

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

---

**Prova Escrita de Matemática B**

---

11.º Ano de Escolaridade

---

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

---

**Prova 735/1.ª Fase**

14 Páginas

---

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

---

**2016**

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

---

Nos termos da lei em vigor, as provas de avaliação externa são obras protegidas pelo Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos. A sua divulgação não suprime os direitos previstos na lei. Assim, é proibida a utilização destas provas, além do determinado na lei ou do permitido pelo IAVE, I.P., sendo expressamente vedada a sua exploração comercial.

---

**Página em branco**

---

---

Na resposta aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos e mínimos);
  - as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
  - as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).
-

---

**Página em branco**

---

# Formulário

---

## Geometria

### Comprimento de um arco de circunferência:

$\alpha r$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$  ( $\alpha$  – amplitude, em graus, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

### Áreas de figuras planas

**Losango:**  $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

**Trapézio:**  $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

**Polígono regular:**  $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

### Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$  ( $\alpha$  – amplitude, em graus, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

### Áreas de superfícies

**Área lateral de um cone:**  $\pi r g$  ( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

**Área de uma superfície esférica:**  $4 \pi r^2$  ( $r$  – raio)

**Área lateral de um cilindro reto:**  $2 \pi r g$  ( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

## Volumes

**Pirâmide:**  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

**Cone:**  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

**Esfera:**  $\frac{4}{3} \pi r^3$  ( $r$  – raio)

**Cilindro:**  $\text{Área da base} \times \text{Altura}$

## Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão  $(u_n)$ :

• **Progressão aritmética:**  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

• **Progressão geométrica:**  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## Probabilidades e Estatística

Se  $X$  é uma variável aleatória discreta de valores  $x_i$  com probabilidade  $p_i$ , então:

• **Valor médio de  $X$ :**

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$

• **Desvio padrão de  $X$ :**

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se  $X$  é uma variável aleatória normal de valor médio  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$ , então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

## GRUPO I

Uma empresa da indústria do calçado organizou a sua produção de alta qualidade em três departamentos: conceção, corte e acabamento.

1. Os departamentos de conceção e de corte laboram diariamente durante 8 horas, e o de acabamento durante 9 horas e 20 minutos. A empresa produz dois modelos de calçado de alta qualidade, X e Y, e tem assegurada a venda de toda a produção que realizar.

Cada par de calçado do modelo X necessita de 20 minutos no departamento de conceção, de meia hora no de corte e de 40 minutos no de acabamento.

Cada par de calçado do modelo Y necessita de 40 minutos no departamento de conceção, de meia hora no de corte e de 20 minutos no de acabamento.

O lucro que a empresa obtém com a venda de um par de calçado do modelo X é 100 euros, e o lucro obtido com a venda de um par de calçado do modelo Y é 150 euros.

Designe por  $x$  o número de pares de calçado do modelo X e por  $y$  o número de pares de calçado do modelo Y que a empresa produz diariamente.

Determine o número de pares de calçado do modelo X e o número de pares de calçado do modelo Y que a empresa deve produzir diariamente, de modo que o lucro seja máximo.

Na sua resposta, apresente:

- a função objetivo;
- as restrições do problema;
- uma representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições;
- o valor de  $x$  e o valor de  $y$  correspondentes à solução do problema.

2. O número total de operários que trabalham nos departamentos de corte e de acabamento é 20

Escolhe-se, ao acaso, um dos 20 operários.

2.1. Desses 20 operários, uns trabalham apenas no departamento de corte e outros trabalham apenas no departamento de acabamento, mas também há operários que trabalham nos dois departamentos.

O número de operários que trabalham no departamento de corte é 10, e o número de operários que trabalham no departamento de acabamento é 13

Determine a probabilidade de o operário escolhido trabalhar nos dois departamentos.

Apresente o resultado em percentagem.

2.2. Seja  $Z$  a variável aleatória «número de dias em que o operário faltou, no último mês».

A tabela de distribuição de probabilidades de  $Z$  é

$z_i$	0	1	2	3
$P(Z = z_i)$	0,6	$a$	0,15	$b$

em que  $a$  e  $b$  são números reais.

Sabe-se que a probabilidade de o operário ter faltado no máximo 2 dias, no último mês, é 0,95

Determine o valor médio da variável aleatória  $Z$

Na sua resposta, comece por obter os valores de  $a$  e de  $b$

## GRUPO II

As bactérias reproduzem-se predominantemente por um processo denominado divisão binária. Este processo ocorre quando uma bactéria duplica o seu material genético e se divide em duas bactérias idênticas à original.

1. Admita que, num dado instante inicial, uma bactéria se divide em duas e que, a partir desse instante, de 20 em 20 minutos, cada bactéria existente se divide em duas outras bactérias.

Assim, no instante inicial, existem duas bactérias e, por exemplo, passados 40 minutos, o número de bactérias existentes é oito.

