Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 2ª FASE – 21 DE JULHO 2017

Grupo I

1. A função objetivo é o lucro obtido com a venda de x panelas de doce tradicional e y panelas de doce *gourmet* :

$L(x,y) = 8x + 10y$

Restrições do problema:

$x \geq 0$

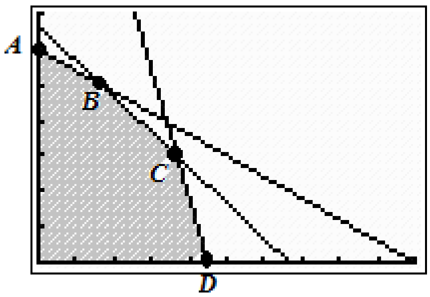
$y \geq 0$

$0,5x + 0,6y \leq 20 \Leftrightarrow 0,6y \leq -0,5x + 20 \Leftrightarrow 6y \leq -5x + 200 \Leftrightarrow y \leq -\frac{5}{6}x + \frac{100}{3}$.

$0,1x + 0,2y \leq 6 \Leftrightarrow 0,2y \leq -0,1x + 6 \Leftrightarrow y \leq -0,5x + 30$ (dividindo os termos da desigualdade por 0,2).

$0,3x + 0,1y \leq 8,1 \Leftrightarrow 0,1y \leq -0,3x + 8,1 \Leftrightarrow y \leq -3x + 81$ (dividindo os termos da desigualdade por 0,1).

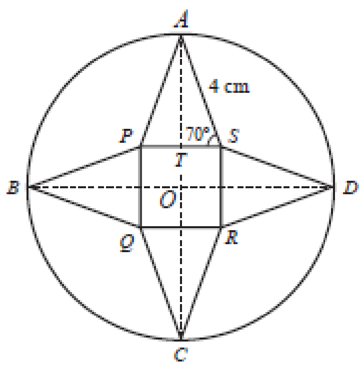
Representação gráfica da região admissível



Vértice	x	y	$L(x,y) = 8x + 10y$
A	0	30	300
B	**10**	**25**	**330**
C	22	15	326
D	27	0	216

Solução do problema: $x = 10$, $y = 25$

Resposta: O lucro máximo possível, 330,00€, obtém-se com a produção de 10 panelas de doce tradicional e 25 panelas de doce *gourmet*.



2.

2.1. Raio da circunferência de centro O: $[AO]$.

$\overline{AO} = \overline{AT} + \overline{TO}$

$\overline{TO} = \overline{TS}$

$\text{sen } 70^{\circ} = \dfrac{\overline{AT}}{4} \Leftrightarrow \overline{AT} = 4\text{sen}70^{\circ}$

$\cos 70^{\circ} = \dfrac{\overline{TS}}{4} \Leftrightarrow \overline{TS} = 4\cos70^{\circ}$

Comprimento do raio (r) da circunferência = $4\text{sen}70^{\circ} + 4\cos70^{\circ} \approx 5{,}12685$

Área (A) do círculo de centro O: $A = \pi \times 5{,}12685^2 \approx 82{,}57548$

Arredondando às décimas, obtém-se $A = 82{,}6$.

Resposta: A área do círculo é aproximadamente 82,6 cm^2.

2.2. Resposta: É o ponto B.

3. A_1 – tampa amarela1; A_2 – tampa amarela 2

V_1 – tampa verde 1; V_2 – tampa verde 2; V_3 – tampa verde 3; V_4 – tampa verde 4

	A_1	A_2	V_1	V_2	V_3	V_4
A_1		A1; A2				
A_2	A2; A1					
V_1						
V_2						
V_3						
V_4						

Seja *A* probabilidade das duas tampas escolhidas serem amarelas

Número de casos possíveis: 30 $(6 \times 6 - 6)$

Número de casos favoráveis: 2

$$P(A) = \frac{2}{30} \approx 0{,}0(6)$$

Arredondando às centésimas, obtém-se $P(A) = \frac{2}{30} \approx 0{,}07$

Resposta: A probabilidade das duas tampas retiradas serem amarelas é aproximadamente 0,07.

