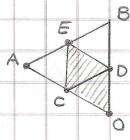
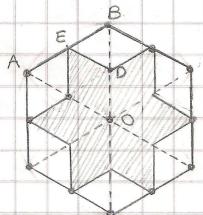


(1)

①

Figura ①



A área da estrela ① é igual à soma das áreas de 12 triângulos equivalentes ao triângulo [CDO].

Mas cada triângulo equivalente ao triângulo [CDO] tem área equivalente a $\frac{1}{24}$ da área do

hexágono exterior, logo a área da estrela ① é $\frac{12 \times \frac{1}{24}}{2} = \frac{1}{2}$ da área do hexágono. Como esta área é $A_{\text{hexágono}} = \frac{P}{2} \times ap \Rightarrow A_{\text{hexágono}} = \frac{6 \times 2}{2} \times ap \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_{\text{hexágono}} = 6 \times ap \Leftrightarrow \text{portanto } A_{\text{estrela } 1} = \frac{1}{2} \times 6 \times ap \Rightarrow A_{\text{estrela } 1} = 3 \times ap$$

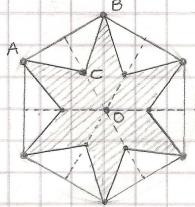
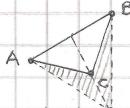


Figura ②



A área da estrela ② é igual à diferença entre a área do hexágono exterior e a soma das áreas de 6 triângulos equivalentes ao triângulo [ABC].

Cada um destes triângulos tem área: $A_{\Delta} = \frac{b \times h}{2} \Rightarrow A_{\Delta} = \frac{\ell_{\text{hexágono}} \times \frac{1}{2} \times ap}{2} \Rightarrow A_{\Delta} = \frac{2 \times \frac{1}{2} ap}{2} \Rightarrow A_{\Delta} = \frac{1}{2} ap$

$$\text{Então } A_{\text{estrela } 2} = A_{\text{hexágono}} - 6 \times A_{\Delta} \Rightarrow A_{\text{estrela } 2} = 6 \times ap - 6 \times \frac{1}{2} ap \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{\text{estrela } 2} = 6 ap - 3 ap \Rightarrow A_{\text{estrela } 2} = 3 \times ap$$

E fica provado que as áreas das duas estrelas são iguais.

②

$$②.1 \quad A_{\text{pentágono}} = A_{\text{trapézio } [ABCD]} + A_{\text{triângulo } [ADE]}$$

$$A_{\text{trapézio } [ABCD]} = \frac{B+b}{2} \times h \Rightarrow A_{\text{trapézio } [ABCD]} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{OG} \text{ sendo } G \text{ o}$$

centro da circunferência menor.

Sabendo que $\overline{BC} = \overline{FO} = 2$ e $\overline{OG} = \frac{1}{2} \overline{FO} = 1$, tem:

$$A_{\text{trapézio } [ABCD]} = \frac{4+2}{2} \times 1 \Rightarrow A_{\text{trapézio } [ABCD]} = 3 \text{ u.a.}$$

$$A_{\text{triângulo } [ADE]} = \frac{b \times h}{2} \Rightarrow A_{\text{triângulo } [ADE]} = \frac{\overline{AD} \times \overline{OE}}{2} \Rightarrow A_{\text{triângulo } [ADE]} = \frac{4 \times 2}{2}$$

$$\Rightarrow A_{\text{triângulo } [ADE]} = 4 \text{ u.a}$$

$$\text{Então, } A_{\text{pentágono}} = 3 + 4 = 7 \text{ u.a.} //$$

(2.2) Se $\overline{AO} = r$ então $\overline{AD} = 2r$, $\overline{BC} = \overline{FO} = r$ e $\overline{OG} = \frac{1}{2}\overline{FO} = \frac{r}{2}$.

$$\text{Então } A_{\text{trapézio}} = \frac{2r + r}{2} \times \frac{r}{2} \Leftrightarrow A_{\text{trapézio}} = \frac{3r}{2} \times \frac{r}{2} \Leftrightarrow A_{\text{trap}} = \frac{3r^2}{4}$$

