Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 1ª FASE – 13 DE JULHO 2021

1.

1.1. É fácil verificar que $t = 20$ corresponde ao ano 2017 :

t	ano
0	1997
1	1998
…	…
20	2017

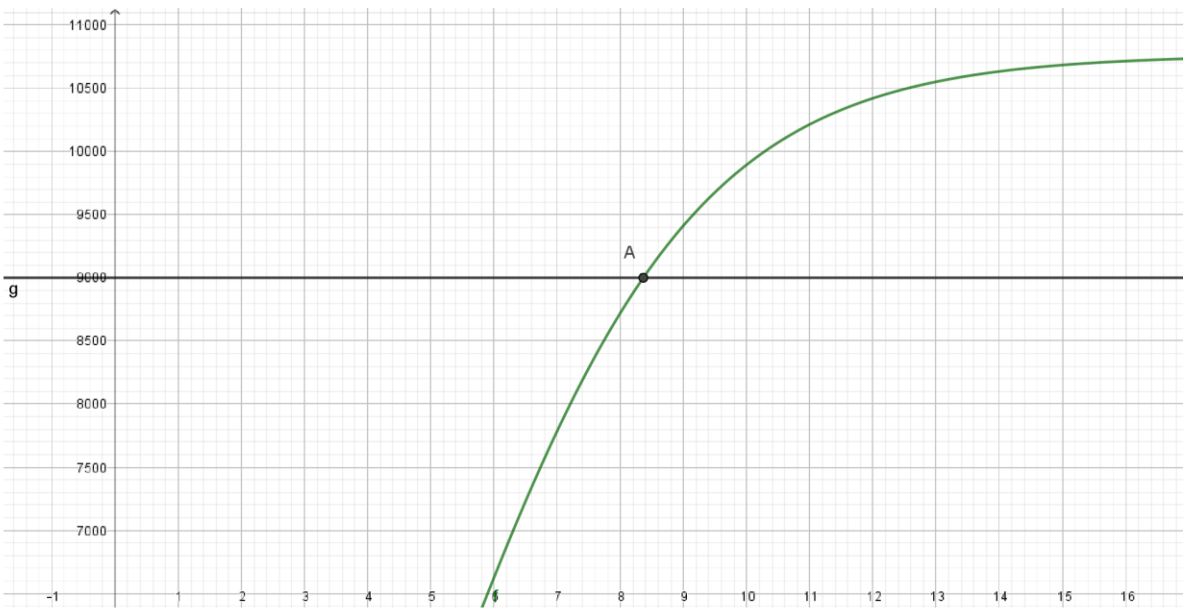
Temos então que:

$$G(20) = \frac{10765.05}{1 + 11.81e^{-0.49\times 20}}$$

$$G(20) \approx 10758$$

Resposta: Em 2017 o consumo energético anual, em gás natural das famílias portuguesas foi de 10 758 TJ.

1.2. Usemos as capacidades da calculadora gráfica para determinar a interseção do gráfico da função que permite definir o consumo energético anual e a reta horizontal, definida por $y = 9000$, por forma a resolver a inequação $G(20) > 9000$:



A interseção dos dois gráficos é o ponto A, cujo valor aproximado da abcissa é 8.36, pelo que o consumo será superior a 9000 TJ a partir de $t = 9$, o que corresponde ao ano 2006.

Resposta: O consumo energético anual, em gás natural, passou a ser superior a 9000 a partir do ano de 2006.

2.

