

Exame final nacional de Matemática A (2023, 2.ª fase)

Proposta de resolução



1. Calculando os valores dos limites das sucessões, temos que:

- $\lim \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{(-2)}{n}\right)^n = e^{-2}$
- $\lim \left(-\frac{n^2 + 1}{n}\right) = -\lim \frac{n^2 + 1}{n} = -\lim \frac{n^2}{n} = -\lim n = -\infty$
- $\lim \frac{4n + 3}{3n + 4} = \lim \frac{4n}{3n} = \lim \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$
- $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$, porque:
 - Se n é par, temos que: $\lim \frac{(-1)^n}{n} = \lim \frac{1}{n} = \frac{1}{+\infty} = 0$
 - Se n é ímpar, temos que: $\lim \frac{(-1)^n}{n} = \lim \frac{-1}{n} = -\frac{1}{+\infty} = 0$

Resposta: **Opção D**

2. Para cada triângulo da sequência (à exceção do primeiro), o comprimento dos lados é metade do comprimento dos lados do triângulo do termo anterior da sequência. Assim, também o perímetro de cada triângulo (P_n) é metade do perímetro do triângulo anterior da sequência P_{n-1} , ou seja:

$$P_n = \frac{P_{n-1}}{2} \Leftrightarrow P_n = \frac{1}{2} \times P_{n-1}$$

Ou seja, a sucessão dos perímetros (P_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, e cujo o primeiro termo é $P_1 = 3 \times \overline{AB} = 3 \times 1 = 3$.

Assim, a soma dos perímetros dos n triângulos da sequência, é:

$$S_n = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 6 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 6 - 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Como, para $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$, então $6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$, pelo que $6 - 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n < 6$, ou seja, a soma dos perímetros dos n triângulos da sequência é inferior a 6.

3. Seleccionando 2 das 6 posições do número em que vão figurar os 2 cincos, temos 6C_2 alternativas diferentes, porque não interessa a ordem, visto que as duas posições se destinam a números iguais. E por cada uma destas alternativas, existem ${}^8A_4 = 8^4$ ordenações possíveis dos restantes 8 algarismos disponíveis para as 4 posições disponíveis considerando eventualmente a repetição,

Assim, os números que se podem considerar, nas condições do enunciado são:

$${}^6C_2 \times 8^4 = 61\,440$$

Resposta: **Opção B**

4. Observando que $P\left((A \cup \bar{B}) | B\right) = \frac{P\left((A \cup \bar{B}) \cap B\right)}{P(B)}$, temos:

- $(A \cup \bar{B}) \cap B = (A \cap B) \cup (\bar{B} \cap B) = (A \cap B) \cup \emptyset = A \cap B$
- $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,6 = 0,4$
- Como A e B são equiprováveis $P(B) = P(A) = 0,4$ e $P(\bar{B}) = P(\bar{A}) = 0,6$;
- $P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) \Leftrightarrow 0,7 = 0,4 + 0,6 - P(A \cap \bar{B}) \Leftrightarrow P(A \cap \bar{B}) = 1 - 0,7 \Leftrightarrow P(A \cap \bar{B}) = 0,3$
- $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,3 = 0,4 - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,4 - 0,3 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,1$

E assim, o valor de $P\left((A \cup \bar{B}) | B\right)$, na forma de fração irredutível, é:

$$P\left((A \cup \bar{B}) | B\right) = \frac{P\left((A \cup \bar{B}) \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}$$

5. Relativamente à probabilidade de seleccionar dois vértices do mesmo hexágono, sabemos que:

- o número de pontos vértices na composição de ordem n é $6n + 1$, correspondendo aos 6 vértices de cada um dos n hexágonos acrescido do ponto V , pelo que o número de casos possíveis é:

$${}^{6n+1}C_2 = \frac{(6n+1)!}{2!(6n+1-2)!} = \frac{(6n+1) \times 6n \times (6n-1)!}{2!(6n-1)!} = \frac{36n^2 + 6n}{2} = 18n^2 + 3n$$

- como existem 6C_2 pares de pontos em cada um dos n hexágonos, o número de casos favoráveis é:

$${}^6C_2 \times n = 15n$$

Assim, como $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{{}^6C_2 \times n}{{}^{6n+1}C_2} &= \frac{5}{49} \Leftrightarrow \frac{15n}{18n^2 + 3n} = \frac{5}{49} \Leftrightarrow \frac{15n}{n(18n + 3)} = \frac{5}{49} \Leftrightarrow \frac{15}{18n + 3} = \frac{5}{49} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 735 = 90n + 15 \Leftrightarrow 735 - 15 = 90n \Leftrightarrow \frac{720}{90} = n \Leftrightarrow n = 8 \end{aligned}$$

Ou seja, para a probabilidade indicada, a composição tem 8 hexágonos.