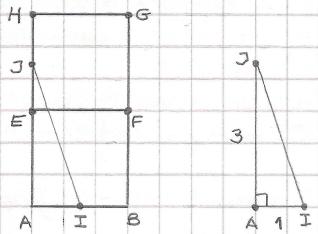
$$\text{Também } \overline{AD} = 2r \in \overline{OE} = r \text{ logo } A_{\text{triângulo EADE}} = \frac{2r \times r}{2} = r^2$$

$$\text{Então, } A_{\text{pentágono}} = \frac{3r^2}{4} + r^2 \Leftrightarrow A_{\text{pentágono}} = \frac{3r^2}{4} + \frac{4r^2}{4} = \frac{7r^2}{4} //$$

$$\begin{aligned} (2.3) \quad A_{\text{tracejada}} &= \frac{1}{4} A_{\text{círculo maior}} - \frac{1}{2} A_{\text{trapézio ABCD}} - \frac{1}{4} A_{\text{círculo menor}} \\ &= \frac{1}{4} \pi \cdot 4^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{8+4}{2} \times 2 - \frac{1}{4} \cdot \pi \times 2^2 = \\ &= \frac{1}{4} \pi \cdot 16 - \frac{1}{2} \cdot 12 - \frac{1}{4} \pi \cdot 4 = \\ &= 4\pi - 6 - \pi = \\ &= 3\pi - 6 = \\ &= 3(\pi - 2) // \end{aligned}$$

(3)

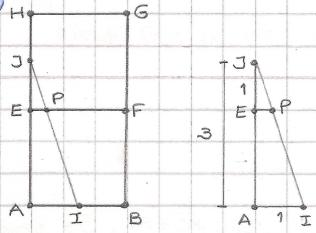
$$(3.1) \quad V_{\text{cubo}} = 8 \Leftrightarrow a^3 = 8 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow a = 2$$



$$\begin{aligned} \overline{IJ}^2 &= \overline{AJ}^2 + \overline{AI}^2 \\ \overline{IJ}^2 &= 3^2 + 1^2 \\ \overline{IJ}^2 &= 10 \\ \overline{IJ} &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

$R = 0$ trajecto tem comprimento $\sqrt{10}$ u.m.

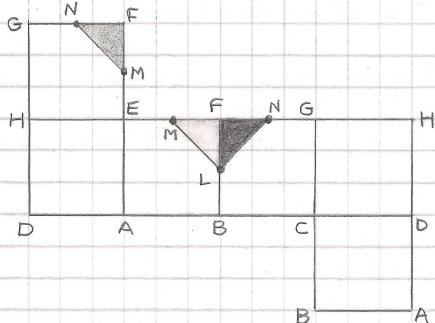
(3.2)



Como os triângulos $[\text{JEP}]$ e $[\text{JAI}]$ são semelhantes:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{JE}}{\overline{JA}} &= \frac{\overline{EP}}{\overline{AI}} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{\overline{EP}}{1} \Leftrightarrow \overline{EP} = \frac{1}{3} // \\ \Leftrightarrow \overline{PF} &= \overline{EF} - \overline{EP} \Leftrightarrow \overline{PF} = 2 - \frac{1}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{PF} = \frac{6}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} // \end{aligned}$$

(3.3)



$$(3.4) \quad V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times h$$

→ Se formarmos o triângulo [FNL] para base da pirâmide, [FM] será a sua altura.

$$A_{\text{base}} = \frac{\overline{FN} \times \overline{FL}}{2} \Leftrightarrow A_{\text{base}} = \frac{1 \times 1}{2} \Leftrightarrow A_{\text{base}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{FM} = 1$$

$$\text{Logo } V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \Leftrightarrow V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{6} \quad (1)$$

→ Se a base da pirâmide for o triângulo [LMN], temos:

$$\begin{aligned} & N \\ & | \\ M & F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{MN}^2 &= 1^2 + 1^2 \\ \overline{MN}^2 &= 2 \\ \overline{MN} &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & N \\ & | \\ M & P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{ML}^2 &= (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \\ \overline{ML}^2 &= 2 \\ x^2 &= 2 - \frac{1}{2} \\ x^2 &= \frac{3}{2} \\ x &= \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Então:

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times h \Leftrightarrow$$

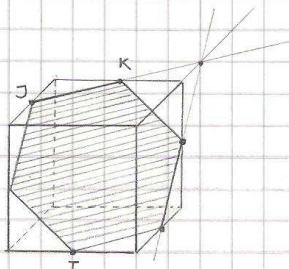
$$\Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times h \Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6} \times h \Leftrightarrow h = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

(de (1))

$$\Leftrightarrow h = \frac{1}{6\sqrt{3}} \Leftrightarrow h = \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3})} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(3.5)