2.1. De acordo com os dados apresentados podemos calcular o valor a pagar em cada uma das empresas.

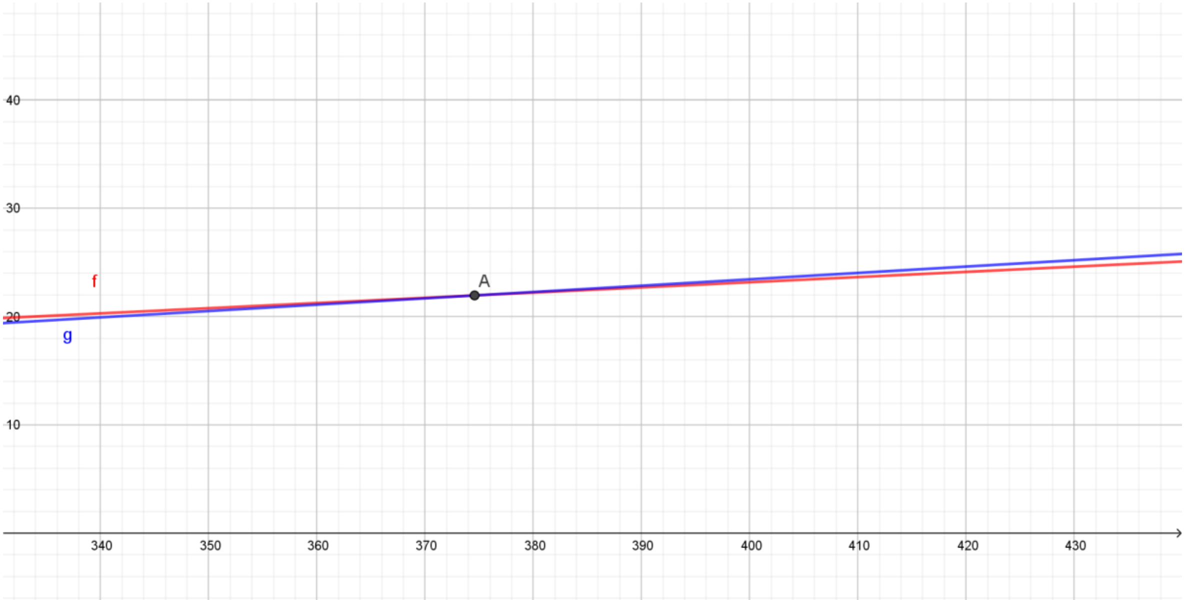
Empresa A	Empresa B
$30 \times 0.1336 + 325 \times 0.0479 = 19.5755 = 19{,}58$ €	$30 \times 0 + 325 \times 0.0586 = 19.045 = 19{,}05$ €

Resposta: De acordo com os cálculos apresentados, o valor a pagar pelo gás natural teria sido menor na empresa B.

2.2. De acordo com os dados apresentados definimos a função *f*, para a empresa A, e a função *g*, para a empresa B.

$f(x) = 30 \times 0.1336 + 0.0479x$	$g(x) = 30 \times 0 + 0.0586x$
$f(x) = 4.008 + 0.0479x$	$g(x) = 0.0586x$

Usemos a calculadora gráfica para visualizarmos os gráficos das duas funções:



Os dois gráficos intersetam-se no ponto A, de abcissa $x \approx 374{,}58$ o que nos permite concluir que $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x > 375$.

Resposta: A empresa A é mais favorável para consumos a partir dos 375 kWh

<u>Também podíamos ter optado por uma resolução algébrica:</u>

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow 4.008 + 0.0479x < 0.0586x$$

$$\Leftrightarrow 0.0479x - 0.0586x < -4.008 \Leftrightarrow -0.0107x < -4.008$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{-4.008}{-0.0107} \Leftrightarrow x > 374{,}5794$$

3.

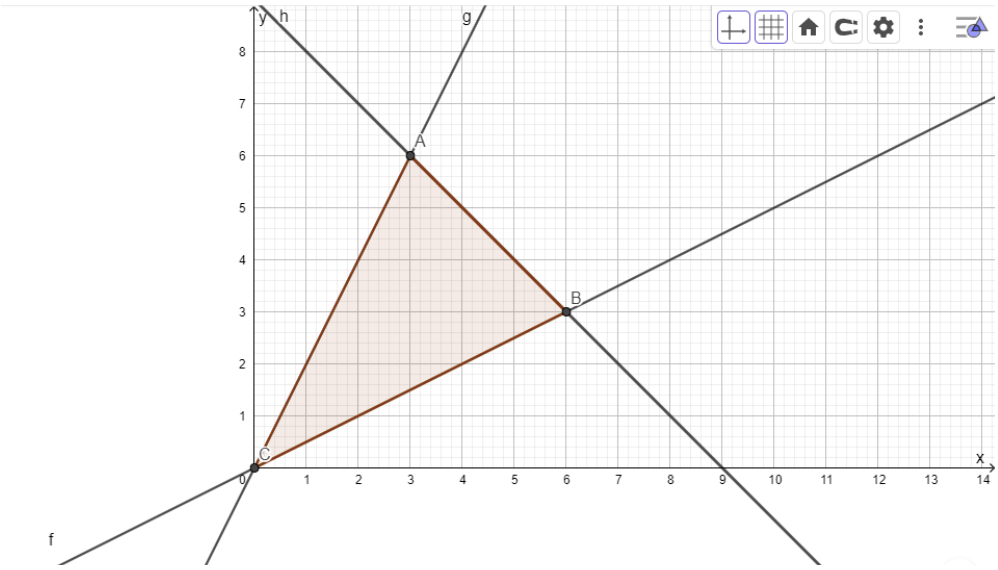
A função objetivo que pretendemos maximizar é :

