

Exame final nacional de Matemática A (2021, 1.ª fase)

Proposta de resolução



1.

1.1. Como se pretende identificar uma reta perpendicular à reta EF , e os respetivos vetores diretores são perpendiculares, calculamos os produtos escalares entre os vetores diretores das retas de cada uma das hipóteses o vetor diretor da reta EF para encontrar um produtos escalares nulos e assim identificar direções perpendiculares à reta EF :

- $(-3, -2, 2) \cdot (2, -3, 0) = -3 \times 2 + (-2) \times (-3) + 2 \times 0 = -6 + 6 + 0 = 0$
- $(-3, -2, 2) \cdot (0, 3, -3) = -3 \times 0 + (-2) \times 3 + 2 \times (-3) = 0 - 6 - 6 = -12$
- $(-3, -2, 2) \cdot (0, 3, 3) = -3 \times 0 + (-2) \times 3 + 2 \times 3 = 0 - 6 + 6 = 0$
- $(-3, -2, 2) \cdot (2, 0, -3) = -3 \times 2 + (-2) \times 0 + 2 \times (-3) = -6 + 0 - 6 = -12$

Assim, temos que apenas as retas cujas equações são apresentadas nas opções (A) e (C) são perpendiculares à reta EF , pelo que resta verificar a qual das duas retas pertence o ponto E , substituindo as suas coordenadas em cada uma das equações:

$$\begin{aligned} \bullet (7, 2, 15) = (7, -3, 3) + k(2, -3, 0) &\Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7 + 2k \\ 2 = -3 - 3k \\ 15 = 3 + 0 \end{cases} \quad (\text{condição impossível}) \\ \bullet (7, 2, 15) = (7, -10, 3) + k(0, 3, 3) &\Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7 + 0 \\ 2 = -10 + 3k \\ 15 = 3 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7 \\ 12 = 3k \\ 12 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7 \\ 4 = k \\ 4 = k \end{cases} \end{aligned}$$

Ou seja, $(7, 2, 15) = (7, -10, 3) + 4(0, 3, 3)$, pelo que o ponto E pertence à reta definida pela equação $(x, y, z) = (7, -10, 3) + k(0, 3, 3), k \in \mathbb{R}$

Resposta: **Opção C**

- 1.2. Como as diagonais de faces opostas de começamos por determinar a equação do plano ABG , para determinar a ordenada do ponto B :

Como $[ABCDEFGH]$ é um paralelepípedo retângulo e a reta EF é perpendicular ao plano ABG , então o vetor diretor da reta ($\vec{u} = (-3, -2, 2)$), é também um vetor normal do plano, pelo que a equação do plano ABG é da forma:

$$-3x - 2y + 2z + d = 0$$

Como são conhecidas as coordenadas do ponto G $((6, 10, 13))$, podemos determinar o valor de d , substituindo as coordenadas na equação anterior:

$$-3(6) - 2(10) + 2(13) + d = 0 \Leftrightarrow -18 - 20 + 26 + d = 0 \Leftrightarrow d = 12$$

Assim temos que a equação do plano ABG é $-3x - 2y + 2z + 12 = 0$ e como o ponto B pertence ao eixo Oy tem abscissa e cota nulas, pelo que a sua ordenada pode ser obtida a partir da equação do plano ABG :

$$-3(0) - 2y + 2(0) + 12 = 0 \Leftrightarrow -2y + 12 = 0 \Leftrightarrow 12 = 2y \Leftrightarrow \frac{12}{2} = y \Leftrightarrow 6 = y$$

Como as arestas paralelas de faces opostas de um paralelepípedo retângulo são congruentes, podemos calcular a medida do raio da superfície esférica:

$$r = \overline{BD} = \overline{GE} = \sqrt{(7-6)^2 + (2-10)^2 + (15-13)^2} = \sqrt{1^2 + (-8)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 64 + 4} = \sqrt{69}$$

Assim, temos que a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto $B(0, 6, 0)$ e que passa no ponto D , é:

$$(x-0)^2 + (y-6)^2 + (z-0)^2 = (\sqrt{69})^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-6)^2 + z^2 = 69$$

2. Como a circunferência tem raio 3 e está centrada na origem, as coordenadas do ponto A são da forma $(3 \cos \alpha, 3 \sin \alpha)$ e como $[AB]$ é um diâmetro da circunferência as coordenadas do ponto B são da forma $(3 \cos(\alpha + \pi), 3 \sin(\alpha + \pi))$.