6. Substituindo as coordenadas dos pontos na expressão algébrica da função, temos que:

- $f(1) = 5 \Leftrightarrow a + e^{b \times 1} = 5 \Leftrightarrow a = 5 - e^b$
- $f(2) = 7 \Leftrightarrow a + e^{b \times 2} = 7 \Leftrightarrow a = 7 - e^{2b}$

Ou seja:

$$5 - e^b = 7 - e^{2b} \Leftrightarrow e^{2b} - e^b - 2 = 0 \Leftrightarrow (e^b)^2 - e^b - 2 = 0$$

Considerando $y = e^b$, temos que:

$$y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow y = -1 \vee y = 2$$

Assim, como $y = e^b$, temos que:

- $\underbrace{e^b = -1}_{\text{Cond. impossível}} \vee e^b = 2 \Leftrightarrow b = \ln 2$
- $a = 5 - e^b = 5 - 2 = 3$

7. Calculando o valor do limite, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{x} = \frac{\text{sen } 0}{0} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \times \text{sen}(2x)}{2x} = 2 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{2x}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 \times 1 = 2$$

Resposta: **Opção D**

8.

8.1. As coordenadas do centro da superfície esférica, ou seja, do ponto médio do segmento $[AG]$, são:

$$\left(\frac{4 + 12}{2}, \frac{0 + \frac{13}{2}}{2}, \frac{0 + 2}{2} \right) = \left(8, \frac{13}{4}, 1 \right)$$

e o raio da superfície esférica, ou seja, metade do diâmetro, é:

$$\frac{\overline{AG}}{2} = \frac{\sqrt{(12 - 4)^2 + \left(\frac{13}{2} - 0\right)^2 + (2 - 0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{64 + \frac{169}{4} + 4}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{441}{4}}}{2} = \frac{\frac{21}{2}}{2} = \frac{21}{4}$$

Assim, a superfície esférica é definida por:

$$(x - 8)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 + (z - 1)^2 = \left(\frac{21}{4}\right)^2 \Leftrightarrow (x - 8)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 + (z - 1)^2 = \frac{441}{16}$$

Resposta: **Opção A**



8.2. Como o prisma é reto, as arestas laterais são perpendiculares às bases do prisma, pelo que a reta EL (que contém uma aresta lateral) é perpendicular ao plano ABF (que contém uma das bases). Assim, observando que o vetor diretor da reta EL também é um vetor normal do plano ABF , temos que uma equação deste plano é da forma:

$$3x + 4y + d = 0$$

E como o ponto A pertence ao plano, substituindo as suas coordenadas na equação anterior, obtemos o valor do parâmetro d :

$$3(4) + 4(0) + d = 0 \Leftrightarrow 12 + d = 0 \Leftrightarrow d = -12$$

Ou seja, uma equação do plano ABF é $3x + 4y - 12 = 0$.

Como as retas EL e FG são paralelas (porque contém arestas laterais de um prisma reto), então o vetor diretor da reta EL também é um vetor diretor da reta FG , pelo que, recorrendo ao ponto G , obtemos uma equação vetorial da reta FG :

$$(x, y, z) = \left(12, \frac{13}{2}, 2 \right) + k(3, 4, 0), k \in \mathbb{R}$$

E assim, um ponto genérico desta reta, tem coordenadas: $\left(12 + 3k, \frac{13}{2} + 4k, 2 \right)$

Como o ponto F é a interseção da reta FG com o plano ABF , substituindo as coordenadas do ponto genérico da reta FG na equação do plano ABF , obtemos o valor de k , correspondente ao ponto F :

$$3(12 + 3k) + 4\left(\frac{13}{2} + 4k\right) - 12 = 0 \Leftrightarrow 36 + 9k + 26 + 16k - 12 = 0 \Leftrightarrow 25k = -50 \Leftrightarrow k = -\frac{50}{25} \Leftrightarrow k = -2$$

Desta forma, temos que as coordenadas do ponto F são:

$$\left(12 + 3(-2), \frac{13}{2} + 4(-2), 2 \right) = \left(12 - 6, \frac{13}{2} - 8, 2 \right) = \left(6, \frac{13}{2} - \frac{16}{2}, 2 \right) = \left(6, -\frac{3}{2}, 2 \right)$$

