

Exame final nacional de Matemática A (2022, 2.ª fase)

Proposta de resolução



1. De entre as opções apresentadas, a única que representa o gráfico de uma função com um mínimo em $x = 0$ é a opção (C), porque nas restantes opções existem valores de a , pertencentes ao domínio da função, tais que $f(a) > f(0)$

Resposta: **Opção C**

2. Como a soma de todos os elementos da linha n do triângulo de Pascal é 2^n , sabemos que: $2^n = 16\,384$ e como $2^{14} = 16\,384$ temos que $n = 14$

Assim, o quarto elemento da linha seguinte ($n + 1 = 15$), é ${}^{15}C_3 = 455$

Resposta: **Opção B**

3. Considerando a experiência aleatória que consiste analisar o passageiro que saiu em primeiro lugar do avião, e os acontecimentos:

A : «O passageiro já tinha viajado de avião»

F : «O passageiro já tinha estado em Faro»

Temos que $P(\bar{A}) = 0,7 = \frac{7}{10}$, $P(F) = \frac{2}{5}$ e $P(A|F) = \frac{1}{2}$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$
- $P(A \cap F) = P(F) \times P(A|F) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
- $P(\bar{A} \cap F) = P(F) - P(A \cap F) = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$
- $P(\bar{A} \cap \bar{F}) = P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap F) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$
- $P(\bar{F}) = 1 - P(F) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

	A	\bar{A}	
F	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
\bar{F}		$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$
	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	1

Assim, a probabilidade de esta ter sido a primeira viagem de avião do passageiro, ou seja, nunca ter viajado de avião, do qual sabemos que nunca tinha estado em Faro, na forma de fração irredutível, é:

$$P(\bar{A}|\bar{F}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{6}$$

4. Calculando o número de grupos ordenados dos 3 cartões azuis, temos ${}^3A_3 = P_3 = 3!$ hipóteses para dispor os 3 cartões azuis em posições adjacentes.

E por cada grupo de cartões azuis, existem ${}^{10}A_{10} = P_{10} = 10!$ ordenações possíveis dos 12 cartões, correspondendo à disposição dos 9 cartões de outras cores e do grupo de cartões azuis, considerando a ordenação relevante.

Assim, o número casos favoráveis (disposições com os cartões azuis em posições adjacentes) é $3! \times 10!$ e o número de casos possíveis (todas as disposições dos 12 cartões) é ${}^{12}A_{12} = P_{12} = 12!$, pelo que, recorrendo à Regra de Laplace, calculando a probabilidade de de os cartões azuis ficarem todos juntos, na forma de fração irredutível, é:

$$p = \frac{3! \times 10!}{12!} = \frac{1}{22}$$

5.

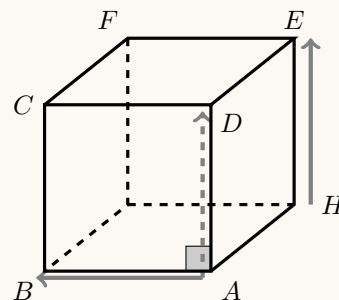
- 5.1. Como $[ABCDEFGH]$ é um cubo, as arestas têm o mesmo comprimento e são todas paralelas ou perpendiculares entre si.

Em particular as arestas $[AD]$ e $[HE]$ são paralelas, e $\vec{AD} = \vec{HE}$

Assim, como as arestas $[AD]$ e $[AB]$ são perpendiculares, temos que:

$$\vec{AB} \cdot \vec{HE} = \vec{AB} \cdot \vec{AD} = \cos(90^\circ) \times \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AD}\| = 0 \times \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AD}\| = 0$$

Resposta: **Opção B**



- 5.2. Como o ponto E pertence ao plano ADE , e o vetor \vec{AB} é um vetor normal do plano, as coordenadas do vetor \vec{AB} são:

$$\vec{AB} = B - A = (1, -1, 2) - (-2, 5, 0) = (1 - (-2), -1 - 5, 2 - 0) = (3, -6, 2)$$

