

Matemática A - 10º ano  
Itens do GAVE - Proposta de Resolução - Fevereiro 2010

① Se  $\overline{AP} = x$  então  $\overline{BP} = 10 - x$  logo a área do quadrado de lado  $[\overline{AP}]$  é  $x^2$  e a área do quadrado de lado  $[\overline{BP}]$  é  $(10-x)^2$ . Então  $a(x) = x^2 + (10-x)^2$ .

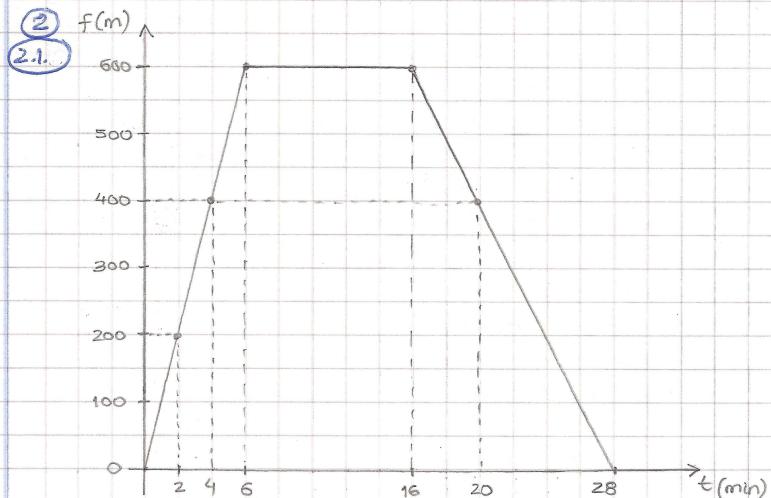
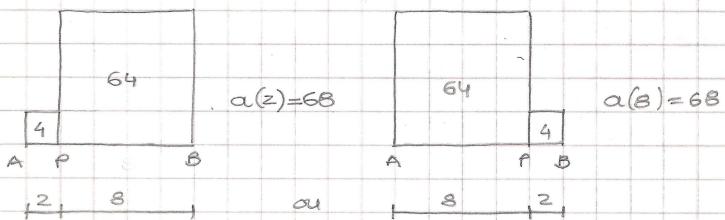
1.1 se  $x=2 \Leftrightarrow \overline{AP}=2 \Leftrightarrow \overline{BP}=10-2=8$   
 A área do quadrado de lado  $[\overline{AP}]$  é  $2^2=4$  e do quadrado de lado  $[\overline{BP}]$  é  $8^2=64$ . Então  $a(2)=4+64=68$

1.2  $D_a = ]0; 10[$

1.3  $a(x) = x^2 + (10-x)^2 \Leftrightarrow a(x) = x^2 + (10^2 - 2 \cdot 10 \cdot x + x^2) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow a(x) = x^2 + 100 - 20x + x^2 \Leftrightarrow a(x) = 2x^2 - 20x + 100$

1.4  $a(x) = a(z) \Leftrightarrow a(x) = 68 \Leftrightarrow 2x^2 - 20x + 100 = 68 \Leftrightarrow 2x^2 - 20x + 32 = 0$   
 $\Leftrightarrow x=8 \vee x=2$

Se  $x=\overline{AP}=2$  então  $\overline{BP}=10-2=8$  e se  $x=\overline{AP}=8$  então  $\overline{BP}=10-8=2$ ; para qualquer um dos casos a soma das áreas dos dois quadrados é igual a 68.