(3.5.1)

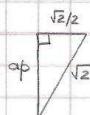


(3.5.2) A setor é um hexágono regular e cada lado mede $\sqrt{2}$ (anterior, $\overline{JK} = \overline{MN}$), logo $P = 6 \times \sqrt{2}$ u.m //

(3.5.3)

$$A_{\text{hexágono regular}} = \frac{P}{2} \times ap$$

$$P = 6\sqrt{2}$$

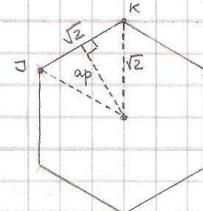


$$\begin{aligned} ap^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 &= \sqrt{2}^2 \\ ap^2 + \frac{2}{4} &= 2 \end{aligned}$$

$$ap^2 = 2 - \frac{1}{2}$$

$$ap = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$ap = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$



$$A_{\text{hexágono}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow A_{\text{hexágono}} = 3\sqrt{3} \text{ u.a. //}$$

(4)

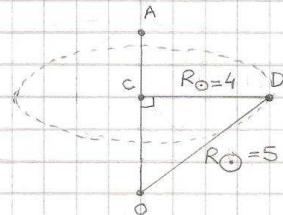
$$4.1. V_{\text{sólido}} = \frac{8}{25} V_{\text{sfera}} \Rightarrow V_{\text{cone pequeno}} + V_{\text{cone grande}} = \frac{8}{25} V_{\text{sfera}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} A_b \times \overline{AC} + \frac{1}{3} A_b \times \overline{CB} = \frac{8}{25} \times \frac{4}{3} \pi \times R^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} A_b (\overline{AC} + \overline{CB}) = \frac{8}{25} \times \frac{4}{3} \pi \times 5^3$$

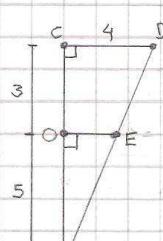
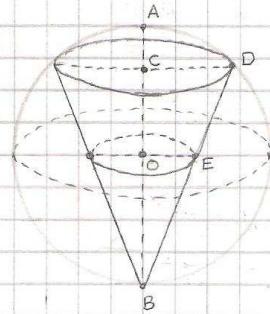
$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} A_b \times (2 \times 5) = \frac{4000 \pi}{75} \Rightarrow A_b = \frac{4000 \pi \times 3}{75 \times 10} \Rightarrow A_{\text{base}} = 16\pi$$

$$\Leftrightarrow \pi R_0^2 = 16\pi \Rightarrow R_0^2 = 16 \Rightarrow R_0 = \sqrt{16} \Rightarrow R_0 = 4$$



$$\begin{aligned}\overline{CO}^2 + 4^2 &= 5^2 \\ \overline{CO}^2 &= 25 - 16 \\ \overline{CO}^2 &= 9 \\ \overline{CO} &= \sqrt{9} \\ \overline{CO} &= 3 \text{ u.m.}\end{aligned}$$

4.2



Os triângulos são semelhantes, logo:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OE}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{5} = \frac{4}{\overline{OE}} \Rightarrow 8\overline{OE} = 4 \times 5$$

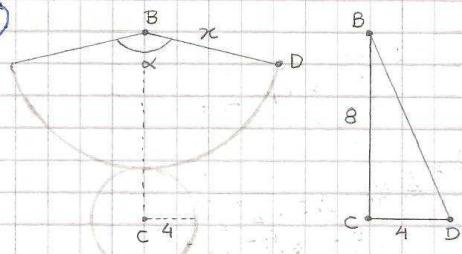
$$\Rightarrow \overline{OE} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times h \Rightarrow V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times \overline{OB} \Rightarrow V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \pi \times \overline{OE}^2 \times 5$$

$$\Leftrightarrow V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 5 \Rightarrow V_{\text{cone}} = \frac{\pi \times 25 \times 5}{3 \cdot 4} \Rightarrow V_{\text{cone}} = \frac{125\pi}{12} \text{ u.v.}$$

4.3.