Assim, considerando o lado $[BC]$ como a base do triângulo, temos que a altura é $2 \times \overline{OC}$, porque a abscissa do ponto A é simétrica da abscissa dos pontos B e C .

Como α é um ângulo do segundo quadrante, então:

- $\sin \alpha > 0$ e $\sin(\alpha + \pi) < 0$, pelo que:

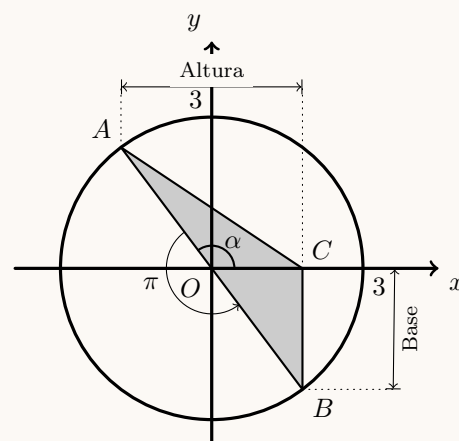
$$\overline{BC} = |3 \sin(\alpha + \pi)| = |-3 \sin \alpha| = 3 \sin \alpha$$

- $\cos \alpha < 0$ e $\cos(\alpha + \pi) > 0$, pelo que:

$$\overline{OC} = |3 \cos(\alpha + \pi)| = |-3 \cos \alpha| = -3 \cos \alpha$$

Assim, temos que a área do triângulo é:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times 2 \times \overline{OC}}{2} = 3 \sin \alpha \times (-3 \cos \alpha) = -9 \sin \alpha \cos \alpha$$



3. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno da escola, e os acontecimentos:

Pt : «O estudante ser português»

R : «O estudante ser um rapaz»

Temos que $P(\bar{R}) = 60\%$ e $P(R \cap \bar{Pt}) = 15\%$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(R) = 100 - P(\bar{R}) = 100\% - 60\% = 40\%$
- $P(Pt \cap R) = 40\% - 15\% = 25\%$

	Pt	\bar{Pt}	
R	25%	15%	40%
\bar{R}			60%
			100%

Assim, a probabilidade de um aluno da escola escolhido, ao acaso, ser português sabendo que era um rapaz, na forma de percentagem, é 62,5%, porque:

$$P(Pt|R) = \frac{P(Pt \cap R)}{P(R)} = \frac{25}{40} = 0,625$$

Resposta: **Opção D**

4. Como os dois condutores são dois dos três dirigentes, existem 3A_2 formas diferentes de selecionar os condutores (a ordem é relevante, porque as viaturas são diferentes).

Como no automóvel, vão dois jogadores de cada sexo, não existe qualquer lugar disponível para o treinador ou para o dirigente que não vai conduzir, pelo que o número de formas diferentes de selecionar os restantes ocupantes do automóvel consiste em contar o número de formas de selecionar 2 dos 5 jogadores do sexo masculino e 2 das 5 jogadoras do sexo feminino, ou seja, ${}^5C_2 \times {}^5C_2$

Assim, temos a contagem do número de condutores e grupos de ocupantes de cada uma das viaturas, pelo que resta ainda ordenar os 4 ocupantes do automóvel e 8 ocupantes da carrinha (à exceção dos condutores) pelos lugares disponíveis em cada viatura, ou seja $P_4 = {}^4A_4 = 4!$ para os lugares do automóvel e $P_8 = {}^8A_8 = 8!$ para os lugares da viatura.