Justifique que o número de bactérias existentes passadas 5 horas desde o instante inicial é superior a 65 000

2. Admita, agora, que, num dado instante, uma colónia tem 1000 bactérias, que se reproduzem, em simultâneo, por divisão binária.

Seja  $b_n$  o número de bactérias existentes na geração  $n$  desse processo, com  $b_1 = 1000$ ,  $b_2 = 2000$ ,  $b_3 = 4000$ , e assim sucessivamente.

Escreva o termo geral da sucessão  $(b_n)$

Na sua resposta, justifique que  $(b_n)$  é uma progressão geométrica e identifique a razão dessa progressão.

---

**Página em branco**

---

### GRUPO III

Numa cidade, foi detetada uma epidemia de gripe.

1. Admita que o número de pessoas com sintomas de gripe atendidas numa certa unidade de saúde dessa cidade, no dia de ordem  $x$ , contada a partir das zero horas do dia 11 de janeiro de 2016, é dado por  $f(x)$ , com  $x \in \{1, 2, \dots, 40\}$

Por exemplo,  $f(7)$  representa o número de pessoas com sintomas de gripe atendidas no dia 17 de janeiro de 2016, na unidade de saúde.

Sabe-se que, nessa unidade de saúde, no período de tempo considerado:

- em todos os dias, foram atendidas pessoas com sintomas de gripe;
- os dias em que foram atendidas mais de 180 pessoas com sintomas de gripe foram dias consecutivos.

Sabe-se, ainda, que o dia 30 de janeiro corresponde a um dos extremantes da função  $f$

Nas Figuras 1, 2 e 3, estão representados três gráficos.

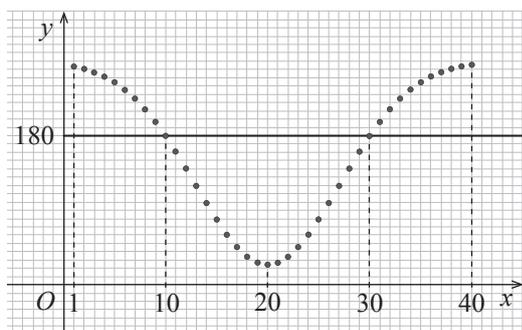


Figura 1

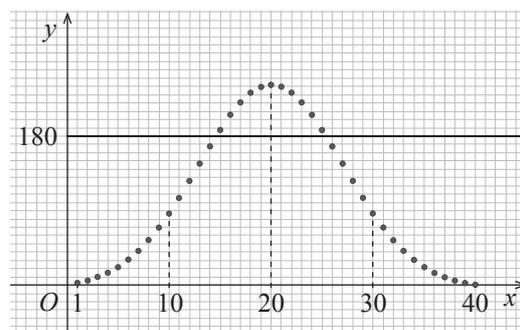


Figura 2

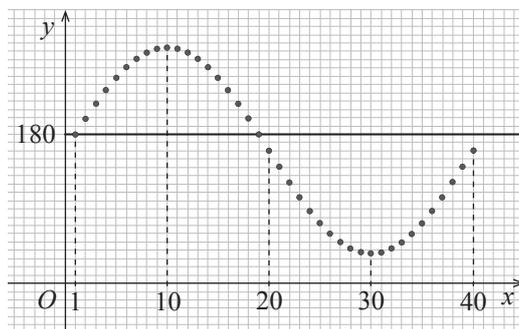


Figura 3

Apresente, num pequeno texto, para cada uma das Figuras, 1, 2 e 3, uma razão pela qual o gráfico representado **não** pode ser o gráfico da função  $f$

2. Na referida cidade, existem três agrupamentos de escolas: A, B e C.

2.1. Admita que o número total de alunos do agrupamento A que foram infetados pelo vírus da gripe,  $N_A$ , desde as oito horas do dia 10 de janeiro de 2016 até  $t$  dias após esse instante, é dado, aproximadamente, por

$$N_A(t) = \frac{325}{1 + 12 \times 3^{-0,1t}}, \text{ para } 0 \leq t \leq 40$$

2.1.1. Quanto tempo teve de decorrer, desde as oito horas do dia 10 de janeiro de 2016, para o número total de alunos do agrupamento A infetados pelo vírus da gripe ultrapassar uma centena?

Justifique a sua resposta.

Apresente o resultado em dias e horas, com o número de horas arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

2.1.2. Admita, também, que o número total de alunos do agrupamento B que foram infetados pelo vírus da gripe,  $N_B$ , desde as oito horas do dia 10 de janeiro de 2016 até  $t$  dias após esse instante, é dado, aproximadamente, por

$$N_B(t) = k \times N_A(t), \text{ para } 0 \leq t \leq 40,$$

em que  $k$  é um número real.

Até às oito horas do dia 20 de janeiro de 2016, tinham sido infetados pelo vírus da gripe, no total, 39 alunos do agrupamento B.