Assim, temos que a equação do plano ADE pode ser da forma $3x - 6y + 2z + d = 0$

Para determinar o valor de d , na equação do anterior, substituímos as coordenadas do ponto A , porque as estas verificam a equação do plano, porque o ponto pertence ao plano:

$$3(-2) - 6(5) + 2(0) + d = 0 \Leftrightarrow -6 - 30 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 36$$

Pelo que, uma equação cartesiana do plano ADE é

$$3x - 6y + 2z + 36 = 0$$

As coordenadas de todos os pontos da reta dada, e em particular o ponto de interseção da reta com o plano ADE , ou seja, o ponto E , para $k \in \mathbb{R}$, são da forma:

$$(x, y, z) = (0, 0, 3) + k(1, -1, -1) = (0 + k, 0 - k, 3 - k) = (k, -k, 3 - k)$$

Como o ponto de interseção da pertence ao plano ADE podemos determinar o valor de k substituindo as coordenadas genéricas do ponto, na equação do plano:

$$3(k) - 6(-k) + 2(3 - k) + 36 = 0 \Leftrightarrow 3k + 6k + 6 - 2k + 36 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7k + 42 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-42}{7} \Leftrightarrow k = -6$$

Desta forma temos que as coordenadas do ponto E , são:

$$(-6, -(-6), 3 - (-6)) = (-6, 6, 9)$$



6. Considerando o número complexo z escrito na forma algébrica, $z = x + yi$, temos:

$$z \times \bar{z} = 4 \Leftrightarrow (x + yi) \times (x - yi) = 4 \Leftrightarrow x^2 - xyi + xyi - y^2i^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - y^2(-1) = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2^2$$

Ou seja, a condição $z \times \bar{z} = 4$ define uma circunferência de centro na origem e raio 2.

Resposta: **Opção A**

7. Como $i^{18} = i^{4 \times 4 + 2} = i^2 = -1$, temos que:

$$\begin{aligned} z &= \frac{4}{1-i} + 4i^{18} = \frac{4}{1-i} + 4(-1) = \frac{4}{1-i} - 4 = \frac{4}{1-i} - \frac{4-4i}{1-i} = \frac{4-4+4i}{1-i} = \frac{4i}{1-i} = \\ &= \frac{4i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{4i+4i^2}{1^2-i^2} = \frac{4i+4(-1)}{1-(-1)} = \frac{-4+4i}{2} = -2+2i \end{aligned}$$

Escrevendo z na forma trigonométrica ($\rho e^{i\theta}$) temos:

- $\rho = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{2}{-2} = -1$; como $\operatorname{sen} \theta > 0$ e $\operatorname{cos} \theta < 0$, θ é um ângulo do 2.º quadrante, logo $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Assim temos que $z = \sqrt{8}e^{i(\frac{3\pi}{4})}$, e como os argumentos das três raízes cúbicas de um mesmo número complexo diferem de $\frac{2\pi}{3}$, e os respectivos módulos são iguais, temos que as restantes raízes cúbicas de w , são:

- $z_2 = \sqrt{8}e^{i(\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})} = \sqrt{8}e^{i(\frac{9\pi}{12} + \frac{8\pi}{12})} = \sqrt{8}e^{i(\frac{17\pi}{12})}$
- $z_3 = \sqrt{8}e^{i(\frac{17\pi}{12} + \frac{2\pi}{3})} = \sqrt{8}e^{i(\frac{17\pi}{12} + \frac{8\pi}{12})} = \sqrt{8}e^{i(\frac{25\pi}{12})} = \sqrt{8}e^{i(\frac{25\pi}{12} - 2\pi)} = \sqrt{8}e^{i(\frac{25\pi}{12} - \frac{24\pi}{12})} = \sqrt{8}e^{i(\frac{\pi}{12})}$

8. Para averiguar se a função f é contínua em $x = 0$, temos que verificar se $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

- $f(0) = \ln \sqrt{e+0} = \ln \sqrt{e} = \ln \left(e^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln \sqrt{e+x}) = \ln \sqrt{e+0^+} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1 - \cos 0^-}{0^-} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1^2 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} =$$

$$(\text{como } \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} \right) = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} =$$

$$= 1 \times \frac{\operatorname{sen} 0}{1 + \cos 0} = 1 \times \frac{0}{2} = 1 \times 0 = 0$$

Como $f(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, então a função f não é contínua em $x = 0$.



