdot (2, -4, 1) = -4 \times 2 + 2 \times (-4) + 0 \times 1 = -8 - 8 + 0 = -16$

Resposta: **Opção C**

11.2. Calculando o limite da sucessão, temos:

$$\begin{aligned} \lim \left( \left( \frac{n + \ln a}{n} \right)^{n+2} \right) &= \lim \left( \left( \frac{n}{n} + \frac{\ln a}{n} \right)^{n+2} \right) = \lim \left( \left( 1 + \frac{\ln a}{n} \right)^n \times \left( 1 + \frac{\ln a}{n} \right)^2 \right) = \\ &= \lim \left( 1 + \frac{\ln a}{n} \right)^n \times \lim \left( 1 + \frac{\ln a}{n} \right)^2 = e^{\ln a} \times \left( 1 + \frac{\ln a}{+\infty} \right)^2 = a \times (1 + 0)^2 = a \times 1 = a \end{aligned}$$

Resposta: **Opção C**

12.

12.1. Como a função é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  (porque é o quociente de funções contínuas), a reta de equação  $x = 1$  é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de  $h$ . Para averiguar esta hipótese vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$ :

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^{1^-}}{1^- - 1} = \frac{e}{0^-} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^{1^+}}{1^+ - 1} = \frac{e}{0^+} = +\infty$

Logo a reta de equação  $x = 1$  é a única assíntota do gráfico de  $h$  paralela ao eixo das ordenadas.Para averiguar a existência de assíntotas horizontais, vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^{-\infty}}{-\infty - 1} = \frac{0^+}{-\infty} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^{+\infty}}{+\infty - 1} = \frac{+\infty}{+\infty}$  (indeterminação)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)} = \frac{\text{Lim. Notável}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)} = \frac{+\infty}{1 - \frac{1}{+\infty}} = \frac{+\infty}{1 - 0} = +\infty$$

Logo, podemos concluir que a reta de equação  $y = 0$  é assíntota horizontal do gráfico de  $h$ , quando  $x \rightarrow -\infty$  e que não existe qualquer assíntota do gráfico de  $h$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , pelo que a reta  $y = 0$  é a única assíntota do gráfico de  $h$  paralela ao eixo das abcissas.





12.2. Resolvendo a equação, temos:

$$(x-1) \times h(x) + 2e^{-x} = 3 \Leftrightarrow (x-1) \times \frac{e^x}{x-1} + 2 \times \frac{1}{e^x} = 3 \Leftrightarrow_{x \neq 1} e^x + \frac{2}{e^x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{(e^x)^2}{e^x} + \frac{2}{e^x} - \frac{3e^x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow_{e^x \neq 0}$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 + 2 - 3e^x = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

Fazendo a substituição de variável  $y = e^x$ , e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\Leftrightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow y = 1 \vee y = 2$$

Como  $y = e^x$ , temos que:

$$e^x = 1 \vee e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 1 \vee x = \ln 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \ln 2$$

$$\text{C.S.} = \{0, \ln 2\}$$



13.

13.1. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico e a existência de pontos de inflexão, vamos determinar a expressão da segunda derivada, pelo que começamos por determinar  $g'$ :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left( \frac{1}{4} \cos(2x) - \cos x \right)' = \left( \frac{1}{4} \cos(2x) \right)' - (\cos x)' = \frac{1}{4} (\cos(2x))' - (-\sin x) = \\ &= \frac{1}{4} (-(2x)' \sin(2x)) + \sin x = \frac{1}{4} \times (-2) \times \sin(2x) + \sin x = -\frac{1}{2} \sin(2x) + \sin x \end{aligned}$$

Assim, determinando  $g''$ , temos que:

$$\begin{aligned} g''(x) &= (g'(x))' = \left( -\frac{1}{2} \sin(2x) + \sin x \right)' = \left( -\frac{1}{2} \sin(2x) \right)' + (\sin x)' = -\frac{1}{2} (\sin(2x))' + \cos x = \\ &= -\frac{1}{2} ((2x)' \cos(2x)) + \cos x = -\frac{1}{2} \times 2 \times \cos(2x) + \cos x = -\cos(2x) + \cos x \end{aligned}$$



Como os pontos de inflexão são zeros da segunda derivada, vamos determiná-los:

$$\begin{aligned} g''(x) = 0 &\Leftrightarrow -\cos(2x) + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos(2x) \Leftrightarrow x = 2x + 2k\pi \vee x = -2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - 2x = 2k\pi \vee x + 2x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -x = 2k\pi \vee 3x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -2k\pi \vee x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Para  $k = 1$ , vem  $x = -2\pi \vee x = \frac{2\pi}{3}$ , e como  $x \in ]0, \pi[$ , podemos verificar que a única solução da equação é  $x = \frac{2\pi}{3}$

Assim, estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:

Cálculos auxiliares:

|       |      |   |                  |   |       |
|-------|------|---|------------------|---|-------|
| $x$   | 0    |   | $\frac{2\pi}{3}$ |   | $\pi$ |
| $g''$ | n.d. | +   | 0                | -   | n.d.  |
| $g$   | n.d. |  | Pt. I.           |  | n.d.  |

$$\begin{aligned} g''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\cos\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= -\cos \pi + 0 = -(-1) + 0 = 1 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g''\left(\frac{3\pi}{4}\right) &= -\cos\left(2 \times \frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \\ &= -\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} = -0 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0 \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que o gráfico de  $g$ :

