Exame final nacional de Matemática A **(2021, 2.ª fase)**

Proposta de resolução

1.

1.1. Como a superfície esférica tem centro no ponto R e contém o ponto Q, o comprimento do raio é:

$$r = \overline{RQ} = \sqrt{(-5-(-2))^2+(5-1)^2+(-3-1)^2} = \sqrt{(-5+2)^2+4^2+(-4)^2} =$$

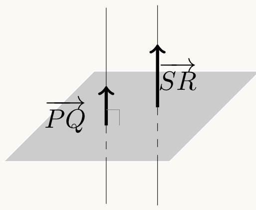
$$= \sqrt{(-3)^2+16+16} = \sqrt{9+32} = \sqrt{41}$$

Como as coordenadas do centro são $(-5,5,-3)$, a equação da superfície esférica é:

$$(x-(-5))^2+(y-5)^2+(z-(-3))^2 = \left(\sqrt{41}\right)^2 \Leftrightarrow (x+5)^2+(y-5)^2+(z+3)^2 = 41$$

Resposta: **Opção C**

1.2. Como $[PQRS]$ é um trapézio de bases $[PQ]$ e $[RS]$, as retas PQ e RS são paralelas. Assim, o plano perpendicular à reta RS também é perpendicular à reta PQ, pelo que o vetor $\overrightarrow{PQ}$ é um vetor normal do plano pretendido.



$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-2,1,1) - (1,-1,2) = (-2-1,1-(-1),1-2) = (-3,2,-1)$

Logo a equação do plano é da forma:

$$-3x+2y-z+d=0$$

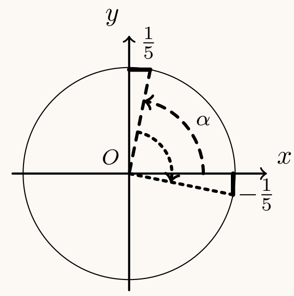
E como o ponto P pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo as coordenadas, na equação anterior:

$$-3(1)+2(-1)-(2)+d=0 \Leftrightarrow -3-2-2+d=0 \Leftrightarrow -7+d=0 \Leftrightarrow d=7$$

E assim, plano perpendicular à reta RS e que contém o ponto P, é:

$$-3x+2y-z+7=0$$

2. Representando no círculo trigonométrico um ângulo de amplitude $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, tal que, $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{5}$ (como na figura ao lado), podemos verificar que $\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha$, ou seja, $\cos\alpha = -\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$



E, pela fórmula fundamental da trigonometria, vem:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \frac{1}{24} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{24}{25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{\frac{24}{25}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{\sqrt{24}}{5} \underset{\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[}{\Leftrightarrow} \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{24}}{5}$$

Logo, podemos calcular o valor de $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{24}}{5}}{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{24}}{1} = \sqrt{24}$$

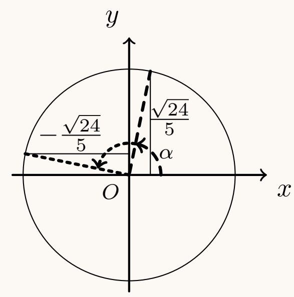
E, como $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\beta - \pi)$ e $\operatorname{tg}(-\beta) = -\operatorname{tg}\beta$, temos que:

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \operatorname{tg}(\pi - \alpha - \pi) = \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{24}$$

Como $\cos\beta = \cos(\beta + 2\pi)$, logo $\cos\beta = \cos(\beta + 4\pi)$, e assim, temos que:

$$\cos\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha + 4\pi\right) =$$

$$= \cos\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha + \frac{8\pi}{2}\right) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$



Representando no círculo trigonométrico um ângulo de amplitude $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, tal que, $\cos\alpha = \frac{1}{5}$ (como na figura ao lado), podemos verificar que:

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{24}}{5}$$

E assim, temos que:

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)+2\cos\left(-\frac{7\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha+2\left(-\operatorname{sen}\alpha\right) = -\sqrt{24}+2\times\left(-\frac{\sqrt{24}}{5}\right) = -\frac{5\sqrt{24}}{5} - -\frac{2\sqrt{24}}{5} = \frac{-7\sqrt{24}}{5}$$

3.

