

TESTE INTERMÉDIO

11.º Ano de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

Duração da Prova: **90 minutos**

10/Maio/2007

MATEMÁTICA A

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação da prova.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

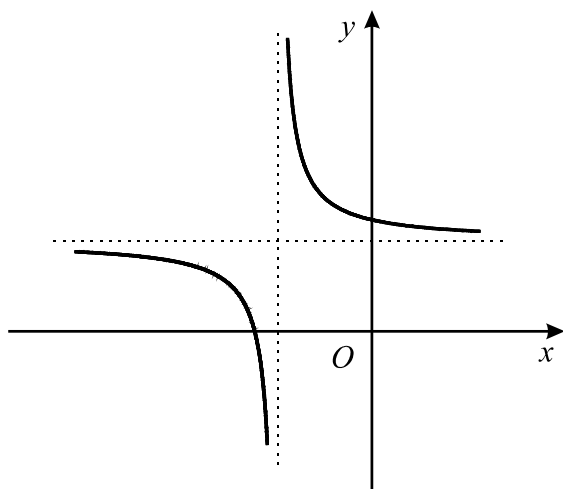
O Grupo I inclui sete itens de escolha múltipla.

O Grupo II inclui três itens de resposta aberta, subdivididos em alíneas, num total de sete.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Para um certo valor de a e para um certo valor de b , a expressão $f(x) = a + \frac{1}{x-b}$ define a função f cujo gráfico está parcialmente representado na figura.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $a > 0 \wedge b > 0$

(B) $a > 0 \wedge b < 0$

(C) $a < 0 \wedge b > 0$

(D) $a < 0 \wedge b < 0$

2. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $\frac{x^2 + 1}{2 - x} < 0$

- (A) $] - 1, 2[$ (B) $] 1, 2[$ (C) $] - \infty, 2[$ (D) $] 2, + \infty[$

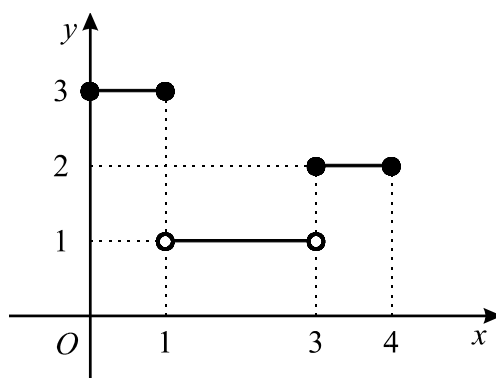
3. Considere as seguintes funções:

$f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ definida pela tabela

x	1	2	3
$f(x)$	3	1	2

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 2x + 1$

$h : [0, 4] \rightarrow \{1, 2, 3\}$ cujo gráfico é



Indique o valor de $f^{-1}(2) + (g \circ h)(\sqrt{2})$

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

4. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = 1 - x^2$

Seja t a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $\frac{1}{2}$

Qual é a inclinação da recta t ?

- (A) 30° (B) 45° (C) 135° (D) 150°

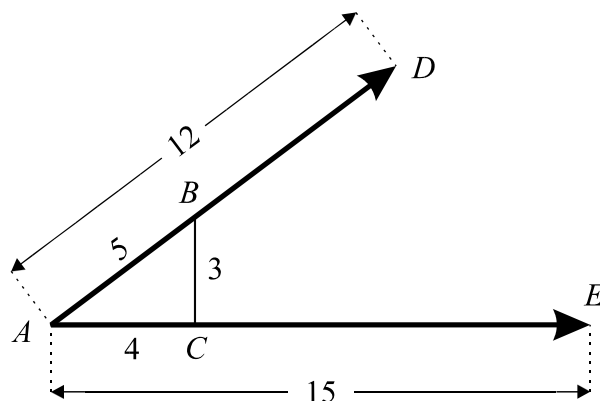
5. Na figura estão representados dois vectores, \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{AE} , de normas 12 e 15, respectivamente.

No segmento de recta $[AD]$ está assinalado um ponto B .

No segmento de recta $[AE]$ está assinalado um ponto C .

O triângulo $[ABC]$ é rectângulo e os seus lados têm 3, 4 e 5 unidades de comprimento.

Indique o valor do produto escalar $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$



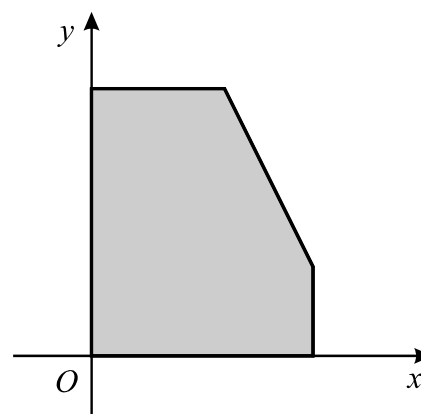
- (A) 108 (B) 128 (C) 134 (D) 144

6. Indique as soluções da equação $5 + 2 \cos x = 6$ que pertencem ao intervalo $[0, 2\pi]$

- (A) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$
 (C) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$

7. Na figura junta está representada a região admissível de um problema de Programação Linear. Esta região corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 5 \\ y \leq 6 \\ 2x + y \leq 12 \end{cases}$$



Qual é o valor máximo que a função objectivo, definida por $z = x + y$, pode alcançar nesta região?