9. Designado por d a abcissa do ponto D , ou seja, $\overline{OD} = d$, temos que:

- $D(d, 0)$
- $C(0, \overline{OC}) = \left(0, \frac{\overline{OA}}{4} \right) = \left(0, \frac{3\overline{OD}}{4} \right) = \left(0, \frac{3d}{4} \right)$
- $E(\overline{CE}, \overline{OC}) = \left(\overline{CB} - \overline{EB}, \frac{3d}{4} \right) = \left(\overline{OA} - \overline{OD}, \frac{3d}{4} \right) = \left(3d - d, \frac{3d}{4} \right) = \left(2d, \frac{3d}{4} \right)$
- $\overrightarrow{DC} = C - D = \left(0, \frac{3d}{4} \right) - (d, 0) = \left(-d, \frac{3d}{4} \right)$
- $\overrightarrow{DE} = E - D = \left(2d, \frac{3d}{4} \right) - (d, 0) = \left(d, \frac{3d}{4} \right)$

Assim, calculando o produto escalar com as coordenadas dos vetores, temos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = -7 &\Leftrightarrow \left(-d, \frac{3d}{4} \right) \cdot \left(d, \frac{3d}{4} \right) = -7 \Leftrightarrow -d^2 + \frac{9d^2}{16} = -7 \Leftrightarrow -\frac{16d^2}{16} + \frac{9d^2}{16} = -7 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{7d^2}{16} = -7 \Leftrightarrow d^2 = \frac{7 \times 16}{7} \Leftrightarrow d^2 = 16 \Leftrightarrow d = \pm\sqrt{16} \Leftrightarrow d = \pm 4 \end{aligned}$$

Como o ponto D pertence ao semieixo positivo Ox , então $d > 0$, ou seja $d = 4$.

E assim, vem que: $\overline{OA} = 3 \times \overline{OD} = 3 \times d = 3 \times 4 = 12$



10. Temos que:

- pela observação do referencial **I**, podemos concluir que $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) < 0$, e como a função é diferenciável, então é contínua, em particular em $x = 0$, logo $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = g(0)$, pelo que $g(0) > 0$ que é incompatível com a segunda condição definida ($g(0) < 0$) pelo que no referencial **I** não está representado parte do gráfico da função g ;
- pela observação do referencial **II**, podemos concluir que a função é crescente no intervalo $] - \infty, -1[$, ou seja, $g'(x) > 0, \forall x \in] - \infty, -1[$ o que é incompatível com a terceira condição definida ($g'(x) < 0, \forall x \in] - \infty, -1[$) pelo que no referencial **II** não está representado parte do gráfico da função g ;
- pela observação do referencial **III**, podemos concluir que $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$, e como a função é par, então $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$, o que é incompatível com a primeira condição definida ($\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$) pelo que no referencial **III** também não está representado parte do gráfico da função g .

11. Temos que:

- como o ponto A pertence ao semieixo imaginário positivo, o seu afixo é da forma $z_1 = \rho e^{i(\frac{\pi}{2})}$ ($\rho \in \mathbb{R}^+$);
- como o triângulo $[ABC]$ é equilátero e inscrito numa circunferência centrada na origem, o afixo do ponto B é da forma $z_2 = \rho e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3})} = \rho e^{i(\frac{3\pi}{6} + \frac{4\pi}{6})} = \rho e^{i(\frac{7\pi}{6})}$ ($\rho \in \mathbb{R}^+$);

E assim, temos que:

$$z_1^2 \times z_2 = \left(\rho e^{i(\frac{\pi}{2})} \right)^2 \times \rho e^{i(\frac{7\pi}{6})} = \rho^2 e^{i(2 \times \frac{\pi}{2})} \times \rho e^{i(\frac{7\pi}{6})} = \rho^3 e^{i(\pi + \frac{7\pi}{6})} = \rho^3 e^{i(\frac{13\pi}{6})} = \rho^3 e^{i(\frac{13\pi}{6} - 2\pi)} = \rho^3 e^{i(\frac{\pi}{6})}$$

Ou seja, $0 < \text{Arg}(z_1^2 \times z_2) < \frac{\pi}{2}$, pelo que o afixo de $z_1^2 \times z_2$ pertence ao primeiro quadrante.

Resposta: **Opção A**

12. Observando que:

- podemos escrever $-1 - \sqrt{3}i$ na forma trigonométrica ($\rho e^{i\theta}$):
 - $\rho = |-1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$
 - $\text{tg } \theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$; como $\text{sen } \theta < 0$ e $\text{cos } \theta < 0$, θ é um ângulo do 3º quadrante, logo $\theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$
 Pelo que $-1 - \sqrt{3}i = 2e^{i(\frac{4\pi}{3})}$;

- como $i^{11} = i^{4 \times 2 + 3} = i^3 = -i$, então $2i^{11} = 2(-i) = -2i = 2e^{i(\frac{3\pi}{2})}$.

