Proposta de resolução do exame nacional de Matemática B
(PROVA 735) 1ªFASE – 27 Junho 2011

GRUPO I

1.1

Como a tabela define uma distribuição de probabilidades de uma variável aleatória, a soma das probabilidades é 1.

Assim $3a + 0{,}48 + a = 1 \Leftrightarrow 4a = 1 - 0{,}48 \Leftrightarrow a = \frac{0{,}52}{4} \Leftrightarrow a = 0{,}13$

1.2

O Ivo irá obter lucro nas duas jogadas se conseguir ganhar no conjunto das duas jogadas 6 ou 8 euros, correspondendo a que o ponteiro indique uma das seguintes sequências no conjunto das duas jogadas: 2+4, 4+2 ou 4+4 .

Considerando os acontecimentos

D_1 : " Sair dois na primeira jogada"

Q_1 : " Sair quatro na primeira jogada"

D_2 : " Sair dois na segunda jogada"

Q_2 : " Sair quatro na segunda jogada"

A probabilidade de obter lucro é dada por

$$P(D_1 \cap Q_2) + P(Q_1 \cap D_2) + P(Q_1 \cap Q_2) = 0{,}48 \times 0{,}13 + 0{,}13 \times 0{,}48 + 0{,}13 \times 0{,}13$$

$$= 0{,}0624 + 0{,}0624 + 0{,}0169$$

$$= 0{,}1417$$

Sendo que D_1e Q_2, Q_1e D_2e também Q_1e Q_2são pares de acontecimentos independentes.

2.1

Como no primeiro dia se registaram 6 inscrições e nos nove dias seguintes se registaram sempre mais 8 que no dia anterior, o número de inscrições registadas no dia n pode ser expresso por uma progressão aritmética de razão 8, cujo primeiro termo é 6, ou seja:

$u_n = 6 + (n - 1) \times 8$

e

$u_{10} = 6 + (10 - 1) \times 8 = 6 + 9 \times 8 = 78$

Assim, no décimo dia $(n = 10)$ registaram-se 78 inscrições.

2.2

Sabemos que a soma de dois termos consecutivos da progressão aritmética que foi definida na resposta anterior ($u_n = 6 + (n-1) \times 8$ e $u_{n+1} = 6 + (n-1+1) \times 8$) é 340, pelo que podemos afirmar que

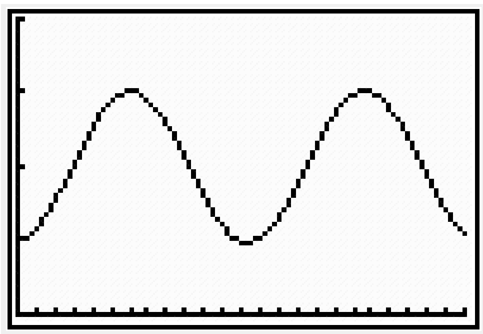
$$
\begin{aligned}
u_n + u_{n+1} = 340 \quad & \Leftrightarrow (6 + (n-1) \times 8) + (6 + n \times 8) = 340 \\
& \Leftrightarrow (6 + 8\text{n} - 8) + (6 + 8\text{n}) = 340 \\
& \Leftrightarrow -2 + 8\text{n} + 6 + 8\text{n} = 340 \\
& \Leftrightarrow 4 + 16\text{n} = 340 \\
& \Leftrightarrow 16\text{n} = 336 \\
& \Leftrightarrow n = \frac{336}{16} \\
& \Leftrightarrow n = 21
\end{aligned}
$$

Assim nas condições definidas os termos consecutivos cuja soma é 340 são os termos u_{21}e u_{22}, pelo que os dois últimos dias da feira foram o 21º e 22º, ou seja, a feira anual durou
22 dias.

