

Proposta de Resolução do Exame de **Matemática B**

Cód. 735 - 1ª Fase 2012

21 de Junho

### Grupo I

1.

A partir do gráfico da figura 1, obtemos uma tabela de frequências absolutas simples subtraindo as frequências acumuladas consecutivas:

n.º de livros	Freq. absoluta simples
0	5
1	15
2	15
3	25
4	15
5	5

Introduzindo estes valores em duas listas da calculadora, obtemos  
 $\min x = 0$   
 1º quartil 1,5  
 mediana 3  
 3º quartil 3,5  
 $\max x = 5$

Então  $a = 0$ ;  $b = 1,5$ ;  $c = 3$ ;  $d = 3,5$  e  $e = 5$ .

2.

$$P(\text{colocar uma bola}) = P(\text{sair um triângulo}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(\text{tirar uma bola}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Como a caixa tem inicialmente duas bolas, o “número de bolas que ficam na caixa após a criança ter realizado a atividade” é 3 ou 1.

Então

$x_i$	1	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 3 = \\ &= \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3} \approx 2,3 \end{aligned}$$

O valor médio é aproximadamente 2,3 bolas que ficam na caixa.

3.

3.1. Introduzindo a tabela dada na calculadora, nas listas  $L_1$  e  $L_2$ , obtivemos a regressão quadrática

$$y = ax^2 + bx + c$$

com  $a \approx 0,0792$   $b \approx 0,0077$   $c \approx -0,3000$ .

Introduzindo a expressão  $ax^2 + bx + c$  como função  $y_1$  e configurando a janela do gráfico para  $x \in [0, 17]$ , com a calculadora, CALC - 1: value -  $x = 15$ , obtive  $y_1 \approx 17,6$ .

A área estimada do polígono de 15 lados é aproximadamente  $17,6 \text{ dm}^2$ .

3.2.1. Uma progressão aritmética tem uma variação constante, por isso a expressão que a define é sempre um polinómio do 1º grau. Como a expressão que define  $d_n$  é do 2º grau, não pode ser uma progressão aritmética.

3.2.2. O polígono de 20 lados é a peça  $20-2 = 18$ .

$$D_{18} = 0,5 \times 18^2 + 0,5 \times 18 - 1 = 170.$$

O número de diagonais de um polígono de 20 lados é 170.

## Grupo II

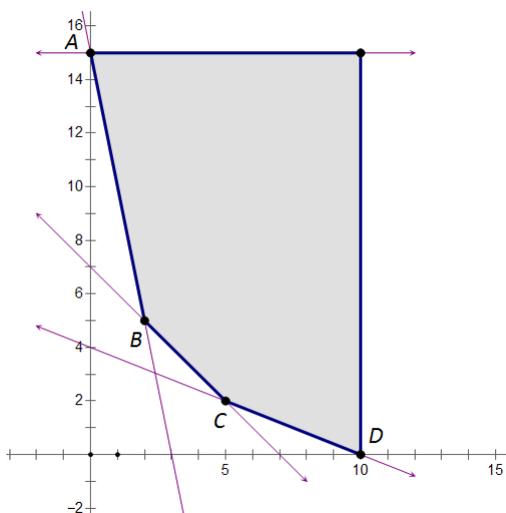
A função objetivo, que se pretende minimizar, é o custo e é dada por

$$C(x, y) = 5x + 2,5y$$

Restrições do problema:

$$\left| \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ 30x + 75y \geq 300 \\ 75x + 15y \geq 225 \\ 45x + 45y \geq 315 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ 2x + 5y \geq 20 \\ 5x + y \geq 15 \\ x + y \geq 7 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ y \geq -0,4x + 4 \\ y \geq -5x + 15 \\ y \geq -x + 7 \end{array} \right.$$

A região admissível correspondente a este sistema de restrições, obtida na calculadora gráfica, é a seguinte,



em que os pontos de interseção têm as seguintes coordenadas

(obtidas com a funcionalidade CALC – 5:intersect)

$$A(0, 15) \quad B(2, 5) \quad C(5, 2) \quad D(10, 0)$$

Calculando o custo para cada um destes pontos, obtém-se

$$C(0, 15) = 5 \times 0 + 2,5 \times 15 = 32,5$$

$$C(2, 5) = 5 \times 2 + 2,5 \times 5 = 22,5$$

$$C(5, 2) = 5 \times 5 + 2,5 \times 2 = 30$$

$$C(10, 0) = 5 \times 10 + 2,5 \times 0 = 50$$

Donde se conclui que a solução ótima do problema, correspondente ao custo mínimo (22,50 €), é de 2 quilogramas de Granulado e 5 quilogramas de Farinha para suplemento diário de cada animal.