Assim, a uma expressão que dê o número de maneiras diferentes de distribuir os catorze elementos da comitiva pelos catorze lugares disponíveis, é:

$${}^3A_2 \times {}^5C_2 \times {}^5C_2 \times 4! \times 8!$$



5. Como existem 30 alunos na turma e se pretende escolher ao acaso, 5 alunos da turma, o número de grupos diferentes que é possível escolher (sem considerar a ordem relevante), é ${}^{30}C_5$

Temos ainda que:

- O grupo deve integrar o André e a Beatriz que têm ambos 16 anos.
- 60% dos alunos são raparigas, ou seja, $30 \times 0,6 = 18$ raparigas, e $30 - 18 = 12$ rapazes.
- Um terço dos rapazes tem 17 anos a que corresponde $\frac{12}{3} = 4$ rapazes, e existem $12 - 4 = 8$ rapazes com 15 ou 16 anos.
- Um terço das raparigas tem 15 ou 16 anos a que corresponde $\frac{18}{3} = 6$ raparigas, e existem $18 - 6 = 12$ raparigas com 17 anos.

Assim, como o grupo deve ser constituído por dois jovens com 17 anos, e existem 4 rapazes e 12 raparigas, ou seja, $12 - 4 = 8$ no total, existem ${}^{16}C_2$ grupos distintos de 2 alunos com 17 anos.

Relativamente ao aluno de 15 ou 16 que deve integrar o grupo, podemos verificar que existem 8 rapazes e 6 raparigas, ou seja, 14 alunos no total nesta faixa etária, mas como o André e a Beatriz devem integrar o grupo, restam $14 - 2 = 12$ alunos que respeitam esta restrição.

Assim, recorrendo à Regra de Laplace, calculando a probabilidade de selecionar ao caso cinco alunos da turma, o grupo ser formado pelo André, pela Beatriz, por dois jovens com 17 anos e por outro com 15 ou 16 anos, na forma de dízima, arredondado às centésimas, temos:

$$p = \frac{1 \times 1 \times {}^{16}C_2 \times 12}{{}^{30}C_5} \approx 0,01$$

6. Como a sucessão (v_n) é uma progressão geométrica, temos que:

$$v_8 = v_5 \times r \times r \times r \Leftrightarrow 108 = 4 \times r^3 \Leftrightarrow \frac{108}{4} = r^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{27} = r \Leftrightarrow 3 = r$$

E assim, vem que:

$$v_6 = v_5 \times r = 4 \times 3 = 12$$

Resposta: **Opção A**

7. Observando que para as ordens ímpares, temos que $n + 1$ é par, e que por isso, $(-1)^{n+1} = 1$, então os termos de ordem ímpar da sucessão são da forma $u_n = 2 + \frac{1}{n}$

Assim, para que os termos pertençam ao intervalo $\left[\frac{83}{41}, \frac{67}{33}\right]$, temos que:

$$\begin{aligned} 2 + \frac{1}{n} \geq \frac{83}{41} \wedge 2 + \frac{1}{n} \leq \frac{67}{43} &\Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{83}{41} - 2 \wedge \frac{1}{n} \leq \frac{67}{43} - 2 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{83}{41} - \frac{82}{41} \wedge \frac{1}{n} \leq \frac{67}{43} - \frac{66}{43} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{41} \wedge \frac{1}{n} \leq \frac{1}{33} \Leftrightarrow n \leq 41 \wedge n \geq 33 \end{aligned}$$

Como se pretende identificar apenas os termos de ordem ímpar, temos os termos u_{33} ; u_{35} ; u_{37} ; u_{39} e u_{41} , ou seja, o número de termos de ordem ímpar que pertence ao intervalo dado é 5.



8. Calculando o valor de w , temos:

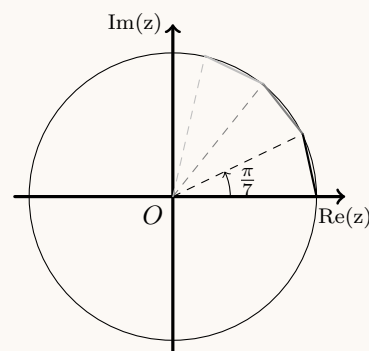
$$w = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{3\pi}{28}}} = \frac{2}{2} e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{28})} = e^{i(\frac{7\pi}{28} - \frac{3\pi}{28})} = e^{i\frac{4\pi}{28}} = e^{i\frac{\pi}{7}}$$