2.1.2  $D = [0; 28] \in D' = [0; 600]$

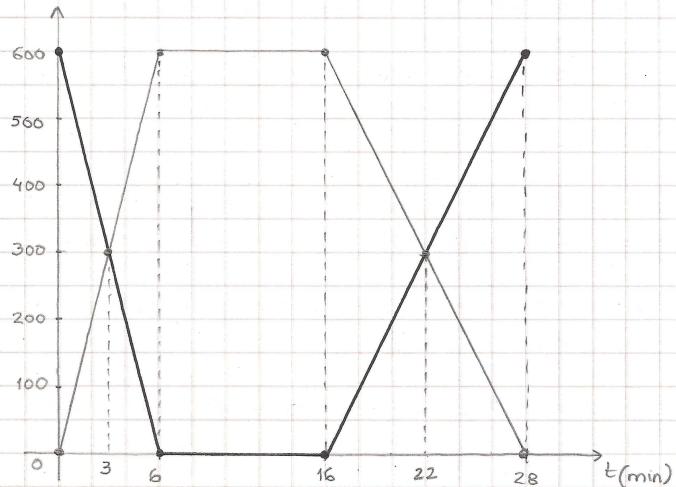
2.1.3  $f(2) = 200\text{ m}$

Às 9h02 min o Rui estava a 200 metros de casa.

**2.1.4** A equação  $f(t) = 600$  representa os instantes em que a distância de Rui a casa é de 600 metros, ou seja, o intervalo de tempo em que o Rui esteve no café.  
 $CS = [6; 16]$

**2.1.5**  $f(t) = 400 \Leftrightarrow t \in \{4; 20\}$

**2.2.1**



**2.2.2**  $f(t) = g(t)$

A equação representa os instantes em que a distância de Rui a casa é ao café é igual.  
 $CS = \{3, 22\}$

**3.**

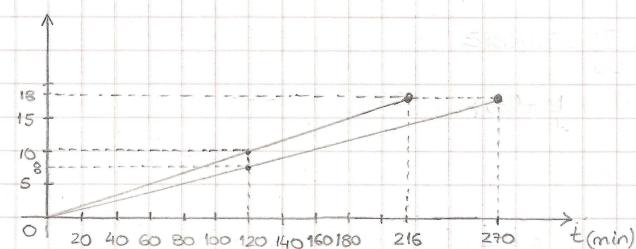
**3.1.** A opção (A) não é a opção correcta porque  $f(0) > 0$  e é função crescente o que não faz sentido quer seja porque, no instante inicial, a distância percorrida pela Rita é zero, mas também porque a distância percorrida por ela aumenta com o passar do tempo e não diminui.

A opção (B) não é a opção correcta porque a distância percorrida pelas duas raparigas tem que ser igual, ou seja, os comutadores das funções  $f$  e  $g$  têm que ser iguais, não levando no entanto, necessariamente, o mesmo tempo a percorrer-la.

A opção (D) não é a correcta porque o gráfico da função  $f$  deve conter a origem do referencial, uma vez que as duas raparigas saíram de casa à mesma hora.

A opção (C) É a única possível nas condições do problema.

**3.2**



Se a Rita se deslocou a uma velocidade constante de 5km/h, ou seja:  
 $\frac{5}{60} \text{ km/min} = \frac{1}{12} \text{ km/min}$ , então:

$$f(t) = \frac{1}{12}t \quad \Leftrightarrow f(t) = 18 \Rightarrow \frac{1}{12}t = 18 \Rightarrow t = 216 \text{ min}$$

ou seja, a Rita demora 216 min a chegar a Altavila.

Se a Inês levou mais 54 min então demorou  $216 + 54 = 270$  min e por isso caminhou a uma velocidade de:

$$\begin{array}{ccc} 18 \text{ Km} & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & 270 \text{ min} \\ x & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & 60 \text{ min} \end{array}$$

$$x = \frac{18 \times 60}{270} = 4$$

$$4 \text{ Km/h} = \frac{4}{60} \text{ km/h} = \frac{1}{15} \text{ km/min}$$

Então:

$$g(t) = \frac{1}{15}t$$

As duas raias que cruzam-se quando a distância percorrida por uma é igual à distância que falta percorrer à outra, ou seja:

$$\begin{aligned} f(t) &= 18 - g(t) \Rightarrow \\ \frac{1}{12}t &= 18 - \frac{1}{15}t \Rightarrow \frac{1}{12}t + \frac{1}{15}t = 18 \Rightarrow \frac{5t + 4t}{60} = 18 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 9t = 18 \times 60 \Rightarrow 9t = 1080 \Rightarrow t = 120 \text{ min}$$

Então elas cruzaram-se 120 minutos depois de saírem de casa e a Rita tinha percorrido  $f(120) = \frac{1}{12} \times 120 = 10$  km e por isso estava

a 8km de Altavila.