$L(x) = 3x + 4y$, sendo x a quantidade de cogumelos (kg) e y a quantidade de espargos (kg)

Restrições do problema:

$$\begin{cases} x \leq 2y \\ y \leq 2x \\ x + y \leq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{x}{2} \\ y \leq 2x \\ y \leq -x + 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Construindo a região das soluções admissíveis obtemos o seguinte gráfico, sendo as coordenadas dos pontos A e B, (3, 6) e (6, 3), respetivamente.



Determinando as intersecções correspondentes aos vértices da região admissível, averiguamos a solução ótima.

x	y	$L(x) = 3x + 4y$
3	**6**	**33 - solução ótima**
6	3	30

Resposta: O lucro é máximo se forem cultivados 3 quilogramas de cogumelos e 6 quilogramas de espargos.

4.

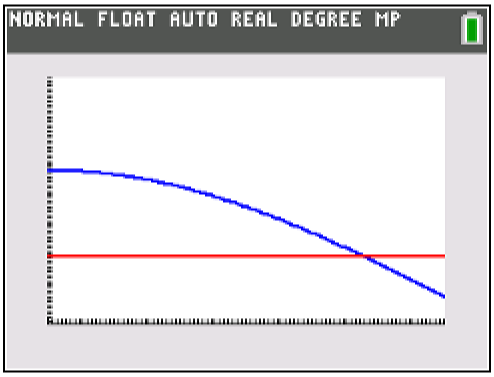
4.1. Como a altura do ponto P é dada diretamente pela função h , basta resolver a equação

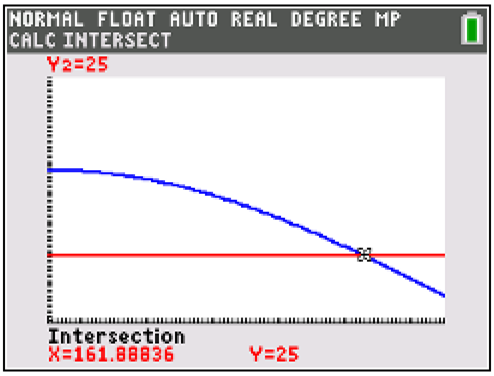
$h(\alpha) = 25$

Usemos a calculadora gráfica para a resolver, tendo em conta que α, em graus, é tal que $90 \leq \alpha \leq 180$

Definimos as funções

$y_1 = 46\sin(x) + 10,7$ e $y_2 = 25$ e determinamos a sua interseção.





Assim, o ângulo pedido é $\alpha \approx 161{,}89°$

Resposta: $\alpha = 162°$

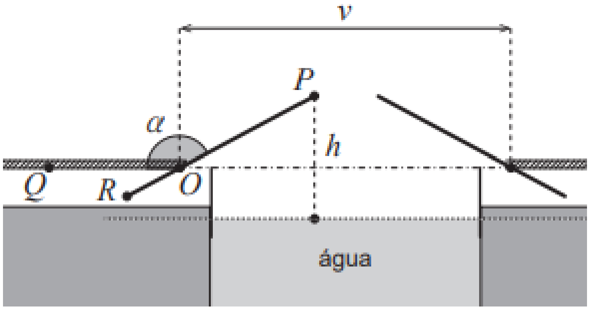
4.2. $h(\alpha) = 46\ sen\ (\alpha) + 10{,}7$

