

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática B

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 735/Época Especial

14 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2016

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As citações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nos termos da lei em vigor, as provas de avaliação externa são obras protegidas pelo Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos. A sua divulgação não suprime os direitos previstos na lei. Assim, é proibida a utilização destas provas, além do determinado na lei ou do permitido pelo IAVE, I.P., sendo expressamente vedada a sua exploração comercial.

Página em branco

Na resposta aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos e mínimos);
 - as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
 - as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).
-

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\text{Área da base} \times \text{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

• **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

• **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i , então:

• **Valor médio de X :**

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$

• **Desvio padrão de X :**

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ , então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

GRUPO I

O gestor de uma cadeia hoteleira encomendou um estudo sobre a rentabilidade de cada um dos hotéis dessa cadeia.

Admita que, nesse estudo, se concluiu que o custo operacional diário, C , em euros, de um dos hotéis, em função da sua taxa de ocupação diária, t , em percentagem, é dado por

$$C(t) = t^2 - 90t + 3500, \text{ com } t \in [0, 100]$$

Por exemplo, $C(20)$ é o custo operacional diário desse hotel, correspondente a uma taxa de ocupação diária de 20%

1. Determine a taxa de ocupação diária para a qual o custo operacional diário desse hotel é mínimo.

2. Sabe-se que $\frac{C(50) - C(30)}{50 - 30} = -10$

Interprete, no contexto do problema, o significado desta igualdade.

3. No estudo realizado, verificou-se que a receita diária, R , em euros, desse hotel é uma função linear de t definida por

$$R(t) = a \times t, \text{ com } t \in [0, 100]$$

em que a representa um número real positivo.

O respetivo saldo diário, S , é dado por

$$S(t) = R(t) - C(t), \text{ com } t \in [0, 100]$$

Sabe-se que, com uma taxa de ocupação diária de 50%, o saldo diário é 2000 euros.

3.1. Mostre que $S(t) = -t^2 + 160t - 3500$

3.2. O autor do estudo verificou que, com determinadas taxas de ocupação diária, se obtinham saldos diários superiores ao que se obtinha com uma taxa de ocupação diária de 100%

Determine os valores da taxa de ocupação diária para os quais tal se verifica.

GRUPO II

Nas maternidades, existem diversos serviços especializados, como os de neonatologia e de obstetrícia.

1. Os serviços de apoio ao serviço de neonatologia de uma maternidade produzem capas de proteção de incubadoras de dois tipos: A e B. As componentes principais destas capas de proteção são gaze esterilizada e um tecido especial.

Diariamente, esses serviços dispõem de 18 unidades de gaze esterilizada, de 15 unidades de tecido especial e de 21 horas de trabalho para a produção das capas.

A produção de uma capa do tipo A requer uma unidade de gaze esterilizada, duas unidades de tecido especial e três horas de trabalho.

A produção de uma capa do tipo B requer duas unidades de gaze esterilizada, uma unidade de tecido especial e uma hora de trabalho.

Os serviços pretendem produzir, diariamente, o maior número total de capas, nas condições descritas.

Designe por x o número de capas do tipo A e por y o número de capas do tipo B que os serviços produzem diariamente.

Determine o número de capas do tipo A e o número de capas do tipo B que os serviços devem produzir, diariamente, para que o número total de capas produzidas seja máximo.

Na sua resposta, apresente:

- a função objetivo;
- as restrições do problema;
- uma representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições;
- o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

2. Em obstetrícia, é possível obter, com ecografias efetuadas ao longo do período gestacional do feto, importantes indicadores relativos à saúde do futuro recém-nascido, uma vez que há relação entre as características do feto e as características do recém-nascido.

2.1. O diâmetro biparietal de um feto, medido na 34.^a semana de gravidez, permite calcular uma boa estimativa do perímetro cefálico do recém-nascido.

Uma equipa de obstetras recolheu os dados representados no diagrama de dispersão da Figura 1, relativos ao diâmetro biparietal, x , em centímetros, medido em ecografias de fetos efetuadas na 34.^a semana de gravidez, e ao correspondente perímetro cefálico dos recém-nascidos, y , também em centímetros.