Assim, simplificando a expressão de z , temos que:

$$z = \frac{2i^{11}e^{i\alpha}}{-1 - \sqrt{3}i} = \frac{2e^{i(\frac{3\pi}{2})} \times e^{i\alpha}}{2e^{i(\frac{4\pi}{3})}} = \frac{2 \times 1}{2} e^{i(\frac{3\pi}{2} + \alpha - \frac{4\pi}{3})} = e^{i(\frac{9\pi}{6} + \alpha - \frac{8\pi}{6})} = e^{i(\frac{\pi}{6} + \alpha)}$$

Como $\text{Re } z = -\text{Im } z$, e o afixo de z pertence ao 4.º quadrante, então $\text{Arg } z = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ou seja, para $k \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{\pi}{6} + \alpha = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{27\pi}{12} - \frac{2\pi}{12} + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi$$

Como $\alpha \in [0, 2\pi[$, então $\alpha = \frac{19\pi}{12}$.



13. Como $p(j)$ é o valor da prestação mensal a pagar, em função da taxa de juro anual aplicada, j , a duplicação da taxa de juro corresponde a $2j$ e o correspondente aumento da prestação mensal em 120 euros pode ser representado por $p(j) + 120$, ou seja, temos que a taxa de juro inicial é a solução da equação:

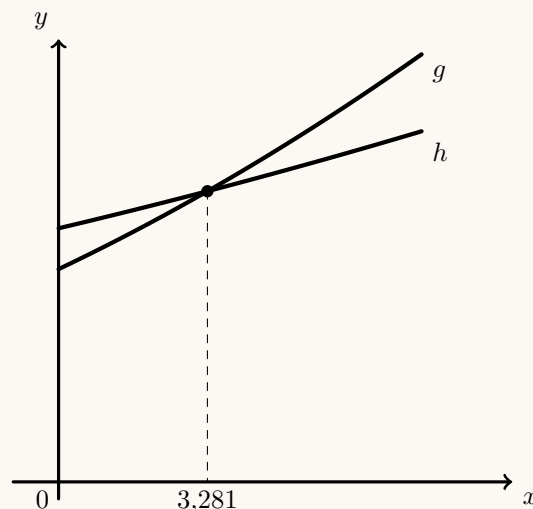
$$p(2j) = p(j) + 120$$

Assim, inserindo na calculadora a função $f(x) = \frac{62,5x}{1 - \left(1 + \frac{x}{1200}\right)^{-120}}$, determinamos o valor de do juro inicial como a abcissa do ponto de interseção das funções:

- $g(x) = f(2x)$
- $h(x) = f(x) + 120$

Representando na calculadora as funções g e h , numa janela compatível com o domínio da função, obtemos o gráfico representado na figura ao lado.

Recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção dos dois gráficos, obtemos valores aproximados às milésimas da abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos, $x \approx 3,281$ a que corresponde a taxa de juro inicial de 3,281%, aproximadamente.



14.

- 14.1. Como a função é contínua em $]0, +\infty[$ (porque resulta de operações entre funções contínuas), a reta de equação $x = 0$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f , o que pode ser confirmado porque:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x + 2x}{x} = \frac{\ln(0^+) + 2(0^+)}{0^+} = \frac{-\infty + 0}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Para determinar a equação da assíntota horizontal, ou seja, como o domínio de f é $]0, +\infty[$, vamos calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 2x}{x} = \frac{\ln(+\infty) + 2(+\infty)}{+\infty} = \frac{+\infty + \infty}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ (indeterminação)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{2x}{x} \right) = \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 0 + 2 = 2 \text{ Logo, podemos concluir}$$

que a reta de equação $y = 2$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f .



14.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\ln x + 2x}{x} \right)' = \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{2x}{x} \right)' = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' + (2)' = \frac{(\ln x)' \times x - (x)' \times \ln x}{x^2} + 0 = \\ &= \frac{(x)'}{x} \times x - 1 \times \ln x = \frac{1}{x} \times x - \ln x = \frac{1 - \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada da função f , temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \underset{x > 0}{\Rightarrow} 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow 1 = \ln x \Leftrightarrow x = e^1 \Leftrightarrow x = e$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		e	$+\infty$
$1 - \ln x$	n.d.	+	0	-
x^2	n.d.	+	+	+
f'	n.d.	+	0	-
f	n.d.	\nearrow	Máx.	\searrow

Assim, podemos concluir que a função f :

- é crescente no intervalo $]0, e[$;
- é decrescente no intervalo $[e, +\infty[$;
- tem um máximo relativo que é:

$$f(e) = \frac{\ln e + 2e}{e} = \frac{\ln e}{e} + \frac{2e}{e} = \frac{1}{e} + 2$$

15. Como a reta AB é tangente à semicircunferência no ponto T , e o segmento de reta $[OT]$ é um raio, então as retas AB e OT são perpendiculares, pelo que os triângulos $[OTA]$ e $[OTB]$ são retângulos em T , cujas hipotenusas são, respetivamente, os lados $[OA]$ e $[OB]$.