Considerando $\alpha = 90°$, temos que

$h(90°) = 46\ sen\ (90°) + 10{,}7 = 56{,}7\ m$

Considerando $\alpha = 180°$, temos que

$h(180°) = 46\ sen\ (180°) + 10{,}7 = 10{,}7\ m$

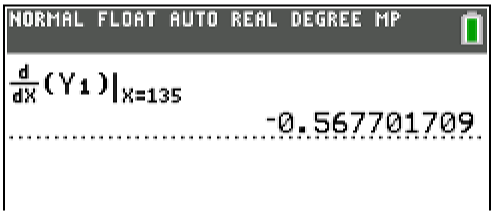


Assim, podemos concluir que metade do comprimento do vão é dado por
$h(90°) - h(180°) = 46\ m$, pelo que o vão da ponte tem um comprimento de 92 m.

Resposta: o vão da ponte tem um comprimento de 92 m

4.3. A taxa de variação instantânea é dada pela função derivada de h .

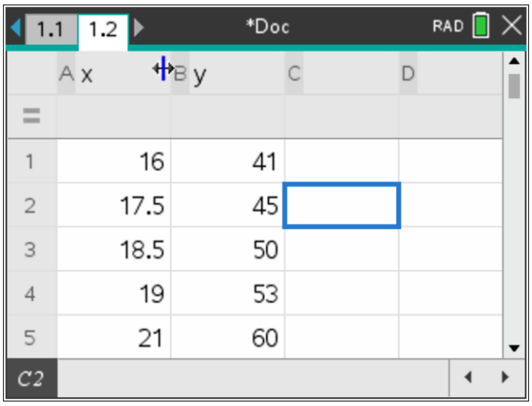
Utilizando a calculadora e fazendo $y_1 = 46\sin(x) + 10,7$, podemos obter o valor de $T(135)$:



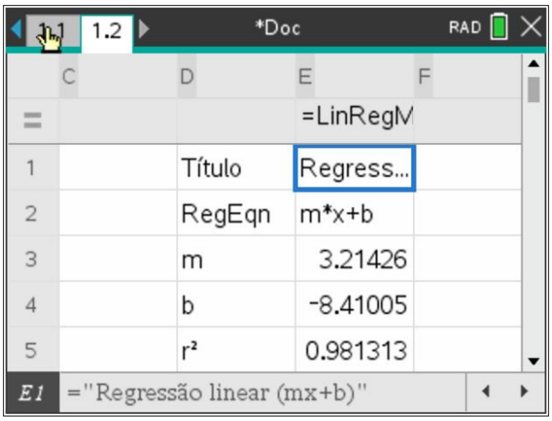
Assim, o valor da taxa de variação instantânea é $T(135) \approx -0,57$ o que significa que a altura em relação ao nível da água, quando $\alpha = 135°$, está a diminuir (a taxa é negativa) à razão aproximada de 57 cm por grau.

5.

5.1. Vamos recorrer à calculadora gráfica para determinarmos os valores dos parâmetros da equação da reta r. Para isso, colocamos numa lista as abcissas dos pontos do diagrama de dispersão, os valores registados da temperatura ambiente, e noutra lista as ordenadas dos pontos, ou seja, os valores registados relativamente ao número de pulsos por segundo.



Recorrendo à regressão linear, obtemos os parâmetros da reta de regressão linear de equação $y = mx + b$, sendo $m \simeq 3,21$ e $b \simeq -8,41$.



Vamos então usar a equação da reta de regressão linear, $y = 3,21x - 8,41$,

para estimar o número de pulsos por segundo feitos pelo grilo (y) quando a temperatura ambiente é igual a 22ºC ($x = 22$):

$$y = 3,21 \times 22 - 8,41 = 62,21 \simeq 62$$

Resposta: Para uma temperatura ambiente de 22ºC, estima-se que o número de pulsos por segundo feitos pelo grilo seja 62.

5.2.

5.2.1. Vejamos que é constante a diferença entre dois termos consecutivos da sequência:

$$u_{n+1} - u_n = 6(n+1) - 48 - (6n - 48) = 6n + 6 - 48 - 6n + 48 = 6$$

Assim, como $u_{n+1} - u_n = 6$, não depende de *n*, concluímos que (u_n) é uma progressão aritmética.