3.1. Como existem 12 raquetes distintas e se pretende escolher ao acaso, um conjunto de 6 (ficando as restantes 6 no segundo conjunto),o número de conjuntos diferentes que é possível escolher (sem considerar a ordem relevante), é ${}^{12}C_6$

Temos ainda que, como se pretende que este conjunto ficar com 3 raquetes de badmínton (das 6 existentes) e 3 raquetes de ténis (das 6 existentes), ficando o restante conjunto com a mesma composição, o número de casos favoráveis é ${}^6C_3 \times {}^6 C_3$

Assim, a probabilidade dos dos dois conjuntos ficar com três raquetes de badmínton e três raquetes de ténis, é:

$$\frac{{}^6C_3 \times {}^6 C_3}{{}^{12}C_6} \approx 0{,}43$$

Resposta: **Opção B**

3.2. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um sócio do clube, e os acontecimentos:
M:≪O sócio é uma Mulher≫
B:≪O sócio pratica badmínton≫

Temos que $P\left(M\right) = 0{,}65$; $P\left(B|\overline{M}\right) = \frac{1}{7}$ e $P\left(M|B\right) = \frac{5}{6}$

Assim, considerando $P\left(B\right) = k$ e organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{M}\right) = 1 - P(M) = 1 - 0{,}54 = 0{,}35$
- $P\left(M \cap B\right) = P(B) \times P\left(M|Q\right) = k \times \frac{5}{6} = \frac{5k}{6}$
- $P\left(\overline{M} \cap B\right) = P\left(\overline{M}\right) \times P\left(B|\overline{M}\right) = 0{,}35 \times \frac{1}{7} = 0{,}05$

	B	$\overline{B}$	
M	$\frac{5k}{6}$		0,65
$\overline{M}$	0,05		0,35
	k		1

Logo, temos que:

$$P(B) = P\left(M \cap B\right) + P\left(\overline{M} \cap B\right) \Leftrightarrow k = \frac{5k}{6} + 0{,}05 \Leftrightarrow \frac{6k}{6} - \frac{5k}{6} = 0{,}05 \Leftrightarrow \frac{k}{6} = 0{,}05 \Leftrightarrow k = 0{,}3$$

Assim, temos que:

$$P(M \cap B) = \frac{5k}{6} \underset{k=0{,}3}{=} \frac{5 \times 0{,}3}{6} = 0{,}25$$

Logo, a probabilidade de o sócio escolhido ser uma mulher que pratica ténis, na forma de percentagem, é 40%, é:

$$P\left(M \cap \overline{B}\right) = P(M) - P\left(M \cap B\right) = 0{,}65 - 0{,}25 = 0{,}4$$

4. Como os pontos pertencem a duas retas, os 5 pontos da reta r são colineares, pelo que nenhum conjunto de 3 destes pontos define um triângulo, assim como acontece para os n pontos da reta s.

   Desta forma, para definir um triângulo com 3 destes pontos é necessário selecionar 2 pontos da reta r e 1 ponto da reta r (${}^5C_2 \times {}^n C_1$ triângulos distintos deste tipo), ou em alternativa, selecionar 1 ponto da reta r e 2 pontos da reta r (${}^5C_1 \times {}^n C_2$ triângulos distintos deste tipo).