4.3.1



$$\overline{BD}^2 = B^2 + 4^2$$

$$\overline{BD}^2 = 64 + 16$$

$$\overline{BD}^2 = 80$$

$$\overline{BD} = \sqrt{80}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 5}$$

$$\overline{BD} = 2 \times 2\sqrt{5}$$

$$\overline{BD} = 4\sqrt{5}$$

80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
	1

4.3.2

$$P_{\text{de centro C}} = 2\pi R \Rightarrow P_0 = 2\pi \times 4 \Rightarrow P_0 = 8\pi$$

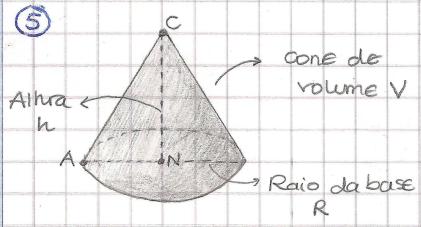
$$P_{\text{de centro B}} = 2\pi R \Rightarrow P_0 = 2\pi \times 4\sqrt{5} \Rightarrow P_0 = 8\pi\sqrt{5}$$

Amplitude de ângulo

$$360^\circ \xrightarrow{\text{Comprimento do arco}} 8\pi\sqrt{5}$$

$$\alpha \xrightarrow{\text{Comprimento do arco}} 8\pi$$

$$\alpha = \frac{360 \times 8\pi}{8\pi\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha \approx 161^\circ$$

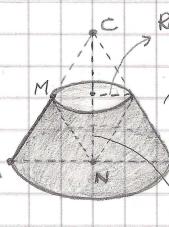


cone de volume V

Altura
 h

Raio da base
 R

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times h \Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \times \pi R^2 \times h$$



Raio da base $\frac{R}{2}$

sólido gerado pela rotação do triângulo $[AMN]$
- tronco de cone ao qual
foi "retirado" também
um cone.

Altura $\frac{h}{2}$

$$V_{\text{sólido}} = V_{\text{cone}} - 2V_{\text{cone pequeno}} \Leftrightarrow V_{\text{sólido}} = \frac{1}{3} \times \pi R^2 \times h - 2 \times \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{R}{2}\right)^2 \times \frac{h}{2}$$

$$\Leftrightarrow V_{\text{sólido}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{4} h \Leftrightarrow V_{\text{sólido}} = \frac{4}{4} \times \frac{1}{3} \pi R^2 h - \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \pi R^2 h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_{\text{sólido}} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \pi R^2 h \Leftrightarrow V_{\text{sólido}} = \frac{3}{4} V$$

(6) (6.1) 1 2 3 4 5 6
B C D A A D

(6.2) 1 2 3 4 5 6
A B C B D A

(6.3) $V = 144$
 $h = 12$

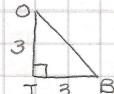
(6.3.1) Se $V = 144$ então

$$V = 144 \Leftrightarrow \frac{1}{3} A_b \times h = 144 \Leftrightarrow$$

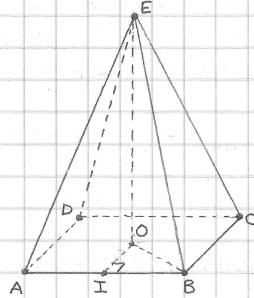
$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \overline{AB}^2 \times 12 = 144 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = \frac{144 \times 3}{12} \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{36} \Leftrightarrow \overline{AB} = 6$$



$$\overline{OB}^2 = 3^2 + 3^2 \Leftrightarrow \overline{OB}^2 = 9 + 9 \Leftrightarrow \overline{OB}^2 = 18 \Leftrightarrow \overline{OB} = \sqrt{18}$$



Então:

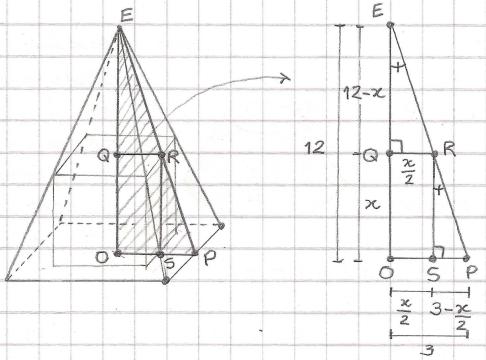
$$\begin{aligned} \overline{EB}^2 &= 12^2 + \sqrt{18}^2 \Leftrightarrow \overline{EB}^2 = 144 + 18 \Leftrightarrow \overline{EB}^2 = 162 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{EB} = \sqrt{162} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{EB} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 3^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{EB} = 3 \times 3 \times \sqrt{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{EB} = 9\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 162 \\ | \quad 2 \\ 81 \\ | \quad 3 \\ 27 \\ | \quad 3 \\ 9 \\ | \quad 3 \\ 3 \\ | \quad 3 \\ 1 \end{array}$$

$$\text{Logo } P_{\Delta[ABE]} = \overline{AB} + \overline{EB} + \overline{EA} \Leftrightarrow P_{\Delta[ABE]} = 6 + 9\sqrt{2} + 9\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_{\Delta[ABE]} = 6 + 18\sqrt{2} \quad //$$

