



Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 16.03.2012

10.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de março

Na sua folha de respostas, indique de forma legível a versão do teste.

Formulário

Geometria

Perímetro do círculo: $2\pi r$, sendo r o raio do círculo

Áreas

Paralelogramo: $Base \times Altura$

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Círculo: πr^2 , sendo r o raio do círculo

Volumes

Prisma e cilindro: $Área\ da\ base \times Altura$

Pirâmide e cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Relações métricas notáveis

A diagonal de um quadrado de lado a é igual a $\sqrt{2}a$

A diagonal espacial de um cubo de aresta a é igual a $\sqrt{3}a$

A altura de um triângulo equilátero de lado a é igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreva na sua folha de respostas apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que selecionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos, nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[OPQRSTU]$ de aresta 2. Os pontos, P , R e T pertencem aos semieixos positivos.

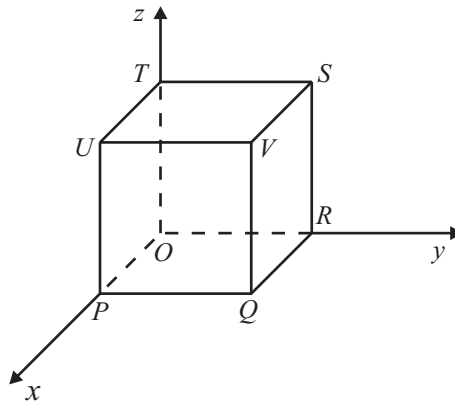


Figura 1

Numa das opções seguintes estão as coordenadas de um ponto pertencente a uma das arestas do cubo.

Em qual?

- (A) $(1, 1, 2)$ (B) $(1, 2, 0)$ (C) $(0, 1, 1)$ (D) $(1, 1, 1)$

2. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta t definida por

$$(x, y, z) = (-1, 2, 3) + k(0, 1, 0), \quad k \in \mathbb{R}$$

Qual das condições seguintes também define a reta t ?

- (A) $x = -1 \wedge y = 2$ (B) $y = 2 \wedge z = 3$
(C) $x = -1 \wedge z = 3$ (D) $x = 0 \wedge z = 0$

3. Na Figura 2, estão representadas graficamente as funções f e g , de domínio \mathbb{R} , definidas, respetivamente, por $f(x) = x^2$ e $g(x) = |x|$

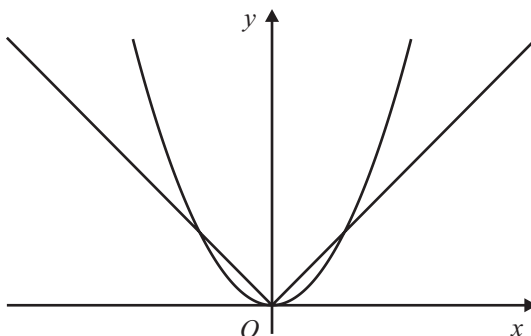


Figura 2

Qual dos conjuntos seguintes é o conjunto solução da inequação $f(x) < g(x)$?

- (A) $] -1, 0[\cup] 0, 1[$ (B) $] -1, 0[\cup] 1, +\infty[$
(C) $] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$ (D) $] -\infty, -1[\cup] 0, 1[$
4. Na Figura 3, estão representadas, num referencial o.n. xOy , duas semirretas de origem no ponto de coordenadas $(-1, 0)$, cuja união é o gráfico de uma função h , de domínio \mathbb{R}

Uma das semirretas intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 1

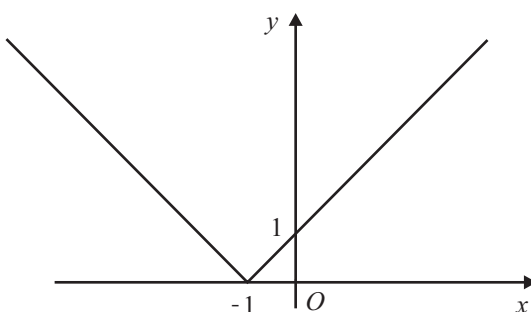


Figura 3

Qual das expressões seguintes pode definir a função h ?

- (A) $h(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{se } x < 0 \\ x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ (B) $h(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{se } x < 0 \\ x - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
(C) $h(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{se } x < -1 \\ x - 1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$ (D) $h(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{se } x < -1 \\ x + 1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$

5. Na Figura 4, está representado, num referencial o. n. xOy , o gráfico de uma função f , de domínio $]-2, 2[$

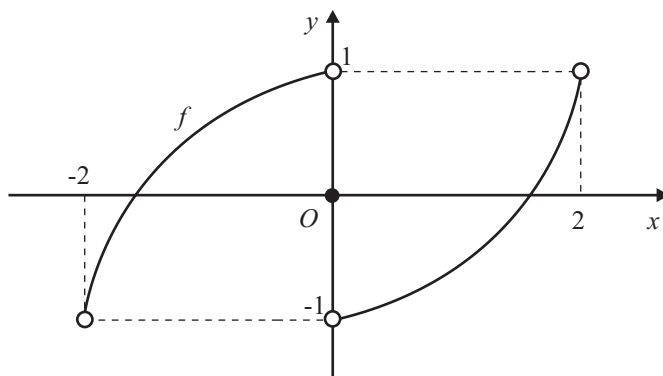


Figura 4

Em qual das opções seguintes estão três afirmações verdadeiras acerca da função f ?