Como $\overline{OT} = 2$ e $T\hat{O}B = \frac{\pi}{2} - \alpha$, recorrendo à definição de cosseno, temos:

- $\cos \alpha = \frac{\overline{OT}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{2}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{2}{\cos \alpha}$
- $\cos T\hat{O}B = \frac{\overline{OT}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{2}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \overline{OB} = \frac{2}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)} = \frac{2}{\sin \alpha}$

Assim, determinando a área do triângulo, vem:

$$A_{[ABC]} = \frac{2 \times \overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{2}{\cos \alpha} \times \frac{2}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{2 \times 4}{2 \times \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{8}{\sin (2\alpha)}$$



16. Designando por a a abscissa dos pontos P e Q , determinamos as equações das retas s e t :

- $P\left(a, \frac{k}{a}\right)$

- $f'(x) = \frac{(k)' \times x - (x)' \times k}{x^2} = \frac{0 - k}{x^2} = -\frac{k}{x^2}$

- $m_s = f'(a) = -\frac{k}{a^2}$

$$y_P = -\frac{k}{a^2} \times x_P + b \Leftrightarrow \frac{k}{a} = -\frac{k}{a^2} \times a + b \Leftrightarrow \frac{k}{a} = -\frac{k}{a} + b \Leftrightarrow \frac{k}{a} + \frac{k}{a} = b \Leftrightarrow \frac{2k}{a} = b$$

- $s : y = -\frac{k}{a^2}x + \frac{2k}{a}$

- $Q\left(a, -\frac{k}{a}\right)$

- $g'(x) = -\frac{(k)' \times x - (x)' \times k}{x^2} = -\frac{0 - k}{x^2} = \frac{k}{x^2}$

- $m_t = g'(a) = \frac{k}{a^2}$

$$y_Q = \frac{k}{a^2} \times x_Q + b \Leftrightarrow -\frac{k}{a} = \frac{k}{a^2} \times a + b \Leftrightarrow -\frac{k}{a} = \frac{k}{a} + b \Leftrightarrow -\frac{k}{a} - \frac{k}{a} = b \Leftrightarrow -\frac{2k}{a} = b$$

- $t : y = \frac{k}{a^2}x - \frac{2k}{a}$

Determinando as coordenadas do ponto R , temos:

$$\begin{cases} y = -\frac{k}{a^2}x + \frac{2k}{a} \\ y = \frac{k}{a^2}x - \frac{2k}{a} \end{cases}$$

Ou seja a abscissa do ponto R , é:

$$\frac{k}{a^2}x - \frac{2k}{a} = -\frac{k}{a^2}x + \frac{2k}{a} \Leftrightarrow \frac{k}{a^2}x + \frac{k}{a^2}x = \frac{2k}{a} + \frac{2k}{a} \Leftrightarrow \frac{2kx}{a^2} = \frac{4k}{a} \Leftrightarrow \frac{2kx}{k} = \frac{4a^2}{a} \Leftrightarrow 2x = 4a \Leftrightarrow x = 2a$$

E a ordenada do ponto R é:

$$y_R = \frac{k}{a^2}x_R - \frac{2k}{a} = \frac{k}{a^2} \times 2a - \frac{2k}{a} = \frac{k}{a^2} \times 2a - \frac{2k}{a} = \frac{2k}{a} - \frac{2k}{a} = 0$$

Assim, considerando $[PQ]$ como a base do triângulo $[PQR]$, temos:

$$\overline{PQ} = x_P + |x_Q| = \frac{k}{a} + \left|-\frac{k}{a}\right| = \frac{2k}{a}$$

E a medida da altura correspondente é:

$$x_R - a = 2a - a = a$$

Logo, a área do triângulo $[PQR]$ é:

$$A_{[PQR]} = \frac{\overline{PQ} \times (x_R - a)}{2} = \frac{\frac{2k}{a} \times a}{2} = \frac{2k}{2} = k$$