5.2.2. Queremos determinar a soma de 10 termos consecutivos da progressão aritmética, em que o primeiro termo é $u_{20} = 6 \times 20 - 48 = 72$ e o último termo é $u_{29} = 6 \times 29 - 48 = 126$. Assim, o número total de pulsos do grilo ocorridos no conjunto das dez audições é dado por:

$$\frac{72 + 126}{2} \times 10 = 99 \times 10 = 990$$

Resposta: O total de pulsos foi de 990.

6. Para determinarmos o volume que o material de amortecimento ocupa no interior da caixa cúbica, vamos determinar o volume do cubo e subtrair-lhe o volume da esfera.

Sabemos que $D(-10,-10,10)$ pelo que, de acordo com os dados do enunciado, $C(-10,10,10)$ e o cubo tem 20cm de aresta. Como a esfera está inscrita no cubo, de acordo com os dados do enunciado, o raio da esfera é de 10cm.

Assim:

Volume do cubo = $20^3 = 8000\,\text{cm}^3$

Volume da esfera = $\frac{4}{3} \times \pi \times 10^3 \simeq 4188,7902\,\text{cm}^3$

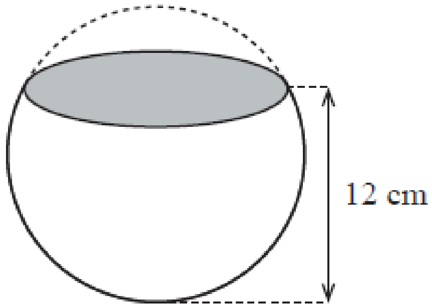
pelo que o volume que o material de amortecimento ocupa no interior da caixa cúbica é de

$8000 - 4188,7902 \simeq 3811\text{cm}^3$.

Resposta: o volume que o material de amortecimento ocupa é de 3811cm^3

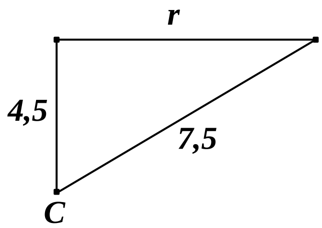
7.

Por ser útil vamos considerar o esquema apresentado na figura 8 do enunciado da prova.



Para determinar o perímetro da abertura circular do vaso precisamos de determinar o seu raio, a que vamos chamar r. Sabemos também que o raio da superfície esférica, de que o vaso é parte, mede $7,5$ cm, o que nos permite concluir que a distância do centro da superfície esférica ao plano da abertura do vaso é $12-7,5=4,5$

Usemos então outro esquema com os dados que já temos, onde o ponto C representa o centro da superfície esférica:



Vamos agora utilizar o Teorema de Pitágoras para determinar o valor de r:

$$r^2+4,5^2=7,5^2 \Leftrightarrow r=\sqrt{7,5^2-4,5^2} \quad (\text{porque } r>0)$$
$$\Leftrightarrow r=\sqrt{36} \Leftrightarrow r=6$$

Ora, sendo assim, temos que **o perímetro da abertura do vaso é dado por**:

$2\pi\times 6=12\pi\approx 37,7$ cm.

8.

Sabemos que **a curva da distribuição normal é simétrica em relação ao valor médio**. Como o valor médio é 65 e $50=65-15$ e $80=65+15$ temos que $P(X<50)=P(X>80)$.

Por outro lado, como $P(50<X<80)=0.7$, vamos ter que $P(X<50)=P(X>80)=\dfrac{0.3}{2}=0.15$.

Atendendo agora a esta distribuição de probabilidade, podemos deduzir a quantidade expectável de batatas-semente que existem em cada um dos intervalos de massa, no conjunto das 2000:

Massa da batata-semente	Menor do que 50	Entre 50 e 80	Maior do que 80
Número de batatas	$0.15\times 2000=300$	$0.7\times 2000=1400$	$0.15\times 2000=300$

Tendo em conta os dados do problema, designadamente a massa das batatas produzidas por cada batata-semente e a massa total temos que:

$$0.8\times 300 + m\times 1400 + 1.5\times 300 = 2230 \Leftrightarrow 240 + 1400m + 450 = 2230$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{2230-690}{1400} \Leftrightarrow m = 1.1$$

Resposta: $m = 1,1$

FIM