Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 6.05.2008

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

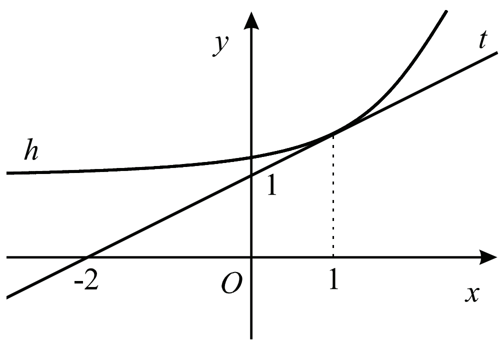
Na sua folha de respostas, indique claramente a versão do teste. A ausência dessa indicação implica a classificação das respostas aos itens de escolha múltipla com zero pontos.

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- Se apresentar mais do que uma letra, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Na figura estão representadas, em referencial o.n. xOy:

- parte do gráfico de uma função h
- uma recta t, tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 1

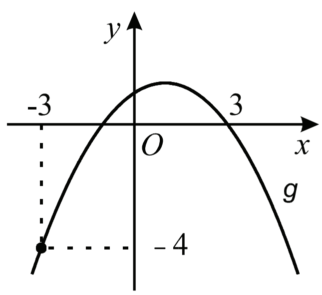


Tal como a figura sugere, a recta t intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -2 e o eixo Oy no ponto de ordenada 1.

Indique o valor de $h'(1)$, derivada da função h no ponto 1

(A) -2 **(B)** $-\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** 2

2. Na figura está representada parte do gráfico de uma função g



Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$

Qual é o valor de $(f \circ g)(-3)$?

(A) -4 **(B)** 0 **(C)** 3 **(D)** 4

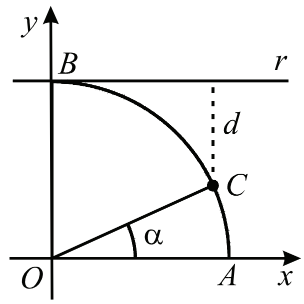
3. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, um arco de circunferência AB, de centro na origem do referencial e raio igual a 1.

A recta r tem equação $y = 1$

O ponto C pertence ao arco AB

Seja α a amplitude do ângulo AOC

Qual das expressões seguintes dá a distância d do ponto C à recta r ?



(A) $1 + \text{sen}(\alpha)$ **(B)** $1 - \text{sen}(\alpha)$

(C) $1 + \cos(\alpha)$ **(D)** $1 - \cos(\alpha)$

4. Seja $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Qual das expressões seguintes designa um número positivo?

(A) $\cos(\pi - x)$ **(B)** $\text{sen}(\pi - x)$

(C) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ **(D)** $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a recta r definida por $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k\,(0, 0, 1),\ k \in \mathbb{R}$

Qual das condições seguintes define uma recta paralela à recta r ?

(A) $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k\,(0, 1, 0),\ k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z) = (0, 0, 1) + k\,(1, 2, 3),\ k \in \mathbb{R}$

(C) $x = 2 \ \wedge \ y = 1$

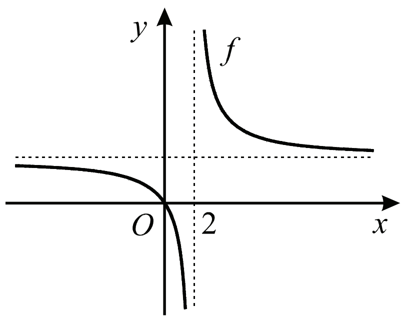
(D) $x = 2 \ \wedge \ z = 1$

Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f, bem como as duas assimptotas deste gráfico.