6.3.2



x é a aresta do cubo

Como os triângulos $[EQR]$ e $[RSP]$ são semelhantes, tem-se que:

$$\frac{12-x}{\frac{x}{2}} = \frac{x}{\frac{3-x}{2}} \Leftrightarrow (12-x)(3-\frac{x}{2}) = x \times \frac{x}{2} \Leftrightarrow 36 - 12\frac{x}{2} - 3x + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 36 - 6x - 3x = 0 \Leftrightarrow 36 - 9x = 0 \Leftrightarrow -9x = -36 \Leftrightarrow x = \frac{-36}{-9} \Leftrightarrow x = 4$$

Logo $V_{cubo} = 4^3 \Rightarrow V_{cubo} = 64$ u.v.

7.1 Este sólido tem $4 \times 6 = 24$ faces $\in 8+6=14$ vértices $\in 12+6 \times 4 = 36$ arestas. A fórmula de Euler indica que $F+V=A+2$; neste sólido: $24+14=36+2 \Leftrightarrow 38=38$ prop. verdadeira

7.2 $V_{cubo} = A_{base} \times h \Leftrightarrow V_c = A_{\square} \times h$

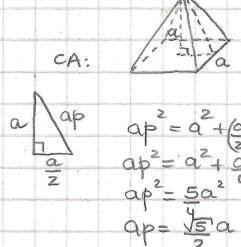
$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} A_{base} \times h \Rightarrow V_p = \frac{1}{3} A_{\square} \times h \Rightarrow V_{pirâmide} = \frac{1}{3} V_c$$

$$\text{Como } V_p = V_c + 6 \times V_{pirâmide} \Rightarrow V_p = V_c + 6 \times \frac{1}{3} V_c \Rightarrow V_p = 3V_c \Rightarrow \frac{V_p}{V_c} = 3$$

7.3 $A_{total\ cubo} = 6 \times A_{\square} \Rightarrow A_c = 6 \times A_{\square}$

$$A_{total\ pirâmide} = A_{\square} + A_{lateral} = A_{\square} + 4A_{\Delta} =$$

$$\begin{aligned} &= A_{\square} + 4 \times \frac{\alpha \times \sqrt{5}\alpha}{2} = \\ &= A_{\square} + 4 \times \frac{\sqrt{5}\alpha^2}{4} = \\ &= A_{\square} + \sqrt{5}A_{\square} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} ap^2 &= a^2 + (\frac{a}{2})^2 \\ ap^2 &= a^2 + \frac{a^2}{4} \\ ap^2 &= \frac{5a^2}{4} \\ ap &= \frac{\sqrt{5}}{2}a \end{aligned}$$

$$A_p = 6 \times A_{lateral} \Rightarrow A_p = 6 \times \sqrt{5}A_{\square}$$

Logo $\frac{A_p}{A_c} = \frac{6\sqrt{5}A_{\square}}{6A_{\square}} = \sqrt{5}$

7.4 $V_p = 192 \text{ cm}^3 \Leftrightarrow \text{como } \frac{V_p}{V_c} = 3 \Leftrightarrow \frac{192}{V_c} = 3 \Leftrightarrow V_c = \frac{192}{3} \Leftrightarrow V_c = 64 \text{ cm}^3$

$$\text{Como } V_c = a^3 \Leftrightarrow 64 = a^3 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{64} \Leftrightarrow a = 4 \text{ cm}$$

$$\text{Logo } A_c = 6 \times A_{\square} \Rightarrow A_c = 6 \times a^2 \Rightarrow A_c = 6 \times 4^2 \Rightarrow A_c = 96 \text{ cm}^2$$

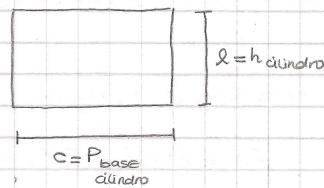
$$\text{Como } \frac{A_p}{A_c} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{A_p}{96} = \sqrt{5} \Leftrightarrow A_p = 96\sqrt{5} \text{ cm}^2$$

(4)

(8)

- (8.1) Falso, a intersecção dos dois planos é uma recta que contém o ponto V. e é paralela às rectas AD e BC.