(4)

4.1.1  $v(t)$  representa o volume de água no depósito, em  $\text{dm}^3$ , um minuto depois de começar o enchimento.

$v(t)$  representa o volume de água no depósito, em  $\text{dm}^3$ ,  $t$  minutos depois do início do enchimento

4.1.2

$$\begin{aligned} V_{\text{depósito}} &= 5 \times 5 \times 12 = 300 \text{ dm}^3 \\ \text{Logo } D'v &= [0; 300] \end{aligned}$$

$$0,5 \text{ m} = 5 \text{ dm}$$

$$1,2 \text{ m} = 12 \text{ dm}$$

4.1.3

Se o caudal da torneira é de  $20 \text{ dm}^3$  por minuto então o depósito demora  $\frac{300}{20} = 15$  minutos a encher, então  $D_v = [0, 15]$

4.1.4

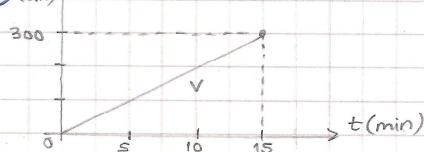
$v(t) = 300$  representa, em minutos, o tempo necessário para que o volume de água no depósito seja  $300 \text{ dm}^3$ , ou seja, para que esteja cheio.

4.1.5

Se o caudal da torneira é constante e de  $20 \text{ dm}^3$  por minuto então

$$v(t) = 20t$$

4.1.6



**4.1.7.** Se o caudal da torneira é de  $20 \text{ dm}^3$  por minuto e a área da base do depósito é  $5 \times 5 = 25 \text{ dm}^2$ , então, por cada minuto que passa, a altura de água no depósito aumenta  $\frac{20}{25} = 0,8 \text{ dm}$ . Então, se a altura do depósito é  $12 \text{ dm}$ , ao

final de  $\frac{12}{0,8} = 15$  minutos, a água atingirá a altura máxima.

$$\text{Assim } D_h = [0; 15] \quad \text{e } D'_h = [0, 12]$$

**4.1.8.** Segundo o raciocínio anterior,  $h(t) = 0,8t$ .

$$4.2 \quad v(t) = c \times t \quad \leftarrow h(t) = k \times t$$

**4.2.1.**  $c$  representa o caudal da torneira, em  $\text{dm}^3$  por minuto, ou seja, a velocidade de enchimento do depósito

**4.2.2.**  $\frac{c}{k}$  representa a área da base do depósito, em  $\text{dm}^2$ ; no exemplo anterior,  $\frac{20}{0,8} = 25 \text{ dm}^2$ .

**5.**  $y = 11,86 - 1,46x$        $x$  preço de venda da ração (por kg) em €  
 $y$  quantidade de ração vendida num mês  
 (em t)

Precio de venda da $x$	Quantidade de ração vendida pelo modelo $y = 11,86 - 1,46x$	Quantidade de ração vendida	Desvio
2,00	$11,86 - 1,46 \times 2 = 8,94$	8,9	$ 8,94 - 8,9  = 0,04$
2,50	$11,86 - 1,46 \times 2,5 = 8,21$	8,3	$ 8,21 - 8,3  = 0,09$
3,00	$11,86 - 1,46 \times 3 = 7,48$	7,4	$ 7,48 - 7,4  = 0,08$
3,50	$11,86 - 1,46 \times 3,5 = 6,75$	6,9	$ 6,75 - 6,9  = 0,15$
4,00	$11,86 - 1,46 \times 4 = 6,02$	5,9	$ 6,02 - 5,9  = 0,12$
4,50	$11,86 - 1,46 \times 4,5 = 5,29$	5,3	$ 5,29 - 5,3  = 0,01$
5,00	$11,86 - 1,46 \times 5 = 4,56$	4,6	$ 4,56 - 4,6  = 0,04$