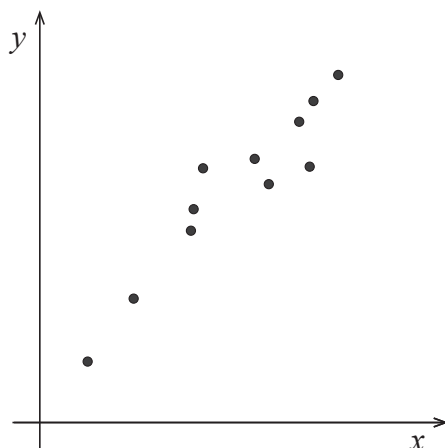


Figura 1

O diagrama de dispersão não está à escala, e as coordenadas dos pontos representados são: $(7,49; 30,36)$, $(7,81; 31,99)$, $(8,21; 33,66)$, $(8,23; 34,22)$, $(8,30; 35,26)$, $(8,66; 35,51)$, $(8,76; 34,86)$, $(8,97; 36,44)$, $(9,04; 35,30)$, $(9,07; 36,97)$ e $(9,24; 37,63)$

Verifica-se uma correlação linear forte entre as variáveis estatísticas x e y

Determine, com base nestes dados, o valor do respetivo coeficiente de correlação linear.

Na sua resposta, recorra às ferramentas de estatística da calculadora e apresente o valor pedido arredondado às centésimas.

2.2. Admita que o perímetro cefálico, em centímetros, numa população de recém-nascidos em certa maternidade, em certo ano civil, segue uma distribuição normal de valor médio 34,8 cm

Relativamente a esta população, considere as afirmações seguintes.

- A)** A probabilidade de um recém-nascido, escolhido ao acaso, ter perímetro cefálico inferior a 34,8 cm é 75%
- B)** É igualmente provável que um recém-nascido, escolhido ao acaso, tenha perímetro cefálico superior a 35 cm ou tenha perímetro cefálico inferior a 34 cm
- C)** A probabilidade de um recém-nascido, escolhido ao acaso, ter perímetro cefálico superior a 34 cm é 0,45

Apresente, num pequeno texto, para cada uma das afirmações, uma razão que justifique que é falsa.

GRUPO III

Considere uma sequência de construções geométricas, em que:

- a 1.^a construção é formada por um círculo de raio 1
- a 2.^a construção é formada por dois círculos, cada um com raio igual a metade do raio do círculo da 1.^a construção;
- a 3.^a construção é formada por quatro círculos, cada um com raio igual a metade do raio dos círculos da 2.^a construção;
- e assim sucessivamente.

Na Figura 2, estão representadas as quatro primeiras construções dessa sequência.

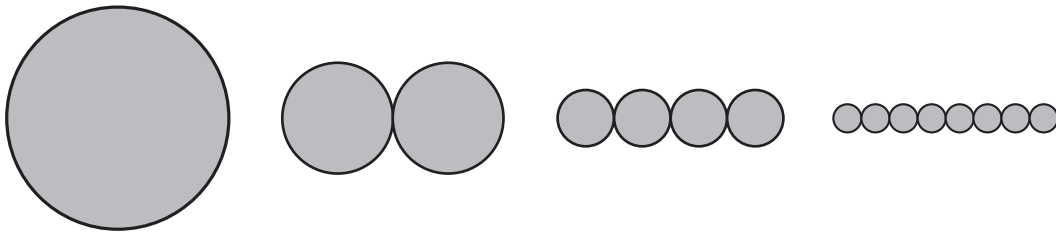


Figura 2

1. Quantos círculos formam a 100.^a construção desta sequência?

Justifique a sua resposta.

Apresente o resultado na forma de potência.

2. Determine a soma das áreas dos círculos que formam a 10.^a construção desta sequência.

Apresente o resultado arredondado às milésimas.

Em cálculos intermédios, não proceda a arredondamentos.

3. Seja n um número natural. Considere a construção de ordem n desta sequência.

Mostre que a soma dos perímetros dos círculos que formam essa construção é 2π

4. Considere o retângulo e os três círculos representados na Figura 3, em que:

- o círculo maior, de raio 1, é o círculo da 1.^a construção;
- os círculos menores, de raio $\frac{1}{2}$, são os círculos da 2.^a construção.

Tal como a figura sugere, todos os círculos são tangentes a lados do retângulo e são tangentes entre si.

Determine a área da região do retângulo não ocupada pelos círculos.

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Na sua resposta, pode considerar o triângulo isósceles cujos vértices coincidem com os centros dos três círculos.

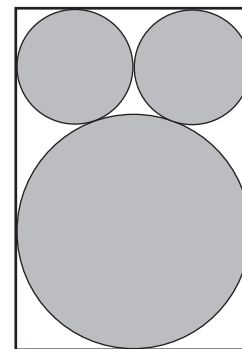


Figura 3

5. Considere um referencial ortogonal e monométrico, Oxy , cuja unidade de medida é o raio da circunferência do círculo da 1.^a construção e cuja origem é o centro dessa circunferência, tal como se ilustra na Figura 4.