Tal como a figura sugere,

- a origem do referencial pertence ao gráfico de f
- uma das assimptotas é paralela ao eixo Ox
- a outra assimptota é paralela ao eixo Oy e intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa 2

1.1. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 3x + 9$

Tendo em conta o gráfico de f e a expressão analítica de g, **resolva** a inequação $f(x) \times g(x) \leq 0$, **completando** a seguinte tabela de variação de sinal, que deve **transcrever** para a sua folha de prova:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	
$g(x)$	
$f(x) \times g(x)$	

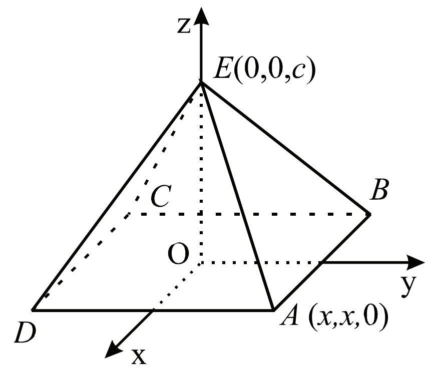
Apresente o **conjunto solução** da inequação utilizando a notação de intervalos de números reais.

1.2. Admita agora que:

- a assimptota do gráfico de f paralela ao eixo das abcissas tem equação $y = 3$
- f é definida por uma expressão do tipo $f(x) = a + \dfrac{b}{x - c}$
  onde a, b e c designam números reais.

Indique os valores de a e de c e determine o valor de b.

2. Na figura está representada, em referencial o.n. Oxyz, uma pirâmide quadrangular.



Admita que o vértice E se desloca no semieixo positivo Oz, entre a origem e o ponto de cota 6, nunca coincidindo com qualquer um destes dois pontos.

Com o movimento do vértice E, os outros quatro vértices da pirâmide deslocam-se no plano xOy, de tal forma que:

- a pirâmide permanece sempre regular
- o vértice A tem sempre abcissa igual à ordenada
- sendo x a abcissa de A e sendo c a cota de E, tem-se sempre

$$x + c = 6$$

2.1. Seja $V(x)$ o volume da pirâmide, em função de x $\left(x \in \left]0, 6\right[\right)$.

Mostre que $V(x) = 8\,x^2 - \dfrac{4}{3}\,x^3$

2.2. Utilizando a função derivada de V e recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, estude a função V quanto à monotonia, conclua qual é o valor de x para o qual é máximo o volume da pirâmide e determine esse volume máximo.

2.3. Admita agora que $x = 1$. Indique, para este caso, as coordenadas dos pontos A, B e E e determine uma equação cartesiana do plano ABE.

3. A Maria vai sempre de carro, com o pai, para a escola, saindo de casa entre as sete e meia e as oito horas da manhã.
Admita que, quando a Maria sai de casa t minutos **depois das sete e meia**, a duração da viagem, em **minutos**, é dada por

$$d(t) = 45 - \frac{5600}{t^2 + 300} \qquad (t \in [0, 30])$$

As aulas da Maria começam sempre às oito e meia.

3.1. Mostre que, se a Maria sair de casa às 7 h 40 m, chega à escola às 8 h 11 m, mas, se sair de casa às 7 h 55 m, já chega atrasada às aulas.

3.2. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, resolva o seguinte problema: *Até que horas pode a Maria sair de casa, de modo a não chegar atrasada às aulas?*

A sua resolução deve incluir:

- uma explicação de que, para que a Maria não chegue atrasada às aulas, é necessário que $t + d(t) \leq 60$
- o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora
- a resposta ao problema em horas e minutos (minutos arredondados às unidades)

FIM

COTAÇÕES

Grupo I .... **50 pontos**

Cada resposta certa .... 10 pontos
Cada resposta errada.. 0 pontos
Cada item não respondido ou anulado .... 0 pontos

Grupo II .... **150 pontos**

1. .... 40 pontos
- **1.1.** ....20 pontos
- **1.2.** ....20 pontos

2. .... 65 pontos
- **2.1.** ....20 pontos
- **2.2.** ....20 pontos
- **2.3.** ....25 pontos

3. .... 45 pontos
- **3.1.** ....20 pontos
- **3.2.** ....25 pontos

TOTAL .... **200 pontos**