### Grupo III

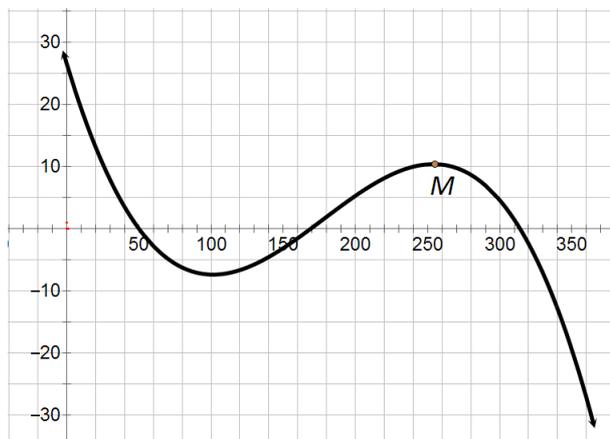
1. Janeiro – 31 dias; Fevereiro – 15 dias; o dia 15 de Fevereiro é o 46º dia do ano.

Introduzindo a função  $f$  na calculadora,

$$\text{CALC} - 1:\text{value} \quad x = 46, \text{ vem } y = 1,31856\dots$$

O resultado líquido no dia 15 de Fevereiro é de cerca de 1 319 euros.

2. O maior resultado líquido nos últimos 6 meses é o máximo relativo correspondente ao ponto M



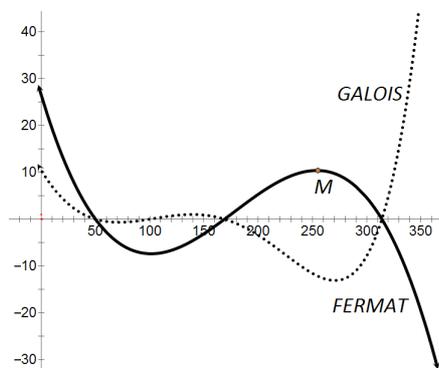
assinalado na representação gráfica da figura.

Com a calculadora gráfica

CALC – 4:maximum vem  $x \approx 254$  e  $y \approx 10,404$

Logo, o maior resultado líquido diário foi de cerca de 10 404 euros.

3. Colocando as duas expressões na calculadora, obtém-se a seguinte representação gráfica



Que se intersectam nos pontos correspondentes aos zeros de  $f$ , porque  $g$  é o produto de  $f$  por outra função.

Os zeros de  $f$  (obtidos com a calculadora, com CALC – 2: zero) são

$$x = 50 \text{ ou } x = 169 \text{ ou } x = 314$$

Estes números representam os dias em que os resultados líquidos foram iguais nas duas empresas. Por leitura do gráfico, vemos que  $f(x) > g(x)$  quando

$$x < 50 \text{ ou } 169 < x < 314$$

O número total de dias em que o resultado líquido diário do departamento FERMAT foi superior ao do departamento GALOIS é

$$49 + (313 - 169) = 49 + 144 = 193 \text{ dias}$$

## Grupo IV

1. A região  $S_1$  é um segmento circular (região compreendida entre o arco e a corda) correspondente a um quarto de círculo, e é por isso semelhante ao segmento circular  $EGCD$ , que também corresponde a um quarto de círculo.

Como o raio do círculo maior é o dobro do raio do círculo menor, a razão de semelhança é 2 e por isso, a razão entre as áreas dos dois segmentos circulares é 4.

Então

$$\text{Área do segmento circular } EGCD = 4 \times \text{área de } S_1$$

Por outro lado,

$$\text{Área do segmento circular } EGCD = 2 \times (\text{área de } S_1 + \text{área de } S_2)$$

Igualando as duas expressões

$$4 \times \text{área de } S_1 = 2 \times (\text{área de } S_1 + \text{área de } S_2)$$

$$2 \times \text{área de } S_1 = \text{área de } S_1 + \text{área de } S_2$$

$$\text{área de } S_1 = \text{área de } S_2$$

2. O segmento  $BG$  é a hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos são raios, logo medem 2.

$$\text{Então } BG = 2\sqrt{2}$$

$$BG = 2\sqrt{2}$$

O arco  $ED$  é um oitavo da circunferência de raio 4

$$\text{comprimento do arco } ED = \frac{\pi \times 4^2}{8} = 2\pi$$

O arco  $EG$  é um quarto da circunferência de raio 2

$$\text{comprimento do arco } EG = \frac{\pi \times 2^2}{4} = \pi$$

$$\text{Perímetro de } S_2 = 4\sqrt{2} + 2\pi \approx 4,31$$

O perímetro pedido é aproximadamente 4,31.

3.

3.1.  $D_h = ]0, \frac{\pi}{2}[$

- 3.2. A área de  $S_3$  é igual à diferença entre a área do setor circular  $CBD$  e a área do triângulo  $CBD$ .

A área do setor circular é diretamente proporcional à amplitude do ângulo:

$$\frac{\text{área do setor}}{\alpha} = \frac{\pi \times 4^2}{2\pi}$$

$$\text{área do setor} = \frac{16\pi}{2\pi} \times \alpha$$

$$\text{área do setor} = 8\alpha$$

A área do triângulo é dada por:

$$\text{área do triângulo} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

Mas,

$$\frac{\text{altura}}{4} = \text{sen } \alpha \Leftrightarrow \text{altura} = 4 \text{ sen } \alpha$$

Então,

$$\text{área do triângulo} = \frac{4 \times 4 \text{ sen } \alpha}{2} = 8 \text{ sen } \alpha$$

Portanto

$$\text{Área de } S_3 = 8\alpha - 8 \text{ sen } \alpha$$

**FIM**