(A)

- Tem três zeros.
- Não tem máximos nem mínimos.
- Não é par.

(B)

- Tem exatamente dois zeros.
- Não tem máximos nem mínimos.
- É crescente no seu domínio.

(C)

- Tem máximo e tem mínimo.
- É crescente no seu domínio.
- O contradomínio é $]-1, 1[$

(D)

- É par.
- Tem exatamente dois zeros.
- O contradomínio é $]-1, 1[$

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

1. Considere, num referencial o.n. xOy :

- a reta r , definida pela equação $y = 2x - 1$
- o ponto A de coordenadas $(0, -2)$

1.1. Escreva uma equação vetorial da reta r

1.2. Escreva a equação reduzida da reta paralela à reta r que passa no ponto A

1.3. Na Figura 5, estão representados a reta r , o ponto A e a circunferência que tem centro no ponto A e que passa em O

Defina, por uma condição, a região representada a sombreado, incluindo a sua fronteira.

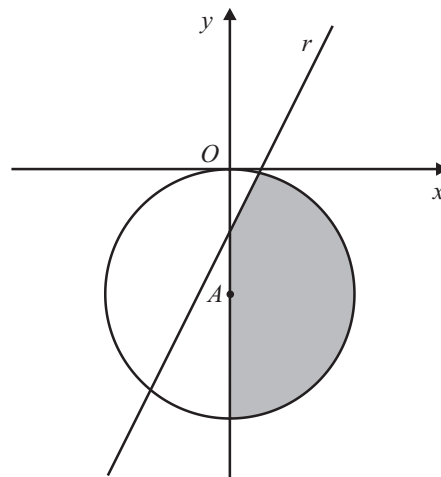


Figura 5

2. Na Figura 6, está representada uma peça metálica plana na qual se marcou a tracejado um quadrado $[ABCD]$ com 3 dm de lado.

Na Figura 7, está representada a peça metálica que se obteve a partir da primeira peça, cortando e retirando o quadrado $[EFGH]$

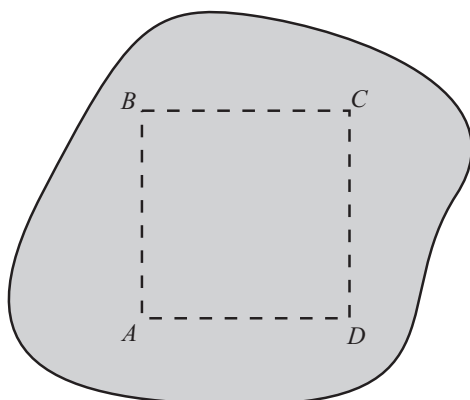


Figura 6

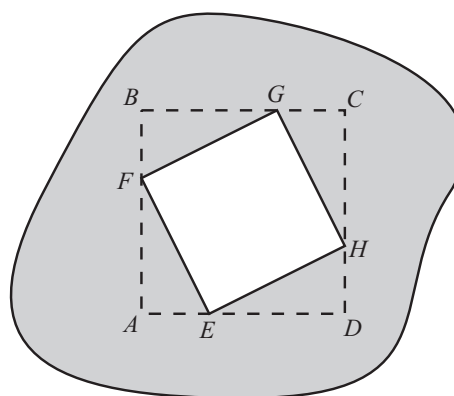


Figura 7

Relativamente à Figura 7, sabe-se que:

- cada vértice do quadrado $[EFGH]$ pertence a um lado do quadrado $[ABCD]$
- os quatro triângulos retângulos $[EDH]$, $[HCG]$, $[GBF]$ e $[FAE]$ são geometricamente iguais e, em cada um deles, o cateto maior é igual ao dobro do cateto menor.

2.1. Mostre que a área do quadrado $[EFGH]$ é 5 dm^2

- 2.2. Na Figura 8, está representada uma pirâmide quadrangular regular $[IJKLV]$ cuja base tem 45 dm^2 de área e cuja altura é 12 dm

Sobre esta pirâmide deixou-se descair a peça metálica representada na Figura 7, de tal modo que esta peça ficou paralela à base da pirâmide e os vértices do quadrado $[EFGH]$ ficaram sobre as arestas laterais da pirâmide.

Determine a distância, d , em dm , entre a peça metálica e a base da pirâmide.