Grupo II

1. $f(t) = 0{,}25 + 6\ln(kt + 1), \quad (0 \leq t \leq 40)$

$f(10) = 4{,}4 \Leftrightarrow 0{,}25 + 6\ln(10k + 1) = 4{,}4 \Leftrightarrow 6\ln(10k + 1) = 4{,}4 - 0{,}25 \Leftrightarrow 6\ln(10k + 1) = 4{,}15 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ln(10k + 1) = \frac{4{,}15}{6} \Leftrightarrow \ln(10k + 1) = \frac{4{,}15}{6} \Leftrightarrow 10k + 1 = e^{\frac{4{,}15}{6}} \Leftrightarrow 10k = e^{\frac{4{,}15}{6}} - 1 \Leftrightarrow k = \frac{e^{\frac{4{,}15}{6}} - 1}{10}$$

Arredondando às décimas, obtém-se $k = 0{,}1$.

Resposta: $k = 0{,}1$.

2. Durante 40 semanas a área afetada esteve sempre a aumentar, logo a afirmação “ A função *g* é sempre positiva” é verdadeira dado que a função *f* é crescente e por isso a taxa de variação em cada instante é positiva.

Grupo III

1.

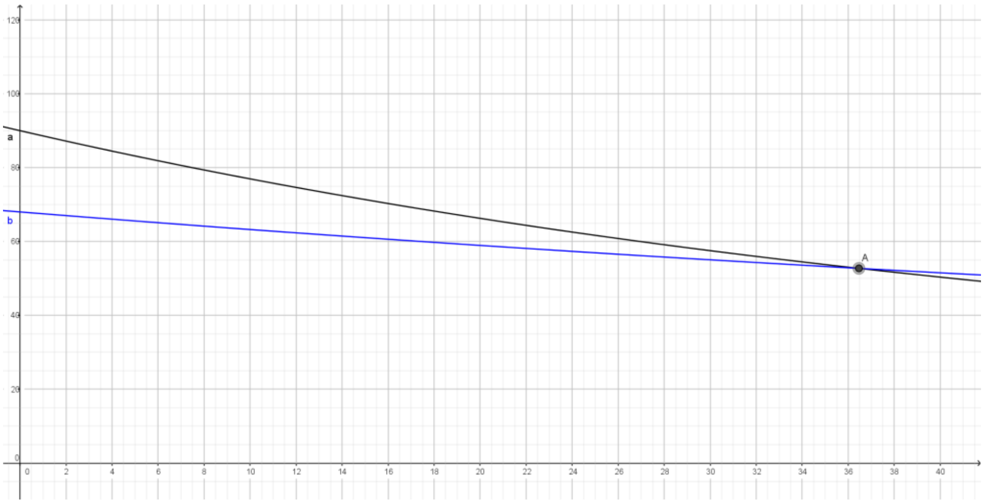
1.1. $A(0) = 18 + 72\,e^{-0.02\times 0}$ = 18 + 72 = 90

$B(0) = 18 + 50\,e^{-0.01\times 0}$ = 18 +50 = 68

$A(0) - B(0)$ = 90 – 68 = 22

Este valor significa que, no momento em que foram colocadas a arrefecer, a diferença de temperaturas nos pontos médios das barras A e B é de 22^{o} C.

1.2. $A(t) = B(t) \iff 18 + 72\,e^{-0.02\times t} = 18 + 50\,e^{-0.01\times t}$



O ponto de interseção tem de coordenadas (36,4643; 52,7222)

Arredondando às décimas, obtém-se (36,5; 52,7).

Resposta: Os pontos médios das barras A e B atingiram a mesma temperaturas 36,5 minutos após terem sido deixadas a arrefecer.

2. Criaram-se duas listas na calculadora, de acordo com os dados fornecidos:

Lista 1 (Tempo em minutos)	2	3	6	8	10	12
Lista 2 (Temperatura em graus Celsius)	46,1	42,4	39,1	36,2	33,6	31,1

Utilizando na calculadora a função ExpReg (regressão exponencial) determinaram-se os valores para a = 49,655 e b = 0,962

Considerando o modelo de regressão exponencial $y = 49{,}655 \times 0{,}962^{x}$ e substituindo na equação x por 14, obteve-se $y \approx 28{,}8678$.

