

Proposta de Resolução da Prova de Matemática B (735 – 2ª fase – 19 de Julho)

GRUPO I

1.

1.1. Seja l_n o número de lados da n -ésima linha poligonal.

n	1	2	3	4	...
l_n	4	20	36	52	...
		+16	+16	+16	

l_n é uma progressão aritmética de razão 16, por isso

$$l_n = 4 + (n-1) \times 16$$

$$l_n = 16n - 12$$

Para existir uma linha poligonal com 456 lados

$$16n - 12 = 456$$

$$16n = 468$$

$$n = 29,25$$

o que é impossível porque n é um número natural. Logo, não existe nenhuma linha poligonal desta sequência com 456 lados.

1.2. Como cada lado da sequência mede 1 cm, l_n é também a medida do comprimento de cada linha poligonal, em centímetros.

$$l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n > 3200$$

$$\frac{l_1 + l_n}{2} \times n > 3200$$

$$\frac{4 + 16n - 12}{2} \times n > 3200$$

$$8n^2 - 4n - 3200 > 0$$

Introduzindo na calculadora a função quadrática $y = 8x^2 - 4x - 3200$, verifica-se que tem um zero para $x \approx 20,25$, e que é positiva para valores superiores a este, logo o número mínimo pedido é 21.

As respostas às questões 1.1. e 1.2 podem também ser obtidas a partir da seguinte tabela:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
n.º de lados	4	20	36	52	68	84	100	116	132	148	164	180	196	212	228	244	260	276	292	308	324	340
soma do n.º de lados	4	24	60	112	180	264	364	480	612	760	924	1104	1300	1512	1740	1984	2244	2520	2812	3120	3444	3784
comprimento da linha (metros)	0	0,2	0,6	1,1	1,8	2,6	3,6	4,8	6,1	7,6	9,2	11	13	15,1	17,4	19,8	22,4	25,2	28,1	31,2	34,4	37,8

2.

2.1. A soma das áreas sombreadas contidas nos quadrados BCRO e QOUP é igual a área de um quadrado menor (um quadrado de lado 6 cm). De forma análoga, a soma das áreas sombreadas contidas nos quadrados ABOQ e ORSU também é igual à área de um quadrado menor.

Assim, a área da parte sombreada é igual à área de dois quadrados menores, ou seja metade do quadrado maior, e por isso igual à área da parte não sombreada.

2.2

2.2.1. Centro R e amplitude 180°.

2.2.2. A recta PS.

3. A encomenda de 1000 exemplares, ou seja, 10 centenas de exemplares, custa 13000 euros:

$$C(10) = 500 \times 10 + 8000 = 13\ 000$$

A venda de 800 exemplares ao preço de 15 euros cada exemplar, rende 12 000 euros:

$$15 \times 800 = 12\ 000$$

Logo, a afirmação do funcionário é verdadeira.

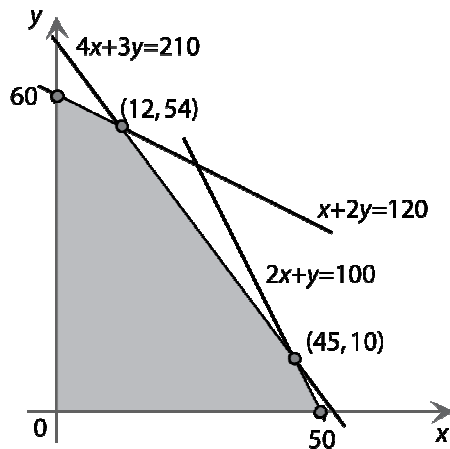
GRUPO II

1. A função objectivo é o número total de quartos ocupados, em dezenas, que se pretende maximizar:

$$N = x + y$$

As restrições do problema:

O número de quartos no hotel VISTASERRA	$0 \leq x \leq 50$
O número de quartos no hotel VISTAMAR	$0 \leq y \leq 60$
Número total de recepcionistas	$2x + y \leq 100$
Número total de empregados do bar	$x + 2y \leq 120$
Número total de funcionários dos quartos	$4x + 3y \leq 210$



$$\begin{aligned}
 0+0 &= 0 \\
 0+60 &= 60 \\
 \mathbf{12+54} &= \mathbf{66} \rightarrow \text{Máximo} \\
 45+10 &= 55 \\
 50+0 &= 50
 \end{aligned}$$

O número máximo de quartos é 120 no hotel VISTASERRA e 540 no hotel VISTAMAR.