**5.2.**  $x$  é a variável independente e  $y$  a variável dependente

**5.3.**

**5.3.1.**  $x = 2,30 \text{ €/kg}$        $y = 11,86 - 1,46 \times 2,30$   
 $y \approx 8,5 \text{ t}$

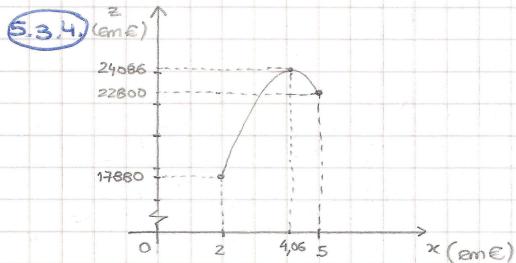
**5.3.2.**  $y = 8 \Rightarrow 11,86 - 1,46x = 8 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow -1,46x = 8 - 11,86 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow -1,46x = -3,86 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x = \frac{-3,86}{-1,46} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x \approx 2,64 \text{ €}$

**5.3.3.** A receita da empresa, num mês, é obtida pelo produto da quantidade de ração vendida, em toneladas, pelo

respetivo preço, da tonelada.  
Então

$$z = (11,86 - 1,46x) \times 1000x$$

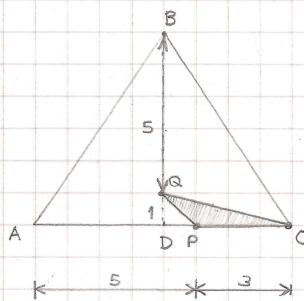
(se  $x$  é o preço de venda de 1 kg de rango,  $1000x$  será o preço de 1 tonelada)



O preço de venda deverá ser, aproximadamente, 4,06 € por kg.

6

6.1



$$\begin{aligned} x &= 5 = QB \\ a(s) &= A_{\Delta PQC} = \frac{\overline{QD} \times \overline{PC}}{2} = \frac{(6-x)(B-x)}{2} = \\ &= \frac{1 \times 3}{2} = 1,5 \end{aligned}$$

6.2

$$D_a = [0; 6]$$

$$\text{se } x = 0, \quad a_0 = A_{\Delta ABC} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{2} = \frac{8 \times 6}{2} = 24$$

se  $x \rightarrow 6^-$ ,  $A_{\Delta} \rightarrow 0^+$  ou seja, se  $x$  se aproxima de 6, a área do triângulo  $[PQC]$  tende para zero.

Como a área vai diminuindo sempre, à medida que  $x$  aumenta,  $D'_a = ]0; 24]$

6.3

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{b \times a}{2} \Rightarrow a(x) = \frac{\overline{PC} \times \overline{QD}}{2} \Rightarrow a(x) = \frac{(8-x)(6-x)}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow a(x) = \frac{48 - 8x - 6x + x^2}{2} \Rightarrow a(x) = \frac{x^2 - 14x + 48}{2} \end{aligned}$$

7

$$D_f = D_g = [-6; 6]$$

$$D'_f = [-1; 3] \in D'_g = [-2; 0]$$

$$7.3.1 \quad CS = \{-2\}$$

$$7.3.2 \quad \text{Equação impossível} \quad CS = \{\}$$

$$7.3.3 \quad CS = \{-3, 3\}$$

$$7.3.4 \quad CS = [1; 6]$$

$$7.3.5 \quad CS = [-6; 0[$$

$$7.3.6 \quad CS = \{0\}$$

$$7.3.7 \quad CS = [-6; -3[ \cup ]3; 6]$$

$$7.3.8 \quad CS = \{0; 3\}$$

$$7.3.9 \quad CS = [-6; 0[ \cup ]3; 6]$$