9.

9.1. Para estudar o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada no intervalo $]0, \pi[$:

$$\begin{aligned} g''(x) &= (g'(x))' = (x + 2 \cos^2 x)' = (x)' + 2(\cos x \cos x)' = 1 + 2((\cos x)' \cos x + \cos x(\cos x)') = \\ &= 1 + 2((- \operatorname{sen} x \times \cos x + \cos x(- \operatorname{sen} x)) = 1 + 2 \times 2(- \operatorname{sen} x \cdot \cos x) = \\ &= 1 - 2 \times \underbrace{2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x}_{\operatorname{sen}(2x)} = 1 - 2 \operatorname{sen}(2x) \end{aligned}$$




Determinando os zeros da segunda derivada, temos:

$$\begin{aligned} g''(x) = 0 &\Leftrightarrow 1 - 2 \operatorname{sen}(2x) = 0 \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen}(2x) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{2} \vee 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como se pretende identificar as soluções do intervalo $]0, \pi[$, atribuindo valores inteiros a k para identificar as soluções no intervalo definido, temos:

- $k = -1 \rightarrow x = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12} - \pi = -\frac{7\pi}{12}$ $\left(-\frac{11\pi}{12} \notin]0, \pi[\text{ e } -\frac{7\pi}{12} \notin]0, \pi[\right)$
- $k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12}$
- $k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12} + \pi = \frac{17\pi}{12}$ $\left(\frac{13\pi}{12} \notin]0, \pi[\text{ e } \frac{17\pi}{12} \notin]0, \pi[\right)$

Assim, estudando a variação de sinal de g'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g , vem:

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12}$		π
g''	n.d.	+	0	-	0	+	n.d.
g	n.d.		Pt. I.		Pt. I.		n.d.

Logo, podemos concluir que o gráfico de g :

- tem dois pontos de inflexão (de abscissas $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{5\pi}{12}$)
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]0, \frac{\pi}{12}[$ e no intervalo $]\frac{5\pi}{12}, \pi[$
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}[$



9.2. A abscissa do ponto do gráfico de g em que a tangente é paralela à reta de equação $y = -2x$, ou seja, o ponto em que a tangente tem declive $m = -2$, é a solução da equação $g'(x) = -2$.

Como em $] -\infty, 0[$ temos $g'(x) = 3e^{2x} - 7e^x$, vem que:

$$g'(x) = -2 \Leftrightarrow 3e^{2x} - 7e^x = -2 \Leftrightarrow 3(e^x)^2 - 7e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

(considerando $y = e^x$)

$$\Leftrightarrow 3y^2 - 7y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)} \Leftrightarrow y = \frac{7+5}{6} \vee y = \frac{7-5}{6} \Leftrightarrow y = 2 \vee y = \frac{1}{3}$$

(como $y = e^x$)

$$\Leftrightarrow e^x = 2 \vee e^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \ln 2 \vee x = \ln \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \ln 2 \vee x = \ln 1 - \ln 3 \Leftrightarrow x = \ln 2 \vee x = -\ln 3$$

Como $\ln 2 \notin] -\infty, 0[$, a abscissa do ponto do gráfico de g em que a tangente é paralela à reta de equação $y = -2x$, é $-\ln 3$.