(8.2.)



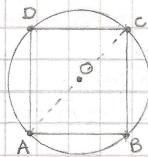
$$A_{\text{base}} = 8\pi \Rightarrow \pi R^2 = 8\pi \Rightarrow R^2 = 8 \Leftrightarrow R = \sqrt{8} \Rightarrow R = 2\sqrt{2} \text{ m}$$

$$\text{Então } P_{\text{base cilindro}} = 2\pi R \Leftrightarrow P_{\text{base cilindro}} = 2\pi \cdot 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_{\text{base cilindro}} = 4\pi\sqrt{2} \text{ m}$$

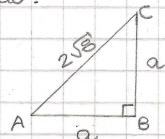
$$\text{Então } c = 4\pi\sqrt{2} \text{ e } l = 8 \text{ logo } P_{\square} = 4\pi\sqrt{2} + 4\pi\sqrt{2} + 8 + 8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P_{\square} = 8\pi\sqrt{2} + 16 \Leftrightarrow P_{\square} = 8(\sqrt{2}\pi + 2) \text{ m}$$

(8.3.)



Se a base quadrangular da pirâmide está inscrita na base circular do cilindro então o centro geométrico O do quadrado [ABCD] coincide com o centro da circunferência. Como o raio da circunferência era $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$ m (álgebra anterior) então $\bar{AC} = 2 \times \sqrt{8}$ m

Então:

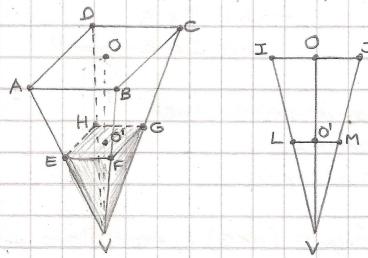


Pelo Teorema de Pitágoras:

$$a^2 + a^2 = (2\sqrt{8})^2 \Leftrightarrow 2a^2 = 2^2 \cdot 8 \Leftrightarrow 2a^2 = 4 \cdot 8 \\ \Leftrightarrow 2a^2 = 32 \Leftrightarrow a^2 = \frac{32}{2} \Leftrightarrow a^2 = 16 \Leftrightarrow a = \sqrt{16} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a = 4 \text{ m}$$

(8.4.)

- Consideremos a pirâmide [EFGHV], a parte da pirâmide [ABCDV] que se encontra tapada pelo líquido.



Os triângulos [IJV] e [LMV] são semelhantes logo, se $\bar{OV} = 8$ m e a altura do líquido é metade da altura do cilindro, então $\bar{O}'V = 4$ m. Também se $\bar{IJ} = 4$ m, então $\bar{LM} = 2$ m, ou seja, a aresta da base da pirâmide [EFGHV] tem 2 m.

Então, $V_{\text{cilindro "verde"}} = A_{\text{base}} \times h \Leftrightarrow V_{\text{cilindro "verde"}} = 8\pi \times 4 \Leftrightarrow V_{\text{cilindro "verde"}} = 32\pi \text{ m}^3$

$$V_{\text{pirâmide [EFGHV]}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times h \Leftrightarrow V_{\text{pir. [EFGHV]}} = \frac{1}{3} \times 2^2 \times 4 \Leftrightarrow V_{\text{pir. [EFGHV]}} = \frac{16}{3} \text{ m}^3$$

$$\text{Logo } V_{\text{líquido}} = V_{\text{cilindro "verde"}} - V_{\text{pir. [EFGHV]}} = 32\pi - \frac{16}{3} \approx 95,19763 \text{ m}^3$$

Como $1\text{m}^3 = 1000 \text{ dm}^3 \in 1\text{dm}^3 = 1\text{l}$ então $V_{\text{líquido}} \approx 95198 \text{ l}$

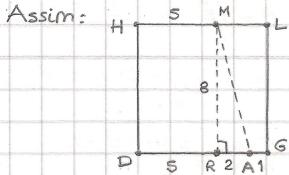
9)

9.1 Se $PG = 8$ então $V_{cubo} = 8^3 \Rightarrow V_{cubo} = 512$ u.v.

Como $V_{paral.} = \frac{5}{8} V_{cubo}$ então $V_{paral.} = \frac{5}{8} \times 512 \Rightarrow V_{paral.} = 320$ u.v