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo  $[\frac{2\pi}{3}, \pi[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo  $]0, \frac{2\pi}{3}]$
- tem um ponto de inflexão de abscissa  $\frac{2\pi}{3}$  e cuja ordenada é:

$$\begin{aligned} g\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{1}{4} \cos\left(2 \times \frac{2\pi}{3}\right) - \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{4} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \left(-\cos \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} \left(-\cos \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} + \frac{4}{8} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Ou seja, o ponto de inflexão do gráfico da função tem coordenadas  $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3}{8}\right)$



13.2. Simplificando a expressão da função  $f$ , como  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ,  $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$  e  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ , temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(-x) + g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{4} \cos(2(-x)) - \cos(-x) + \frac{1}{4} \cos\left(2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \\ &= \frac{1}{4} \cos(-2x) - \cos(-x) + \frac{1}{4} \cos(\pi - 2x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{4} \cos(2x) - \cos x + \frac{1}{4} (-\cos(2x)) - \sin x = \\ &= \frac{1}{4} \cos(2x) - \cos x - \frac{1}{4} \cos(2x) - \sin x = -\cos x - \sin x = -\sin x - \cos x \end{aligned}$$

Resposta: **Opção B**

14. Designando por  $a$  a abscissa do ponto  $P$ , temos que as suas coordenadas são  $(a, f(a)) = (a, a^2)$ , e como o declive da reta tangente no ponto  $P$ , é o valor da derivada no ponto e  $(x^2)' = 2x$ , o declive da reta  $r$  é:

$$m_r = f'(a) = 2a$$

Assim, a equação da reta  $r$  é da forma  $y = 2ax + b$ , e substituindo as coordenadas do ponto  $P$  (que pertence à reta) podemos determinar uma expressão para o valor da ordenada na origem:

$$a^2 = 2a \times a + b \Leftrightarrow a^2 = 2a^2 + b \Leftrightarrow a^2 - 2a^2 = b \Leftrightarrow -a^2 = b$$

Ou seja, a equação reduzida da reta  $r$  é da forma  $y = 2ax - a^2$

Designando por  $k$  a abscissa do ponto  $Q$  ( $k < 0$ ), temos que as suas coordenadas são  $(k, f(k)) = (k, k^2)$  e como o declive da reta tangente no ponto  $Q$ , é o valor da derivada no ponto pelo que o declive da reta  $s$  é:

$$m_s = f'(k) = 2k$$

Temos ainda que, como o declive da reta perpendicular é o simétrico do inverso da reta, temos que o declive da reta  $s$  é:

$$m_s = -\frac{1}{2a}$$

Ou seja, temos que:  $2k = -\frac{1}{2a} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2 \times 2a} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4a}$ , pelo que as coordenadas do ponto  $Q$  são

$$(k, k^2) = \left(-\frac{1}{4a}, \left(-\frac{1}{4a}\right)^2\right) = \left(-\frac{1}{4a}, \frac{1}{16a^2}\right)$$

Assim a equação reduzida da reta  $s$  é da forma  $y = -\frac{1}{2a}x + b$  e substituindo as coordenadas do ponto  $Q$  (que pertence à reta) podemos determinar uma expressão para o valor da ordenada na origem:

$$\frac{1}{16a^2} = -\frac{1}{2a} \times -\frac{1}{4a} + b \Leftrightarrow \frac{1}{16a^2} = \frac{1}{8a^2} + b \Leftrightarrow \frac{1}{16a^2} - \frac{1}{8a^2} = b \Leftrightarrow \frac{1}{16a^2} - \frac{2}{16a^2} = b \Leftrightarrow -\frac{1}{16a^2} = b$$

Ou seja, a equação reduzida da reta  $r$  é da forma  $y = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2}$

Determinando as coordenadas do ponto de interseção das retas  $r$  e  $s$ , em particular a ordenada, vem:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ y = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + a^2 = 2ax \\ y + \frac{1}{16a^2} = -\frac{1}{2a}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y + a^2}{2a} = x \\ -2ay - \frac{2a}{16a^2} = x \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{y + a^2}{2a} = -2ay - \frac{2a}{16a^2} \Leftrightarrow \frac{y}{2a} + \frac{a^2}{2a} = -2ay - \frac{2}{16a} \Leftrightarrow \frac{y}{2a} + \frac{a}{2} = -2ay - \frac{1}{8a} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{4y}{8a} + \frac{4a^2}{8a} = -\frac{16a^2y}{8a} - \frac{1}{8a} \Leftrightarrow 4y + 4a^2 = -16a^2y - 1 \Leftrightarrow 4y + 16a^2y = -4a^2 - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4y(1 + 4a^2) = -(1 + 4a^2) \Leftrightarrow 4y = \frac{-(1 + 4a^2)}{1 + 4a^2} \Leftrightarrow_{1+4a^2 \neq 0} 4y = -1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Logo o valor da ordenada do ponto de interseção das retas  $r$  e  $s$  é  $-\frac{1}{4}$ , independentemente do valor de  $a$