Determine o valor de  $k$

2.2. Admita, agora, que, desde as oito horas do dia 10 de janeiro de 2016 até  $t$  dias após esse instante, o número total de alunos do agrupamento C que foram infetados pelo vírus da gripe é dado, aproximadamente, por  $N_C(t)$ , para  $0 \leq t \leq 40$

Na Figura 4, encontra-se representado o gráfico da função  $V$ , que dá a taxa de variação instantânea da função  $N_C$ , para cada valor de  $t$

Considere a afirmação:

«Durante os primeiros 40 dias após as oito horas do dia 10 de janeiro de 2016, o valor máximo do número total de alunos do agrupamento C que foram infetados pelo vírus da gripe, desde aquele instante, foi atingido às oito horas do dia 19 de fevereiro de 2016.»

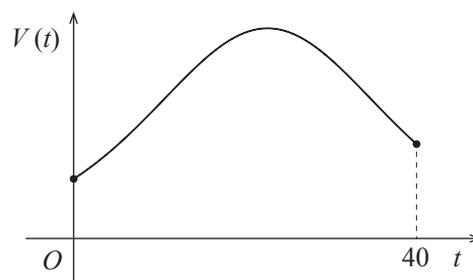


Figura 4

Justifique que esta afirmação é verdadeira, com base na relação existente entre o sinal da função  $V$  e a monotonia da função  $N_C$

## GRUPO IV

Na calçada portuguesa, os motivos geométricos são muito utilizados.

A Figura 5 é uma fotografia de um pavimento em calçada portuguesa.



Figura 5

A partir da fotografia, desenhou-se o esquema representado na Figura 6.

Nesse esquema, que não está desenhado à escala, estão representados:

- uma circunferência de centro no ponto  $O$
- o triângulo equilátero  $[ABC]$ , inscrito nessa circunferência;
- as retas  $r$  e  $s$ , tangentes à circunferência nos pontos  $P$  e  $Q$ , respectivamente;
- o ponto  $R$ , ponto de intersecção das retas  $r$  e  $s$

Admita que o ponto  $R$  pertence à reta  $OC$  e que o raio da circunferência mede  $\sqrt{27}$  cm

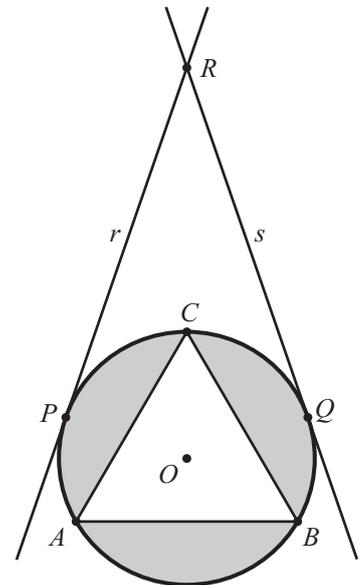


Figura 6

1. Mostre que o comprimento do lado do triângulo  $[ABC]$  é exatamente 9 cm
2. Calcule a área total da região representada a sombreado na Figura 6.

Apresente o resultado em centímetros quadrados, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

3. Determine a amplitude do ângulo  $PRQ$ , sabendo-se que a distância do ponto  $C$  ao ponto  $R$  é 12 cm

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Na sua resposta, tenha em consideração que o ângulo  $OQR$  é um ângulo reto.

4. Na Figura 7, estão representados o triângulo equilátero  $[ABC]$ , de centro no ponto  $O$ , e as respectivas circunferências inscrita e circunscrita.

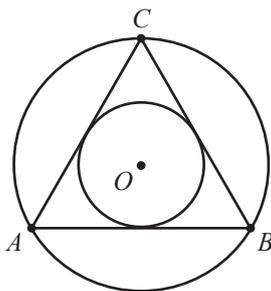


Figura 7

4.1. Indique o transformado do ponto  $A$  por meio da rotação de centro no ponto  $O$  e amplitude  $-240^\circ$

4.2. A razão entre as áreas dos círculos delimitados pelas circunferências representadas na Figura 7 é igual a 4

Determine o comprimento da circunferência inscrita no triângulo  $[ABC]$

Apresente o resultado em centímetros, arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Note que o raio da circunferência circunscrita ao triângulo  $[ABC]$  é  $\sqrt{27}$  cm

**FIM**

## COTAÇÕES

Grupo	Item					Cotação (em pontos)
	Cotação (em pontos)					
I	1.	2.1.	2.2.			
	30	10	20			60
II	1.	2.				
	10	15				25
III	1.	2.1.1.	2.1.2.	2.2.		
	20	15	10	10		55
IV	1.	2.	3.	4.1.	4.2.	
	15	15	15	5	10	60
<b>TOTAL</b>						<b>200</b>

ESTA FOLHA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

# **Prova 735**

1.<sup>a</sup> Fase