Nota – Admita que a espessura da peça metálica é desprezável e tenha em conta que a área do quadrado $[EFGH]$ é 5 dm^2

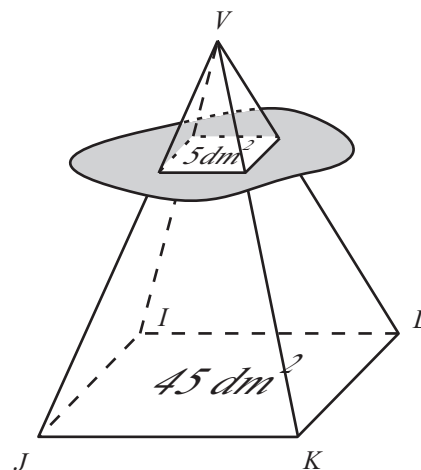


Figura 8

3. Na Figura 9, está representada, num referencial o.n. xOy , parte da parábola que é o gráfico de uma função f

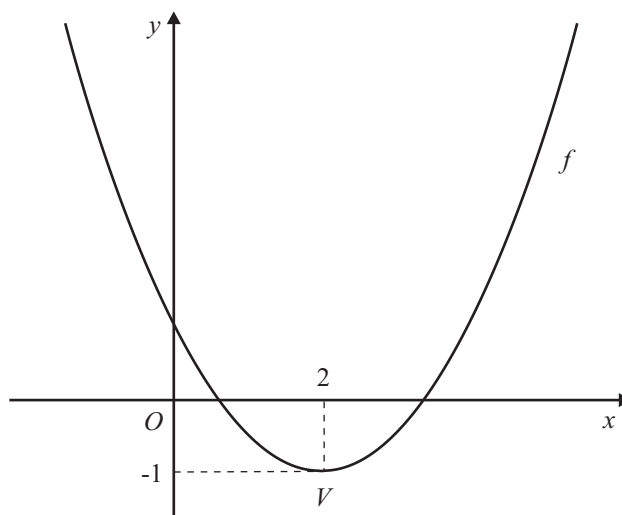


Figura 9

Sabe-se que:

- a parábola intersecta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 1)$
- o ponto V , vértice da parábola, tem coordenadas $(2, -1)$

- 3.1. Sejam g , h e j as funções, de domínio \mathbb{R} , definidas, respetivamente, por $g(x) = -f(x)$, $h(x) = f(x) + 3$ e $j(x) = f(x - 1)$

Indique os contradomínios das funções f , g , h e j

Nota – Não necessita de apresentar cálculos.

- 3.2. A função f pode ser definida por uma expressão do tipo $f(x) = a(x - h)^2 + k$, onde a , h e k são números reais.

Indique o valor de h e o valor de k , e determine o valor de a

4. Na Figura 10, estão representadas, num referencial o.n. xOy , as retas r e t .
Os pontos A e B são, respetivamente, os pontos de intersecção das retas r e t com o eixo Ox .
O ponto C é o ponto de intersecção das retas r e t .

Sabe-se que:

- a reta r é definida pela equação $x = -1$
- a reta t é definida pela equação $y = -2x + 8$

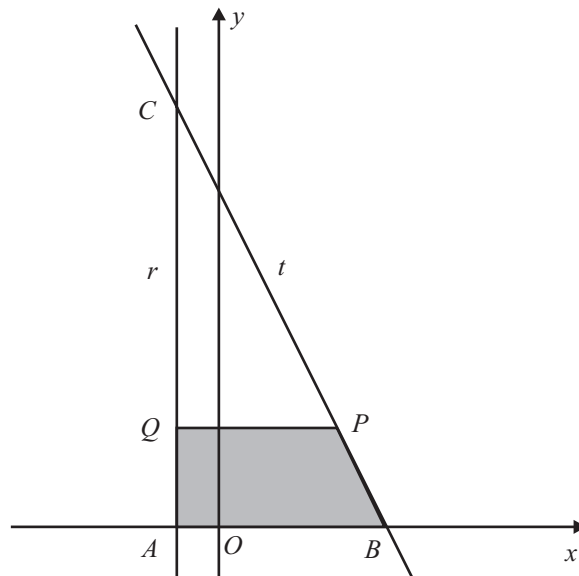


Figura 10

Considere que um ponto P se desloca ao longo do segmento de reta $[BC]$, nunca coincidindo com o ponto B , nem com o ponto C , e que um ponto Q se desloca ao longo do segmento de reta $[AC]$, acompanhando o movimento do ponto P , de forma que a ordenada do ponto Q seja sempre igual à ordenada do ponto P .

Seja x a abcissa do ponto P .

Resolva os dois itens seguintes, **usando exclusivamente métodos analíticos**.

- 4.1. Mostre que a área do trapézio $[ABPQ]$ é dada, em função de x , por

$$S(x) = -x^2 - 2x + 24 \quad (x \in]-1, 4[)$$

- 4.2. Determine os valores de x para os quais a área do trapézio $[ABPQ]$ é superior a 21.

Apresente a sua resposta na forma de um intervalo de números reais.

Nota – Tenha em conta que $S(x) = -x^2 - 2x + 24 \quad (x \in]-1, 4[)$

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1.	10 pontos
2.	10 pontos
3.	10 pontos
4.	10 pontos
5.	10 pontos
	<hr/>
	50 pontos

GRUPO II

1.	
1.1.	15 pontos
1.2.	15 pontos
1.3.	20 pontos
2.	
2.1.	15 pontos
2.2.	15 pontos
3.	
3.1.	15 pontos
3.2.	15 pontos
4.	
4.1.	20 pontos
4.2.	20 pontos
	<hr/>
	150 pontos

TOTAL **200 pontos**