2.

2.1. Da figura 8 conclui-se que $\theta + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$.

Como a soma dos três ângulos internos do triângulo ABC também é 180° , conclui-se que $\widehat{ABC} = \theta$.

Então,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \cos \theta \Leftrightarrow \frac{h}{5} = \cos \theta \Leftrightarrow h = 5 \cos \theta$$

2.2.

$$5 \cos \theta = 2,5 \Leftrightarrow \cos \theta = 0,5 \Leftrightarrow \theta = 60^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ - \theta = 30^\circ$$

Resposta: $\theta = 60^\circ$ e $\alpha = 30^\circ$.

GRUPO III

1.

	10	15	20	25
1	10	15	20	25
2	20	30	40	50
3	30	45	60	75
4	40	60	80	100
5	50	75	100	125

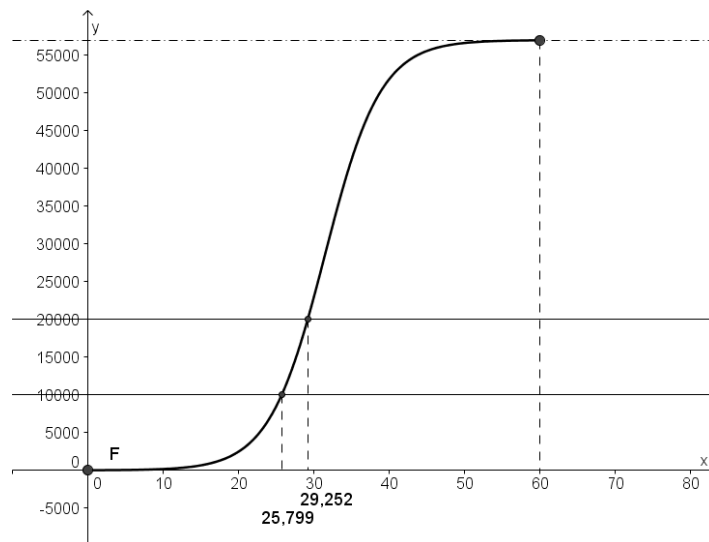
Há 14 casos em que o produto dos números é par.

2.

Na tabela da questão 1. Verificamos que o número de casos possíveis é 20.
A probabilidade de ganhar o segundo prémio é a probabilidade de acertar no primeiro número (4 casos favoráveis) e não acertar no segundo (1 caso favorável). Logo o número de casos favoráveis é 3. A probabilidade de ganhar o segundo prémio é, portanto, $3/20$.
A probabilidade de ganhar o terceiro prémio é a probabilidade de acertar no segundo número (5 casos favoráveis) e não acertar no primeiro (1 caso favorável). Logo, a probabilidade de ganhar o terceiro prémio é $4/20 = 1/5$.
Ao calcular a probabilidade, o Alberto esqueceu-se de excluir o caso em que se ganha o primeiro prémio.

GRUPO IV

1.



$$29,2518 - 25,7986 = 3,4532$$

$$3,4532 \text{ semanas} = 3 \text{ semanas e } 0,4532 \times 7 \text{ dias}$$

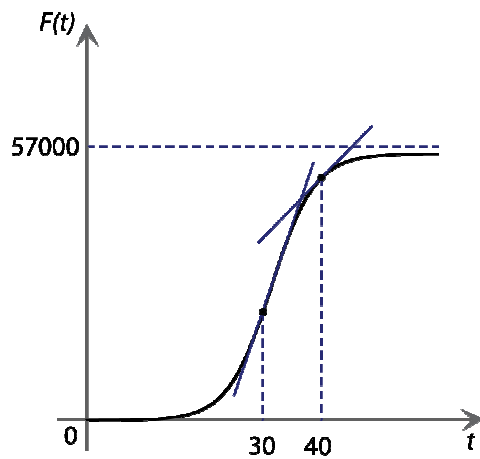
$$\approx 3 \text{ semanas e } 3 \text{ dias}$$

2. $F(60) \approx 56973,858$

$$\frac{56973,858}{950000} \approx 0,05997 \approx 6\%$$

6% da população foi contagiada durante as 60 semanas.

3.



Da leitura do gráfico, nomeadamente dos declives das rectas tangentes, verifica-se que na 30ª semana o crescimento do número de pessoas contagiadas por semana era muito mais acentuado que na 40ª semana.

FIM

Esta proposta de resolução também pode ser consultada em <http://www.apm.pt>