   Como é possível definir exatamente 175 triângulos, temos que:

$$ {}^5C_2 \times {}^n C_1 + {}^5 C_1 \times {}^n C_2 = 175 $$

   Resolvendo a equação anterior, determinamos o valor de n:

$$ {}^5C_2 \times {}^n C_1 + {}^5 C_1 \times {}^n C_2 = 175 \Leftrightarrow \frac{5!}{2!3!} \times n + \frac{n!}{2!(n-2)!} \times 5 = 175 \Leftrightarrow $$

$$ \Leftrightarrow \frac{5 \times 4 \times 3!}{2!3!} \times n + \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2!(n-2)!} \times 5 = 175 \Leftrightarrow \frac{5 \times 4 \times n}{2!} + \frac{n \times (n-1) \times 5}{2!} = 175 \Leftrightarrow $$

$$ \Leftrightarrow \frac{20n}{2} + \frac{(n^2-n) \times 5}{2} = 175 \Leftrightarrow 20n + 5n^2 - 5n = 350 \Leftrightarrow 5n^2 + 15n - 350 = 0 \Leftrightarrow n = 7 \vee n = -10 $$

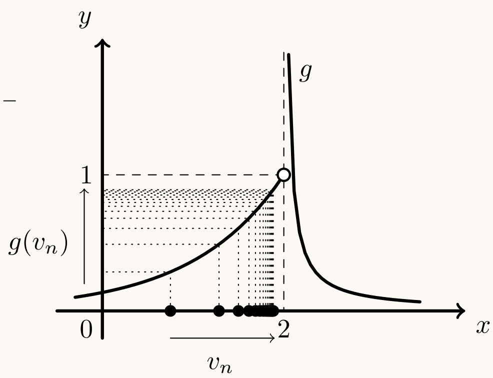
   Como n é o número de ponto marcados sobre a reta s, então $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $n = 7$

5. Temos que:

$$ \lim (v_n) = \lim \left(2 - \frac{5}{n+3}\right) = 2 - \frac{5}{+\infty + 3} = 2 - \frac{5}{+\infty} = 2 - 0^+ = 2^- $$

   Então vem que:

$$ \lim g(v_n) = \lim_{x \to 2^-} g(x) = 1 $$



   Resposta: **Opção B**

6. De acordo com a enunciado temos que:

   - $u_6 + u_{20} = -5$
   - $u_{19} = 4 \times u_7$

   Assim, resolvendo o sistema seguinte, usando a expressão to termo geral de uma progressão aritmética ($u_n = u_1 + r(n-1)$), determinamos o valor do primeiro termo (u_1) e da razão (r) da progressão:

$$\begin{cases} u_6 + u_{20} = -5 \\ u_{19} = 4 \times u_7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + r(6-1) + u_1 + r(20-1) = -5 \\ u_1 + r(19-1) = 4\big(u_1 + r(7-1)\big) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 5r + 19r = -5 \\ u_1 + 18r = 4u_1 + 4 \times 6r \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 24r = -5 \\ u_1 + 18r = 4u_1 + 24r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 24r = -5 \\ 18r - 24r = 4u_1 - u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 24r = -5 \\ -6r = 3u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 24r = -5 \\ -\frac{6}{3}r = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2r) + 24r = -5 \\ -2r = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4r + 24r = -5 \\ -2r = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20r = -5 \\ -2r = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{5}{20} \\ -2r = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{1}{4} \\ -2\left(-\frac{1}{4}\right) = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{1}{4} \\ \frac{2}{4} = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{1}{4} \\ u_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

   Assim, temos que a soma dos dezasseis primeiros termos desta progressão, S_{16}, é:

$$S_{16} = \frac{u_{16} + u_1}{2} \times 16 = \frac{\frac{1}{2} + 15\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}}{2} \times 16 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{15}{4}}{2} \times 16 =$$

$$= \left(1 - \frac{15}{4}\right) \times 8 = 8 - \frac{15 \times 8}{4} = 8 - 15 \times 2 = 8 - 30 = -22$$

7. Como $z \times w = i \Leftrightarrow w = \frac{i}{z}$, logo temos que uma expressão do número complexo w, é:

$$w = \frac{i}{z} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\frac{3\pi}{5}}} = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{5}\right)} = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{10} - \frac{6\pi}{10}\right)} = \frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{10}\right)}$$