Assim, como o afixo de w é um dos vértices de um polígono regular com centro na origem do referencial e com outro vértice sobre o semieixo real positivo, temos que o polígono regular pode ser decomposto em triângulos isósceles cuja amplitude dos ângulos de vértice no centro é $\frac{\pi}{7}$

Assim, o número mínimo de vértices do polígono, que corresponde ao número de lados, que corresponde ao número de triângulos, é:

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{7}} = \frac{14\pi}{\pi} = 14$$

Resposta: **Opção B**



9. Calculando o produto $z_1 \times z_2$, vem:

$$z_1 \times z_2 = (-3 + 2i) \times (1 + 2i) = -3 - 6i + 2i + 4i^2 = -3 - 4i + 4(-1) = -3 - 4i - 4 = -7 - 4i$$

Simplificando a expressão de w , temos:

$$w = \frac{z_1 \times z_2}{z_3} = \frac{-7 - 4i}{2 - i} = \frac{(-7 - 4i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{-14 - 7i - 8i - 4i^2}{2^2 - i^2} = \frac{-14 + 4 - 15i}{4 + 1} = \frac{-10 - 15i}{5} = 2 - 3i$$

Desta forma, considerando $\theta = \text{Arg}(w)$ temos que:

- $|w| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$
- $\text{tg } \theta = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$; como $\text{sen } \theta < 0$ e $\text{cos } \theta < 0$, θ é um ângulo do 3º quadrante.
- Como $\text{tg} \left(-\frac{3\pi}{4} \right) = 1$, a função tangente é crescente e contínua no intervalo $\left] -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right[$ e $\frac{3}{2} > 1$ então $\theta > -\frac{3\pi}{4}$
- Como θ é um ângulo do 3º quadrante e $\theta > -\frac{3\pi}{4}$, então $\text{Arg}(w) \in \left] -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right[$

10.

10.1. Para averiguar se a função f é contínua em $x = 1$, temos que verificar se $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

- $f(1) = -1^2(1 + 2 \ln 1) = -(1 + 2 \times 0) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2(1 + 2 \ln x)) = -(1^-)^2(1 + 2 \ln 1^-) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5 - 5e^{x-1}}{x^2 + 3x - 4} = \frac{5 - 5e^{1^+-1}}{(1^+)^2 + 3(1^+) - 4} = \frac{5 - 5 \times 1}{1 + 3 - 4} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

(como $x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -4$ então $x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5 - 5e^{x-1}}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5(1 - e^{x-1})}{(x - 1)(x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-5(e^{x-1} - 1)}{(x - 1)(x + 4)} =$$

(fazendo $y = x - 1$, temos $x = y + 1$ e se $x \rightarrow 1^+$, então $y \rightarrow 0^+$)

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-5(e^y - 1)}{y(y + 1 + 4)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^y - 1}{y} \times \frac{-5}{y + 5} \right) = \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^y - 1}{y} \right)}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-5}{y + 5} = 1 \times \frac{-5}{5} = -1$$

Como $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, então a função f é contínua em $x = 1$



10.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f , em $]0,1[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-x^2(1+2\ln x))' = (-x^2)' \times (1+2\ln x) + (-x^2)(1+2\ln x)' = -2x(1+2\ln x) - x^2 \times ((1)'+2(\ln x)') = \\ &= -2x - 4x \ln x - x^2 \left(0 + 2 \times \frac{1}{x}\right) = -2x - 4x \ln x - \frac{2x^2}{x} \underset{x \neq 0}{=} -2x - 4x \ln x - 2x = -4x - 4x \ln x \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada da função f , em $]0,1[$, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -4x - 4x \ln x = 0 \Leftrightarrow -4x(1 + \ln x) = 0 \Leftrightarrow -4x = 0 \vee 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee \ln x = -1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = e^{-1} \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		e^{-1}		1
$-4x$	n.d.	-	-	+	n.d.
$1 + \ln x$	n.d.	-	0	+	n.d.
f'	n.d.	+	0	-	n.d.
f	n.d.	\nearrow	Máx.	\searrow	n.d.