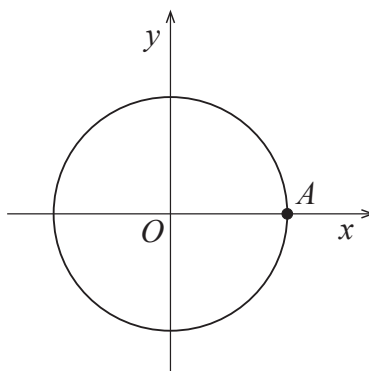


Figura 4

Na Figura 4, está assinalado o ponto A , ponto de intersecção da circunferência com o semieixo positivo das abcissas.

Indique as coordenadas do ponto simétrico do ponto A relativamente ao eixo das ordenadas.

GRUPO IV

O princípio de funcionamento de um motor de combustão interna consiste no movimento retilíneo de um êmbolo no interior de um cilindro. Esse movimento transmite-se, por intermédio de uma biela, a uma manivela, transformando-se em movimento de rotação.

Com base nesse mecanismo, foram elaborados os esquemas da Figura 5,

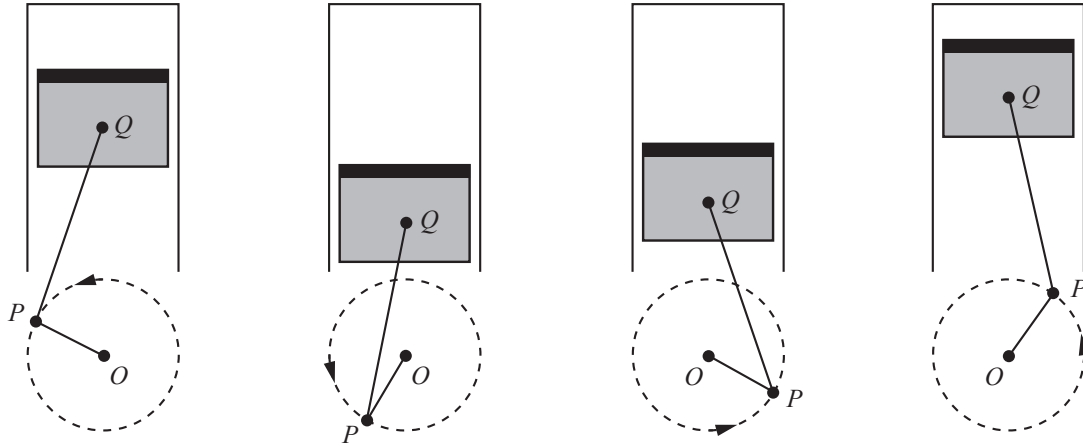


Figura 5

em que:

- o retângulo a sombreado representa o êmbolo, em quatro posições do seu movimento;
- o segmento de reta $[PQ]$ representa a biela;
- o segmento de reta $[OP]$ representa a manivela;
- a circunferência de centro no ponto O representa o movimento de rotação do ponto P em torno do ponto O

Na Figura 6, está representado, em referencial ortogonal e monométrico, Oxy , um dos esquemas da Figura 5.

Nesse esquema, que não está à escala:

- o ponto Q pertence ao semieixo positivo Oy
- θ é a amplitude, em graus, de um ângulo que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta \hat{OP} , em sentido positivo.

Admita que $\overline{OP} = 1$ e que $\overline{PQ} = 4$

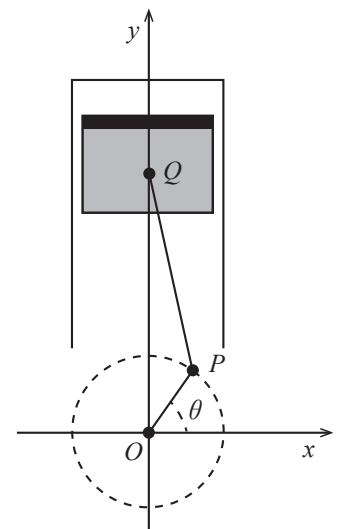


Figura 6

1. No movimento de rotação do ponto P , a distância do ponto Q ao ponto O depende da amplitude θ

Determine o menor valor e o maior valor que essa distância pode ter, quando $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$

Na sua resposta, comece por indicar para que amplitudes θ ocorrem esses valores.

2. Considere, agora, a rotação do ponto P apenas no primeiro quadrante.

Determine uma expressão que dê a distância do ponto Q ao ponto O , em função de θ , com $0^\circ < \theta < 90^\circ$

Na sua resolução, comece por decompor o triângulo $[OPQ]$ em dois triângulos retângulos.

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item					Cotação (em pontos)
	Cotação (em pontos)					
I	1.	2.	3.1.	3.2.		
	10	10	20	15		55
II	1.	2.1.	2.2.			
	30	10	20			60
III	1.	2.	3.	4.	5.	
	10	15	10	15	5	55
IV	1.	2.				
	10	20				30
TOTAL						200