   Assim, como $\arg(w) = -\frac{\pi}{10}$, temos que $-\frac{\pi}{10} + 2\pi$ também é um argumento do número complexo w, ou seja:

$$\arg(w) = -\frac{\pi}{10} + 2\pi = -\frac{\pi}{10} + \frac{20\pi}{10} = \frac{19\pi}{10}$$

   Resposta: **Opção A**

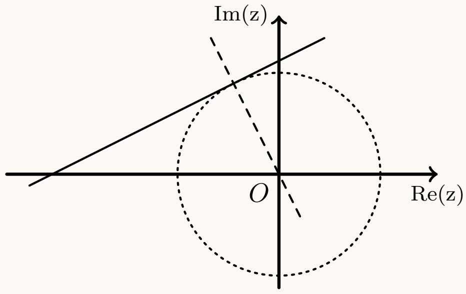
8. Considerando cada pontos do plano complexo na forma $z = x + yi$, temos que os pontos da reta são da forma:

$$(1+2i)(x+yi)+(1-2i)(x-yi)+10=0 \Leftrightarrow x+yi+2xi+2yi^2+x-yi-2xi+2yi^2+10=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x+2y(-1)+2y(-1)+10=0 \Leftrightarrow 2x-2y-2y+10=0 \Leftrightarrow 2x-4y+10=0 \Leftrightarrow x-2y+5=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+5=2y \Leftrightarrow \frac{x}{2}+\frac{5}{2}=y$$

Assim, de todos os números complexos cujos afixos pertencem a esta reta, o que tem menor módulo, ou seja, o que está mais próximo da origem do plano complexo, é o ponto de tangência da circunferência tangente à reta e que passa na origem, ou seja a interseção com a reta perpendicular à dada que contém a origem.



Relativamente à reta perpendicular, sabemos que o declive é o simétrico do inverso do declive da reta dada e que a ordenada na origem é nula (porque contém a origem), ou seja, é definida por:

$$y = -\frac{1}{\frac{1}{2}}x + 0 \Leftrightarrow y = -2x$$

Desta forma, as coordenadas do ponto de interseção das duas retas no plano complexo, ou seja, o afixo do número complexo pretendido são:

$$\begin{cases} 2y = x+5 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2x) = x+5 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - x = 5 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x = 5 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{5} \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Desta forma temos que o número complexo cujo afixo está sobre a reta e que tem menor módulo é $-1+2i$

9.

9.1. Como o domínio da função é $\mathbb{R}$, podem existir assíntotas horizontais do gráfico de f quando $x \to -\infty$ e quando $x \to +\infty$:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - e^{-x}}{x} = \dfrac{-\infty - e^{-(-\infty)}}{-\infty} = \dfrac{-\infty - e^{+\infty}}{-\infty} = \dfrac{-\infty - \infty}{-\infty} = \dfrac{-\infty}{-\infty}$ (Indeterminação)

  (fazendo $y = -x$, temos $x = -y$ e se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{y \to +\infty} \frac{-y - e^{-(-y)}}{-y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{-y - e^{y}}{-y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y + e^{y}}{y} = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{y}{y} + \frac{e^y}{y} \right) =$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{y} + \underbrace{\lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 1 + (+\infty) = +\infty$$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3 \right) = \dfrac{\sqrt{(+\infty)^2+1}}{+\infty+1} - 3 = \dfrac{\sqrt{+\infty}}{+\infty} - 3 = \dfrac{+\infty}{+\infty} - 3$ (Indeterminação)

  (Como $x \to +\infty$ então $x > 0$ e assim, temos que $\sqrt{x^2} = x$)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3 \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3 = -3 + \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} =$$

$$= -3 + \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = -3 + \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = -3 + \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} =$$

$$= -3 + \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{(+\infty)^2}}}{1 + \frac{1}{+\infty}} = -3 + \frac{\sqrt{1+0}}{1+0} = -3 + 1 = -2$$