Assim, podemos concluir que a função f :

- é crescente no intervalo $]0, e^{-1}[$;
- é decrescente no intervalo $[e^{-1}, 1[$;
- tem um máximo relativo que é:

$$f(e^{-1}) = -(e^{-1})^2 (1 + 2\ln(e^{-1})) = -e^{-2} \times (1 + 2 \times (-1)) = -e^{-2} \times (-1) = e^{-2}$$

11. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g :

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x \cos x + \sen x)' = (x \cos x)' + (\sen x)' = (x)' \cos x + x(\cos x)' + \cos x = \\ &= \cos x + x(-\sen x) + \cos x = 2 \cos x - x \sen x \end{aligned}$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico num ponto corresponde ao valor da função derivada nesse ponto, mostrar, que existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função g tal que a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive $-\frac{1}{2}$ é equivalente a mostrar que a equação $g'(x) = -\frac{1}{2}$ tem pelo menos uma solução.

Como $g'(x)$ resulta da soma e de produtos de funções contínuas, então é contínua no domínio, ou seja, é contínua em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Como $-\frac{\pi}{2} < -\frac{1}{2} < \frac{3\pi}{2}$, ou seja, $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) < -\frac{1}{2} < g'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ tal que $g'(c) = -\frac{1}{2}$, ou seja, que existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função g tal que a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive $-\frac{1}{2}$

C.A.

$$\begin{aligned} g'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2\cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \times \sen\frac{\pi}{2} = \\ &= 2 \times 0 - \frac{\pi}{2} \times 1 = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= 2\cos\frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} \times \sen\frac{3\pi}{2} = \\ &= 2 \times 0 - \frac{3\pi}{2} \times (-1) = 0 + \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$



12. Como o domínio da função é \mathbb{R}^+ , começamos por determinar o declive da assíntota oblíqua do gráfico de h , quando $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{2x^2 - \ln x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^2)}{x(2x^2 - \ln x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2 - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{2x^2 - \ln x}{x^2}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \right)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x} \right)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = \frac{1}{2 - 0 \times 0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Calculando o valor da ordenada na origem, temos que:

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(h(x) - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(h(x) - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - \ln x} - \frac{x}{2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x(2x^2 - \ln x)}{2(2x^2 - \ln x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 2x^3 + x \ln x}{4x^2 - 2 \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{4x^2 - 2 \ln x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{4x^2 - 2 \ln x}{x \ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{4x^2}{x \ln x} - \frac{2 \ln x}{x \ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{4x}{\ln x} - \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x}}{4x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4} \times \frac{\ln x}{x}} - \frac{2}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4} \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4} \times 0} - \frac{2}{+\infty}} = \frac{1}{\frac{1}{0} - 0} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

Desta forma a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de h , quando $x \rightarrow +\infty$, é:

$$y = \frac{1}{2}x + 0 \Leftrightarrow y = \frac{x}{2}$$

13.

- 13.1. No início do vazamento, ou seja, zero minutos após o início do vazamento ($t = 0$) a altura é do combustível é:

$$a(0) = 1,8 - (0,216 + 0,0039 \times 0)^{\frac{2}{3}} = 1,8 - (0,216)^{\frac{2}{3}} = 1,44$$

Como o depósito tem 1,8 metros de altura (que corresponde ao diâmetro das bases do cilindro), a altura do combustível quando este ocupa metade da capacidade do depósito é $\frac{1,8}{2} = 0,9$

Assim a diferença entre estas alturas, em metros, é $1,44 - 0,9 = 0,54$

Resposta: **Opção B**



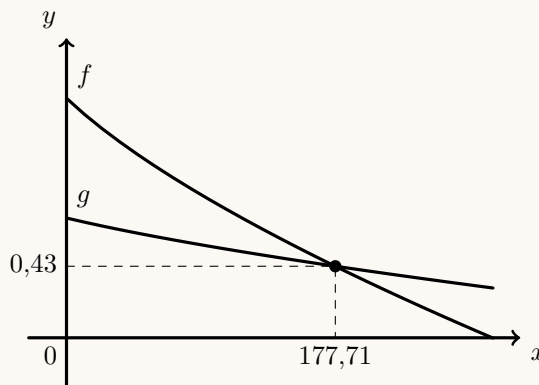
- 13.2. Como após t_1 minutos a altura é $a(t_1)$, quanto tiver passado um período de tempo igual, terão passado $2t_1$ minutos, e pretende-se que, nesse instante, a altura do combustível no depósito seja igual a metade do valor anterior, ou seja, $a(2t_1) = \frac{a(t_1)}{2}$