10. Como a função é contínua em $]0, +\infty[$ (porque é o quociente de funções contínuas), a reta de equação $x = 0$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de h , paralela ao eixo Oy . Para averiguar esta hipótese vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + \ln x}{e^x - 1} = \frac{e^{0^+} + \ln 0^+}{e^{0^+} - 1} = \frac{1^+ - \infty}{1^+ - 1} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Logo a reta de equação $x = 0$ é a única assíntota do gráfico de h paralela ao eixo das ordenadas.

Para averiguar a existência de assíntotas horizontais, ou seja, paralelas ao eixo Ox , como o domínio de h é $]0, +\infty[$, vamos calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \ln x}{e^x - 1} = \frac{e^{+\infty} + \ln(+\infty)}{e^{+\infty} - 1} = \frac{+\infty + \infty}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ (indeterminação)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \ln x}{e^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x + \ln x}{e^x}}{\frac{e^x - 1}{e^x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{e^x} + \frac{\ln x}{e^x} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{e^x} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^x} \right)} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x}} = \frac{1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^{+\infty}}} = \frac{1 + \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x}}_{\text{Lim. Notável}}}{1 - \frac{1}{+\infty}} = \frac{1 + \frac{0}{+\infty}}{1 - 0} = \frac{1 + 0}{1} = 1 \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que a reta de equação $y = 1$ é a única assíntota horizontal, ou seja, paralela ao eixo das abscissas, do gráfico de h , quando $x \rightarrow +\infty$.



11.

11.1. Calculando a massa de sal no instante da abertura das torneiras ($t = 0$), temos:

$$m(0) = \frac{30(1 + 0,006 \times 0)^3 - 29}{(1 + 0,006 \times 0)^2} = \frac{30(1)^3 - 29}{(1)^2} = \frac{1}{1} = 1$$

Calculando a massa de sal um minuto após a abertura das torneiras ($t = 1$), temos:

$$m(1) = \frac{30(1 + 0,006 \times 1)^3 - 29}{(1 + 0,006 \times 1)^2} = \frac{30(1 + 0,006)^3 - 29}{(1 + 0,006)^2} \approx 1,524$$

Assim, a diferença das massas ao fim de um minuto é $1,524 - 1 = 0,524$, pelo que a percentagem (p) de aumento da massa de sal no primeiro minuto é:

$$\frac{100}{1} = \frac{p}{0,524} \Leftrightarrow 0,524 \times 100 = p \Leftrightarrow 52,4 = p$$

Pelo que percentagem de aumento, com arredondamento às unidades é 52%.

Resposta: **Opção B**11.2. No instante a a massa de sal no tanque é $m(a)$. Como passada meia hora, ou seja, 30 minutos, a que corresponde o instante $a + 30$, a massa de sal triplica, relativamente ao instante a , pelo que o valor de a é a solução da equação

$$m(a + 30) = 3m(a)$$

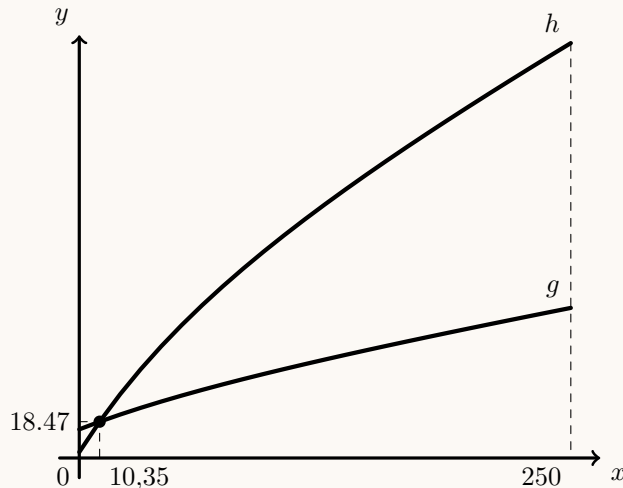
Assim, inserindo na calculadora a função $f(x) = \frac{30(1 + 0,006x)^3 - 29}{(1 + 0,006x)^2}$, determinamos o valor de a como a abcissa do ponto de interseção das funções:

- $g(x) = f(x + 30)$
- $h(x) = 3 \times f(x)$

Representando na calculadora as funções g e h , numa janela compatível com o domínio da função ($x \in [0, 250]$), obtemos o gráfico representado na figura ao lado.

Recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção dos dois gráficos, obtemos valores aproximados às décimas da abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos:

10,35 min.

Desta forma, como 0,35 minutos correspondem a $0,35 \times 60 = 21$ segundos, o instante em causa ocorre 10 minutos e 21 segundos após a abertura das torneiras.

12. Como $\lim u_n = \lim \frac{4n-1}{n+3} = \lim \frac{4n}{n} = \lim 4 = 4$, então (u_n) é uma sucessão convergente.

Como qualquer sucessão convergente é limitada, então (u_n) é uma sucessão limitada.

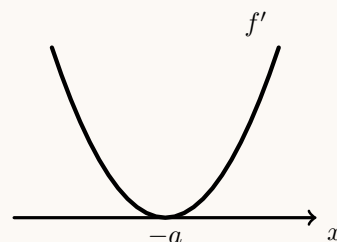
13. Como os extremos da função correspondem aos zeros da função derivada associados à mudança de sinal, começamos por determinar a expressão da derivada da função f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{3}x^3 + ax^2 + a^2x + \sqrt{2} \right)' = \left(\frac{1}{3}x^3 \right)' + (ax^2)' + (a^2x)' + (\sqrt{2})' = 3 \times \frac{1}{3}x^2 + 2ax + a^2 + 0 = \\ &= x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2 \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada da função f , temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+a)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+a)(x-a) = 0 \Leftrightarrow x = -a \vee x = -a$$

Assim, temos que $-a$ é o único zero da derivada da função f , mas como não está associado a uma mudança de sinal, não corresponde a um extremo da função, e por não existir qualquer outro zero da derivada, a função não tem extremos.



14. Como $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, temos que:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = 4 - 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{3}$$

Como $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ então $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, e como o declive da reta s é a tangente da inclinação $m_s = \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, e a reta s passa pela origem, é definida pela equação: $y = \sqrt{3}x$.

Desta forma as coordenadas do ponto B são:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2}x = 1 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x = 1 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ y = \sqrt{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Temos ainda que a abcissa do ponto A é:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

E assim, a área do triângulo $[AOB]$, é:

$$A_{[AOB]} = \frac{|x_A| \times y_B}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} \times 2}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



15. Como os pontos A e B pertencem ao gráfico de f , designado por a a abscissa do ponto A e por B a abscissa do ponto B , temos que as coordenadas destes pontos são $A(a, a^2)$ e $B(b, b^2)$.

Assim, o declive da reta r (reta AB) é dado por:

$$m = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b - a)(b + a)}{(b - a)} = b + a$$

Como o ponto de coordenadas $(0, 1)$ pertence à reta r , temos que a sua equação é: $y = (b + a)x + 1$.

Temos ainda que, como o ponto A pertence à reta r , as suas coordenadas verificam a equação da reta:

$$a^2 = (b + a)(a) + 1 \Leftrightarrow a^2 = ab + a^2 + 1 \Leftrightarrow a^2 - a^2 - ab = 1 \Leftrightarrow -ab = 1 \Leftrightarrow ab = -1$$

Determinando as coordenadas dos vetores \vec{OA} e \vec{OB} , temos:

- $\vec{OA} = A - O = (a, a^2) - (0, 0) = (a, a^2)$
- $\vec{OB} = B - O = (b, b^2) - (0, 0) = (b, b^2)$

E assim, calculado o produto escalar, temos:

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = (a, a^2) \cdot (b, b^2) = a \times b + a^2 \times b^2 = ab + (ab)^2 = -1 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0$$

Como $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$, então o ângulo AOB é reto.