Desta forma temos que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ e que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$, pelo que não existe assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \to -\infty$ e $y = -2$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f, observada quando $x \to +\infty$

9.2. Para calcular o declive da reta tangente, no ponto de abcissa -2 começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x < 0$:

$$f'(x) = \left(\frac{x - e^{-x}}{x}\right)' = \frac{(x - e^{-x})' \times x - (x - e^{-x})(x)'}{x^2} = \frac{(x - e^{-x})' \times x - (x - e^{-x})(x)'}{x^2} =$$

$$= \frac{\big((x) - (e^{-x})'\big) \times x - (x - e^{-x}) \times 1}{x^2} = \frac{\big(1 - (-x)'e^{-x}\big) \times x - x + e^{-x}}{x^2} = \frac{\big(1 + e^{-x}\big)x - x + e^{-x}}{x^2}$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa -2 é:

$$m = f'(-2) = \frac{\big(1 + e^{-(-2)}\big)(-2) - (-2) + e^{-(-2)}}{(-2)^2} = \frac{\big(1 + e^2\big)(-2) + 2 + e^2}{4} =$$

$$= \frac{-2 - 2e^2 + 2 + e^2}{4} = \frac{-2e^2 + e^2}{4} = -\frac{e^2}{4}$$

Logo a equação da reta tangente é da forma $y = -\frac{e^2}{4}x + b$

Como $f(-2) = \frac{-2 - e^{-(-2}}{-2} = \frac{-2 - e^2}{-2} = 1 + \frac{e^2}{2}$, sabemos que o ponto $P\left(-2{,}1 + \frac{e^2}{3}\right)$ pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.
Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de b:

$$1 + \frac{e^2}{2} = -\frac{e^2}{4} \times (-2) + b \Leftrightarrow 1 + \frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{2} + b \Leftrightarrow 1 + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} = b \Leftrightarrow 1 = b$$

Pelo que a equação da reta tangente é:

$$y = -\frac{e^2}{4}x + 1$$

10. Começamos por determinar a expressão da derivada da função h:

$$h'(x) = \left(\operatorname{sen} x + \cos^2 x\right)' = \left(\operatorname{sen} x\right)' + \left(\cos x \times \cos x\right)' = \cos x + (\cos x)' \times \cos x + \cos(x) \times (\cos x)' =$$

$$= \cos x + (-\operatorname{sen} x) \times \cos x + \cos(x) \times (-\operatorname{sen} x) = \cos x - 2\operatorname{sen} x \cos x = \cos x(1 - 2\operatorname{sen} x)$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função $\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$, vem:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x(1 - 2\operatorname{sen} x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 1 - 2\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee -2\operatorname{sen} x = -1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

Como $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, temos:

- $\cos x > 0$, pelo que $\cos x = 0$ é uma condição impossível
- $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

Assim, temos que $h'(x)$ tem um zero em $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ e estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	$+$	$+$	$+$	$+$	n.d.
$1 - 2\operatorname{sen} x$	$+$	$+$	0	$-$	n.d.
h'	$+$	$+$	0	$-$	n.d.
h	min.	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	n.d.

Assim, podemos concluir que a função h:

- é crescente no intervalo $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right[$;
- tem um minimo relativo para $x = 0$, cujo valor é:

$$h(0) = \operatorname{sen} 0 + \cos^2 0 = 0 + (1)^2 = 0 + 1 = 1$$

- tem um máximo relativo para $x = \frac{\pi}{6}$, cujo valor é:

$$h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

11.