- (A) 7 (B) 9 (C) 11 (D) 13

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Durante os ensaios de um motor, a velocidade de rotação do seu eixo variou, ao longo dos primeiros oito minutos da experiência, de acordo com a função

$$v(t) = t^3 - 15t^2 + 63t$$

onde t designa o tempo (medido em minutos), contado a partir do início da experiência, e $v(t)$ designa a velocidade de rotação do eixo do motor (medida em **centenas** de rotações por minuto).

1.1. **Sem recorrer à calculadora**, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, determine qual foi a velocidade máxima atingida, nos primeiros oito minutos da experiência. Apresente o resultado em centenas de rotações por minuto.

1.2. Recorrendo às **capacidades gráficas da calculadora**, determine durante quanto tempo é que, nos primeiros oito minutos da experiência, a velocidade de rotação do eixo do motor foi superior a 6 000 rotações por minuto. Escreva o **resultado final em minutos e segundos** (com o número de segundos arredondado às unidades). Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtidos, bem como as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução do problema (apresente as **abscissas com duas casas decimais**).

2. Considere, em referencial o.n. $Oxyz$, o ponto $P(0, 4, 3)$

2.1. Seja α o plano que contém o ponto P e é perpendicular à recta de equação vectorial $(x, y, z) = (0, 1, -3) + k(1, 0, 2)$, $k \in \mathbb{R}$. Determine a área da secção produzida pelo plano α na esfera definida pela condição $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 4)^2 \leq 3$.

Sugere-se que:

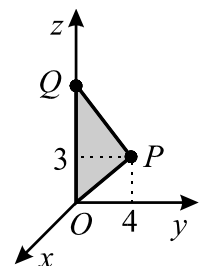
- Determine uma equação do plano α .
- Mostre que o centro da esfera pertence ao plano α .
- Atendendo ao ponto anterior, determine a área da secção.

2.2. Admita que um ponto Q se desloca ao longo do semieixo positivo Oz , nunca coincidindo com a origem O do referencial.

Seja f a função que faz corresponder, à cota z do ponto Q , o perímetro do triângulo $[OPQ]$.

2.2.1. Mostre que $f(z) = z + 5 + \sqrt{z^2 - 6z + 25}$

2.2.2. **Sem recorrer à calculadora**, determine a cota do ponto Q de modo que o perímetro do triângulo $[OPQ]$ seja igual a 16.



3.

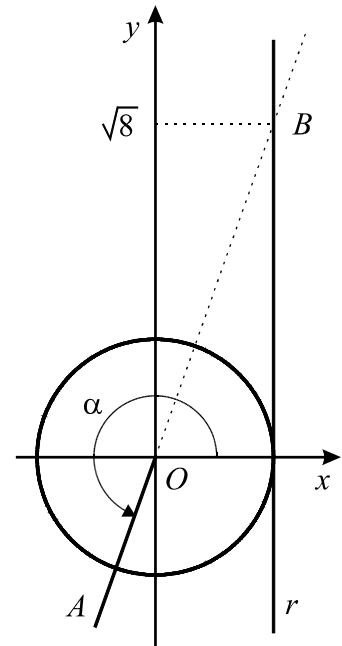
3.1. Na figura junta estão representados, em referencial o. n. xOy :

- o círculo trigonométrico
- a recta r , de equação $x = 1$
- o ângulo, de amplitude α , que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semi-recta $\hat{O}A$
- o ponto B , intersecção do prolongamento da semi-recta $\hat{O}A$ com a recta r .

Como a figura sugere, a ordenada de B é $\sqrt{8}$

Sem recorrer à calculadora, determine o valor de

$$5 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + 2 \cos (3\pi - \alpha)$$



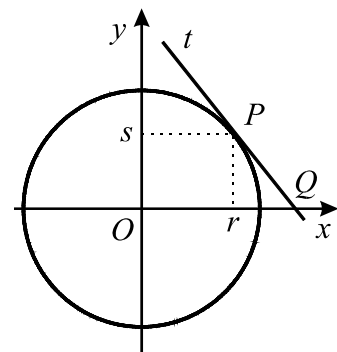
3.2. Considere agora um ponto P , do primeiro quadrante (eixos não incluídos), pertencente à circunferência de centro na origem e raio 1.

Sejam (r, s) as coordenadas do ponto P .

Seja t a recta tangente à circunferência no ponto P .

Seja Q o ponto de intersecção da recta t com o eixo Ox .

Prove que a abcissa do ponto Q é $\frac{1}{r}$



FIM

COTAÇÕES

Grupo I 63

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada..... 0
Cada questão não respondida ou anulada 0

Grupo II 137

1. 40

1.1.20

1.2.20

2. 57

2.1. 19

2.2. 38

2.2.1. 19

2.2.2. 19

3. 40

3.1.20

3.2.20

TOTAL 200