Então $V_{paral.} = 320 \Leftrightarrow \overline{HN} \times \overline{HM} \times \overline{MJ} = 320 \Leftrightarrow 8 \times \overline{HM} \times 8 = 320 \Leftrightarrow \overline{HM} = 5$ u.m

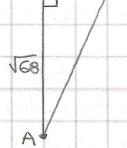
Assim:



Pelo Teor. de Pitágoras:

$$\overline{AM}^2 = 8^2 + 2^2 \Rightarrow \overline{AM}^2 = 64 + 4 \Rightarrow \overline{AM} = \sqrt{68}$$

Também:

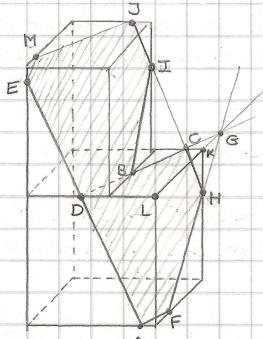


Pelo Teor. de Pitágoras:

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 \Rightarrow \overline{AB}^2 = 64 + 16 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{80} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{2^2 \times 21} \Rightarrow \overline{AB} = 2\sqrt{21}\end{aligned}$$

84		2
42		2
21		3
7		7
1		

9.2



- Unir $B \in C$
- Ponto D
- Unir $A \in D$
- Ponto E
- $[AF] \parallel [BC]$
- Intersecção de BC com $LK \rightarrow$ ponto G
- Recta FG \rightarrow ponto H
- Unir $H \in C$
- Pontos I \in J
- $[MJ] \parallel [BC]$
- Unir M \in E
- Unir I \in B

9.3.

HL e FL são concorrentes perpendiculares

HP e GL são não complanares

HN e DK são concorrentes obliquas

9.4.

$\hat{KHG} = 60^\circ$ porque o triângulo $[HKG]$ é equilátero — $[HK] = [KG] = [GH]$ são diagonais das faces do cubo logo têm igual medida de comprimento

$\hat{PMQ} = 45^\circ$ porque $[APJM]$ é um quadrado e $[PM]$ é uma diagonal logo faz um ângulo de 45° com o lado $[MQ]$ do quadrado.

10.

10.1.

$$V_{octaedro} = 2 \times V_{pirâmide quadrangular} = 2 \times \frac{1}{3} A_{base} \times h$$

Podemos concluir que $A_{base} = \frac{1}{2} A_{face\ cubo}$ pois:



(vista de cima)

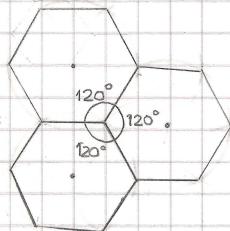
(5)

$$\text{Também } h = \frac{1}{2} \text{ aresta cubo}$$

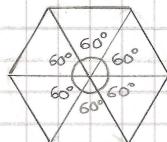
$$\begin{aligned}\text{Então V octaedro} &= \cancel{\frac{1}{3}} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} A_{\text{face cubo}} \times \frac{1}{2} \text{ aresta cubo} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} (A_{\text{face cubo}} \times \text{aresta cubo}) = \\ &= \frac{1}{6} V_{\text{cubo}}\end{aligned}$$

(10.2) A composição deverá contemplar os seguintes pontos:

- Se as faces fossem polígonos regulares com um número de lados superior a 5, por exemplo, 6, ou seja, hexágonos regulares e como o ângulo interno de um hexágono regular tem amplitude 120° , ao juntar 3 hexágonos num vértice o ângulo formado seria $3 \times 120^\circ = 360^\circ$, isto é, haveria lugar a uma planificação, o que tornaria impossível a construção de um poliedro.



- Se concorressem 6 triângulos equiláteros num vértice e como o ângulo interno de um triângulo equilátero tem amplitude 60° , o ângulo formado seria $6 \times 60^\circ = 360^\circ$, isto é, haveria lugar a uma planificação, o que tornaria impossível a construção de um poliedro.



- Se concorressem 4 quadrados num vértice ou 4 pentágonos regulares num vértice e como os ângulos internos desses polígonos têm amplitudes 90° e 108° , respetivamente, o ângulo formado seria $4 \times 90^\circ = 360^\circ$ ou $4 \times 108^\circ = 432^\circ$, o que, em qualquer uma das situações, tornaria impossível a construção de um poliedro.