11.1. Como no instante t_1 a temperatura da substância foi 30°C, temos que:

$$T(t_1) = 30 \Leftrightarrow 20 + 100e^{-k.t_1} = 30 \Leftrightarrow 100e^{-k.t_1} = 30 - 20 \Leftrightarrow e^{-k.t_1} = \frac{10}{100} \Leftrightarrow e^{-k.t_1} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{10}\right) = -k.t_1 \Leftrightarrow k.t_1 = -\ln\left(\frac{1}{10}\right) \Leftrightarrow k = \frac{-(\ln 1 - \ln 10)}{t_1} \Leftrightarrow k = \frac{-0 + \ln 10}{t_1} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 10}{t_1}$$

Resposta: **Opção C**

11.2. Determinando a taxa média de variação da função T relativa aos primeiros t_2 minutos, ou seja, no intervalo $[0,t_2]$, temos:

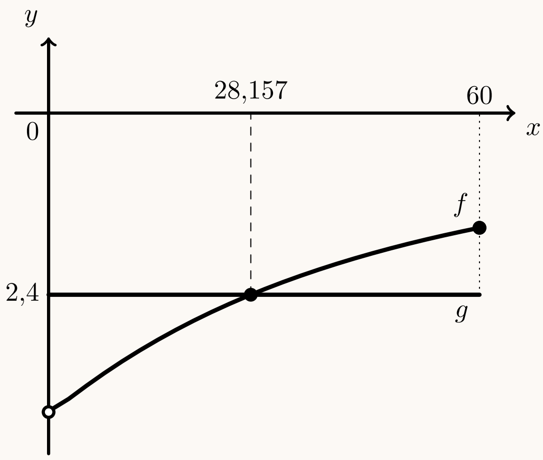
$$TMV_{[0,t_2]} = \frac{T(t_2) - T(0)}{t_2 - 0} = \frac{20 + 100e^{-0,04t_2} - \left(20 + 100e^{-0,04\times 0}\right)}{t_2} = \frac{20 + 100e^{-0,04t_2} - 20 - 100e^{0})}{t_2} =$$

$$= \frac{100e^{-0,04t_2} - 100 \times 1}{t_2} = \frac{100e^{-0,04t_2} - 100}{t_2}$$

Assim, como durante os primeiros t_2 minutos, a taxa média de variação da função T foi igual a $-2{,}4$, o valor de t_2 é a solução da equação:

$$\frac{100e^{-0,04t_2} - 100}{t_2} = -2{,}4$$

Desta forma, visualizando na calculadora gráfica os gráficos das funções $f(x) = \dfrac{100e^{-0,04x} - 100}{x}$ e $g(x) = -2{,}4$, para $0 < x \leq 60$, reproduzido na figura ao lado, e usando a funcionalidade da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às milésimas) das coordenadas do ponto de interseção, cuja abcissa é o valor de t_2:



$$(28{,}157 \quad -2{,}4)$$

Assim temos que o instante $t_2 \approx 28{,}157$, e como 0,157 minutos corresponde a $0{,}157 \times 60 \approx 9$ temos que o instante t_2 ocorreu aos 28 minutos e 9 segundos.

12. Determinando os limites laterais, temos:

- $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{x^3 - x}{x^2 - x} + k\right) = \dfrac{0}{0} + k$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{x^3 - x}{x^2 - x} + k\right) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{x(x^2 - 1)}{x(x-1)} + k\right) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} + k\right) = \frac{0 - 1}{0 - 1} + k = 1 + k$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (2 + x\ln x) = 2 + 0 \times (-\infty)$ (Indeterminação)

(considerando $y = \dfrac{1}{x}$, temos $x = \dfrac{1}{y}$ e se $x \to 0^+$, então $y \to +\infty$)

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{y\to +\infty} \left(2 + \frac{1}{y}\ln\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to +\infty} \left(2 + \frac{\ln\frac{1}{y}}{y}\right) = \lim_{y\to +\infty} \left(2 + \frac{\ln 1 - \ln y}{y}\right) =$$

$$= \lim_{y\to +\infty} \left(2 + \frac{0 - \ln y}{y}\right) = \lim_{y\to +\infty} \left(2 - \frac{\ln y}{y}\right) = \lim_{y\to +\infty} 2 - \underbrace{\lim_{y\to +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 - 0 = 2$$