GRUPO II

1.1

Inserindo o modelo encontrado pelo Rui no editor de funções da calculadora gráfica, e formatando a janela de visualização para valores da variável independente entre 0 e 24 (porque o primeiro dia de Julho corresponde às primeiras 24 horas modelados pela função), é possível observar o seguinte gráfico



Pela observação do gráfico é possível observar dois períodos com a maré a encher e dois períodos com a maré a vazar. Para determinar os instantes em que a variação da maré se altera, determinamos os maximizantes e os minimizantes com a calculadora gráfica:

maximizantes: 6,02 e 18,59

minimizantes: 0,00 e 12,30

Recorrendo à calculadora gráfica podemos converter os valores anteriores para o sistema sexagesimal, permitindo converter em horas e minutos:

- 6,02 corresponde a aproximadamente 6 horas e 1 minuto
- 12,30 corresponde a aproximadamente 12 horas e 18 minutos
- 18,59 corresponde a aproximadamente 18 horas e 35 minutos

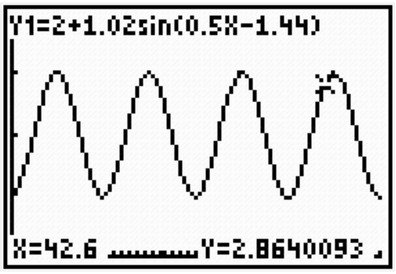
Desde as zero horas do dia 1 de Julho até às 6 horas e 1 minuto a maré esteve a subir. Após este instante desceu até às 12 horas e 18 minutos. A maré voltou a subir entre as 12 horas e 18 minutos e as 18 horas e 35 minutos e a partir desse instante desceu até ao fim do dia.

1.2

Recorrendo à calculadora gráfica podemos converter o valor de 18 horas e 36 minutos para o sistema decimal resultando o valor 18,6.

Como são as 18,6 horas do segundo dia, no modelo devemos calcular a imagem do objeto $x = 24 + 18{,}6$, ou seja $x = 42{,}6$.

Utilizando a função já inserida na calculadora gráfica (na resposta anterior) e ajustando a janela de visualização para um valor máximo da variável independente superior a 42, 6 podemos obter o valor da altura da maré no modelo obtido pelo Rui:



A diferença entre a altura prevista pela tabela do instituto hidrográfico (3 metros) e do modelo obtido pelo Rui (2,864 metros) é então de 3 – 2,864 = 0,136, assim a diferença é de 0,1 metros.

2.1

De acordo com a relação entre o nível sonoro (N) e a intensidade sonora (I), para um valor de $N = 105$ temos:

$$105 = 120 + 10\log_{10}(I) \Leftrightarrow 105 - 120 = 10\log_{10}(I)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-15}{10} = \log_{10}(I)$$
$$\Leftrightarrow -1{,}5 = \log_{10}(I)$$
$$\Leftrightarrow 10^{-1{,}5} = I$$
$$\Leftrightarrow I \approx 0{,}03$$

Ou seja, a um limite de 105 dB para o nível sonoro máximo corresponde uma intensidade sonora de 0,03 W/m².

2.2

Relativamente à afirmação I, e de acordo com a relação entre o nível sonoro (N) e a intensidade sonora (I), para um valor de $N = 0$ temos $0 = 120 + 10\log_{10}(I)$, calculando o zero da função

$$0 = 120 + 10\log_{10}(I) \Leftrightarrow -120 = 10\log_{10}(I)$$
$$\Leftrightarrow -\frac{120}{10} = \log_{10}(I)$$
$$\Leftrightarrow -12 = \log_{10}(I)$$
$$\Leftrightarrow 10^{-12} = I$$

temos um valor para a intensidade sonora de 10^{-12}W/m² para o limiar inferior da audição humana e não de 10^{-11}W/m² como é referido pelo Rui.

Sobre a afirmação II, e de acordo com a relação entre o nível sonoro (N) e a intensidade sonora (I), para um valor de $I = 5$ temos $N = 120 + 10\log_{10}(5) \approx 127$, ou seja o nível sonoro da sirene de um navio é de aproximadamente 127 W/m².

Relativamente ao concerto de música rock temos 127 – 110 = 17,

uma diferença de 17 W/m².

Relativamente ao funcionamento do avião a jato temos 140 – 127 = 13,

uma diferença de 13 W/m².

Desta forma temos que o nível sonoro provocado pela sirene do navio está mais próximo do que é registado no funcionamento de um avião a jato do que o registado num concerto de música rock, ao contrário do que é afirmado pelo Rui.

Analisando a afirmação III e fazendo o quociente da intensidade sonora do avião a jato em funcionamento pela intensidade sonora causada pelo tráfego rodoviário que circula numa via rápida, temos:

$$\frac{10^2}{10^{-4}} = 1000000$$

Ou seja o Rui deveria ter afirmado que a intensidade sonora do avião a jato em funcionamento é cerca de 1 milhão de vezes maior que a intensidade sonora causada pelo tráfego rodoviário que circula numa via rápida.