Assim, o valor de t_1 é a abscissa do ponto de interseção das funções:

- $f(x) = a(2x) = 1,8 - (0,216 + 0,0039 \times 2x)^{\frac{2}{3}}$
- $g(x) = \frac{a(x)}{2} = \frac{1,8 - (0,216 + 0,0039 \times x)^{\frac{2}{3}}}{2}$

Representando na calculadora as funções f e $g(x)$, numa janela compatível com os domínios, obtemos o gráfico representado na figura ao lado.

Recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção dos dois gráficos, obtemos valores aproximados às centésimas da abscissa do ponto de interseção dos dois gráficos: 177,71



Convertendo 2 horas correspondem a $2 \times 60 = 120$ minutos, restam ainda $177,71 - 120 = 57,71$ minutos para além das 2 horas, ou seja, aproximadamente 58 minutos, pelo que o valor de t_1 , em horas e minutos é de:

2 horas e 58 minutos

14. Resolvendo a equação, temos:

$$\begin{aligned} \ln((1-x)e^{x-1}) = x &\Leftrightarrow e^x = (1-x)e^{x-1} \Leftrightarrow e^x = (1-x) \times \frac{e^x}{e} \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x} = \frac{1-x}{e} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 = \frac{1-x}{e} \Leftrightarrow e = 1-x \Leftrightarrow x = 1-e \end{aligned}$$

Determinando o domínio da condição, temos:

$$(1-x)e^{x-1} > 0 \Leftrightarrow_{e^{x-1} > 0} 1-x > 0 \Leftrightarrow -x > -1 \Leftrightarrow x < 1$$

Como $1-e < 1$, temos que $1-e$ é solução da equação.

$$\text{C.S.} = \{1-e\}$$



15. Determinando as abscissas dos pontos de interseção temos:

$$\begin{aligned}
 f(x) = g(x) &\Leftrightarrow k \operatorname{sen}(2x) = k \cos x \Leftrightarrow k \operatorname{sen}(2x) = k \cos x \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x = \frac{k \cos x}{k} \Leftrightarrow_{k \neq 0} \\
 &\Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x = \cos x \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2 \operatorname{sen} x - 1) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 2 \operatorname{sen} x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k, \quad k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Atribuindo os valores -1 e 0 obtemos as três soluções da equação que pertencem ao domínio das funções $\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right)$:

$$x = -\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{2}$$

Assim, podemos determinar as ordenadas dos pontos de interseção:

- $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = k \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = k \times 0 = 0 \quad \left(A\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \right)$
- $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = k \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = k \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{k\sqrt{3}}{2} \quad \left(B\left(\frac{\pi}{6}, \frac{k\sqrt{3}}{2}\right) \right)$
- $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = k \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = k \times 0 = 0 \quad \left(C\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \right)$

Como o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B , temos que $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0$

Calculando as coordenadas dos vetores indicados, temos:

- $\vec{BA} = A - B = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) - \left(\frac{\pi}{6}, \frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{3\pi}{6} - \frac{\pi}{6}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{4\pi}{6}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\vec{BC} = C - B = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - \left(\frac{\pi}{6}, \frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{3\pi}{6} - \frac{\pi}{6}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{2\pi}{6}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{3}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)$

E assim, calculamos o valor de k :

$$\begin{aligned}
 \vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0 &\Leftrightarrow \left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{3}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} \times \frac{\pi}{3} + \left(-\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(-\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -\frac{2\pi^2}{9} + \left(-\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{2\pi^2}{9} + \frac{k^2 \times 3}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{3k^2}{4} = \frac{2\pi^2}{9} \Leftrightarrow k^2 = \frac{2\pi^2 \times 4}{9 \times 3} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow k^2 = \frac{8\pi^2}{27} \Leftrightarrow_{k > 0} k = \sqrt{\frac{8\pi^2}{27}} \Leftrightarrow k = \sqrt{\frac{8}{27}}\pi
 \end{aligned}$$