Arredondando às unidades, obtém-se $y = 29$.

Resposta: A temperatura da barra C após 14 minutos a arrefecer é de aproximadamente 29^{o} C.

Grupo IV

1.

1.1. No instante $t = 2$ temos que:

$$d^2 = 5 - 4\cos\left(\frac{\pi}{2} \times 2\right) \Leftrightarrow d^2 = 5 - 4\cos(\pi) \Leftrightarrow d^2 = 9 \Leftrightarrow d = 3 \text{ (uma vez que } d > 0\text{)}$$

O alvo B tem que estar sobre a circunferência de centro *O* e raio 2.

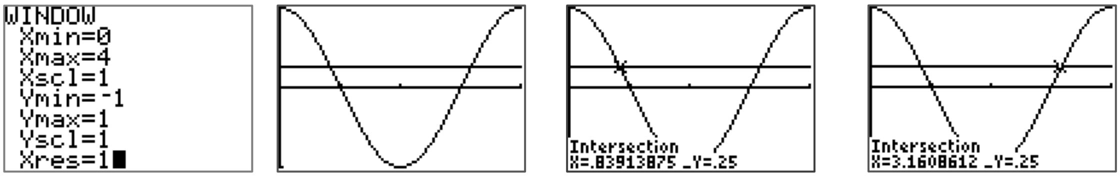
Como A tem coordenadas (1,0) e a distância entre A e B é 3, então a única possibilidade para as coordenadas de B é (–2, 0).

1.2. Temos agora que $5 - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 2^2 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) = \frac{4-5}{-4} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) = \frac{1}{4}$, com $t \in [0, 4]$

Resolvamos a equação graficamente. Para isso fazemos a representação gráfica das funções:

$y = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ e $y = \frac{1}{4}$ e determinamos a interseção dos dois gráficos no intervalo $[0, 4]$.

Obtemos sucessivamente:



Temos então que nos instantes $t = 0{,}8391$ segundos e $t = 3{,}1609$ segundos os dois alvos se encontravam a uma distância de 2 dm um do outro. O tempo que decorreu entre os dois instantes foi de $3{,}1609 - 0{,}8391 = 2{,}3218 \approx 2{,}3$ segundos.

2.

2.1.

O preço a pagar pelas sucessivas séries de cinco tiros constitui uma sucessão cujos termos se encontram em progressão aritmética, digamos $u(n)$, de razão $-0{,}1$

$(2\,€\,;1.90\,€\,;1.80\,€\,;1.70\,€\,;...)$

Sendo assim, o preço a pagar pelas primeiras n séries de cinco tiros é a soma dos n primeiros termos da progressão cujo termo geral é

$$u_n = 2 - 0{,}1 \times (n-1) \Leftrightarrow u_n = 2 - 0{,}1n + 0{,}1 \Leftrightarrow u_n = 2{,}1 - 0{,}1n$$

Essa soma é dada por:

$\frac{2+2,1-0,1n}{2} \times n = \frac{4,1-0,1n}{2} \times n = (2,05-0,05n)\times n = 2,05n-0,05n^2$ tal como se pretendia mostrar (isto com $1 \le n \le 10$)

2.2.

Com recurso às funcionalidades da calculadora podemos construir a tabela correspondente ao preço a pagar por n séries de cinco tiros. Esse preço, como vimos em 2.1., é dado por $2,05n-0,05n^2$.

Fazendo na calculadora $y=2,05x-0,05x^2$ e obtendo a respetiva tabela da função temos:

séries	Preço total
1	2
2	3,9
3	5,7
4	7,4
5	9
6	**10,5**
7	11,9
8	13,2
8	14,4
10	15,5

Resposta: O Artur adquire 6 séries de tiros.

2.3.

O preço a pagar por dez séries de tiros é $2,05\times 10-0,05\times 10^2 = 20,5-5=15,5$

O preço de cada tiro, em média é: $\frac{15,5}{50} = 0,31$ € , isto é, **31 cêntimos** por cada tiro numa compra de 10 séries (50 tiros).

FIM