GRUPO III

1

[AD] é um lado do quadrado *[ABCD]*, logo $\overline{AD} = \overline{AB}$.

O ponto A tem ordenada 0 porque está no eixo Ox.

A (6, 0)

B (14, 6)

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(14-6)^2 + (6-0)^2} = 10$$

Logo $\overline{\mathrm{AD}} = 10$.

2

Se E e F são pontos médios dos lados *[AD]* e *[AB]*, respectivamente, então

$$\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{AF}} = 5$$

Logo

$$\overline{\mathrm{EF}}^2 = 5^2 + 5^2$$

$$\overline{\mathrm{EF}} = 5\sqrt{2}$$

Como a razão de semelhança entre os quadrados *[EFGH]* e *[IFJL]* é $\sqrt{2}$, o lado do quadrado *[IFJL]* mede $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ = 5, que é exactamente metade de 10, ou seja, metade do lado do quadrado *[ABCD]*.

3

A área do quadrado *[OPQR]* é 142 = 196, e 40% desta é 0,4 × 196 = 78,4.

Mas $g(k)$ = 78,4 ⇔

⇔ 75 – 5k = 78,4

⇔ 5k = - 3,4, o que é impossível porque k é um número não negativo.

Não existe nenhum valor de k para o qual a área sombreada seja 40% da área do quadrado *[OPQR].*

GRUPO IV

1

Sim, é possível.

Se as 15 janelas a produzir forem de Tipo II, serão ocupadas $15 \times 1 = 15$horas nas secções de corte e acabamentos (tempos inferiores às 16 e 22 horas disponíveis em cada uma destas secções) e serão ocupadas $15 \times 2 = 30$horas na secção de polimento (tempo inferior às 36 horas disponíveis nesta secção).

2

O objectivo é maximizar o lucro, a função objectivo é

$$L = 30\,x + 25\,y$$

Restrições do problema

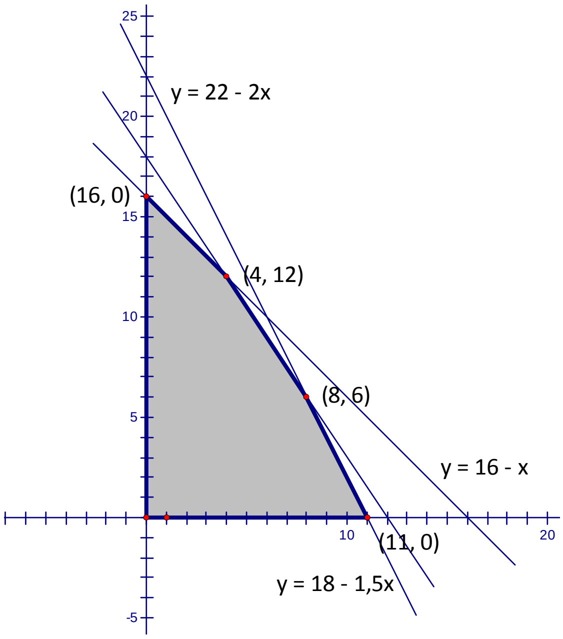
O número de janelas produzidas, de cada tipo, é não negativo $x \geq 0$ e $y \geq 0$

Disponibilidade da secção de corte, sendo 1 hora para cada janela $x + y \leq 16$

Disponibilidade da secção de polimento, sendo 3 horas para cada janela do tipo I e 2 horas para cada janela do tipo II $3\,x + 2\,y \leq 36$

Disponibilidade da secção de acabamento, sendo 2 horas para cada janela do tipo I e 1 hora para cada janela do tipo II $2\,x + y \leq 22$

Representação gráfica da região admissível



x	y	$L = 30\,x + 25\,y$	
0	16	400	
4	12	**420**	**Solução óptima**
8	6	390	
11	0	330	

O número de janelas a fabricar é de 4 janelas do tipo I e 12 janelas do tipo II para que o lucro seja máximo, e o lucro é de 420 euros.

FIM

Esta proposta de resolução também pode ser consultada em http://www.apm.pt