Como $0 \notin D_g$, e existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, então os limites laterais são iguais, o que permite determinar o valor de k:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) \Leftrightarrow 1 + k = 2 \Leftrightarrow k = 2 - 1 \Leftrightarrow k = 1$$

13. Determinando o domínio da condição, temos:

$$1 - x > 0 \ \wedge \ 3 - 2x > 0 \ \Leftrightarrow \ -x > -1 \ \wedge \ -2x > -3 \ \Leftrightarrow \ x < 1 \ \wedge \ x < \frac{3}{2} \ \Leftrightarrow \ x < 1$$

Resolvendo a equação, temos:

$$x\ln(1-x) - \ln(1-x) = (1-x)\ln(3-2x) \ \Leftrightarrow \ \ln(1-x)\big(x-1\big) = -(x-1)\ln(3-2x) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \ln(1-x) = -\frac{(x-1)\ln(3-2x)}{x-1} \ \wedge \ \underbrace{x - 1 \neq 0}_{\text{Cond. universal no domínio}} \ \Leftrightarrow \ \ln(1-x) = -\ln(3-2x) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \ln(1-x) + \ln(3-2x) = 0 \ \Leftrightarrow \ \ln(1-x) + \ln(3-2x) = 0 \ \Leftrightarrow \ \ln\Big((1-x)(3-2x)\Big) = 0 \ \Leftrightarrow$$

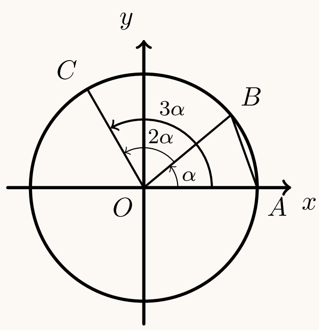
$$\Leftrightarrow \ (1-x)(3-2x) = e^0 \ \Leftrightarrow \ 3 - 2x - 3x + 2x^2 = 1 \ \Leftrightarrow \ 2x^2 - 5x + 2 = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(2)}}{2 \times 2} \ \Leftrightarrow \ x = \frac{1}{2} \ \vee \ \underbrace{x = 2}_{\text{Cond. impossível no domínio}}$$

C.S.= $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

14. Designado a amplitude do ângulo AOBpor α,temos que:

- $A\hat{O}B = \alpha$
- $B\hat{O}C = 2 \times A\hat{O}B = 2\alpha$
- $A\hat{O}C = A\hat{O}B + B\hat{O}C = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$



Como o triângulo $[AOB]$ tem área k, considerando o lado $[OA]$ como a base, temos que a altura é $\operatorname{sen}\alpha$, pelo que:

$$A_{[AOB]} = k \ \Leftrightarrow \ \frac{\overline{OA} \times \operatorname{sen}\alpha}{2} = k \ \Leftrightarrow \ 1 \times \operatorname{sen}\alpha = 2k \ \Leftrightarrow \ \operatorname{sen}\alpha = 2k$$

E assim, vem que:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \ \Leftrightarrow \ (2k)^2 + \cos^2\alpha = 1 \ \Leftrightarrow \ \cos^2\alpha = 1 - 4k^2$$

Como a ordenada do ponto C é $\operatorname{sen}(3\alpha)$, e como:

- $\operatorname{sen}(3\alpha) = \operatorname{sen}(2\alpha + \alpha)$
- $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$
- $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

Então, vem que:

$$y_C = \operatorname{sen}(3\alpha) = \operatorname{sen}(2\alpha + \alpha) =$$
$$= \operatorname{sen}(2\alpha)\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos(2\alpha) =$$
$$= 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \times \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\big(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\big) =$$
$$= 2\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha + 2k \times \big(1 - 4k^2 - (2k)^2\big) =$$
$$= 2 \times 2k \times (1 - 4k^2) + 2k(1 - 4k^2 - 4k^2) =$$
$$= 4k(1 - 4k^2) + 2k(1 - 8k^2) =$$
$$= 4k - 16k^3 + 2k - 16k^3 =$$
$$= 6k - 32k^3$$