

Geometria (10.º ano)

## Circunferências, círculos, superfícies esféricas e esferas

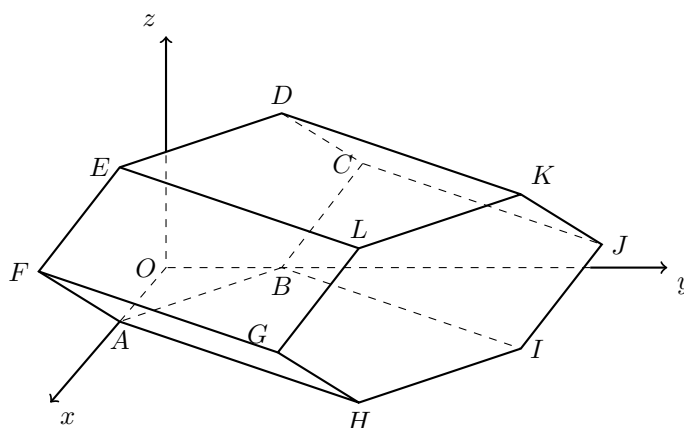
Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios



1. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n.  $Oxyz$ , o prisma hexagonal reto  $[ABCDEFGHijkl]$ , de bases  $[ABCDEF]$  e  $[GHIJKL]$ .

Sabe-se que:

- as coordenadas dos vértices  $A$  e  $G$  do prisma são, respetivamente,  $(4,0,0)$  e  $(12, \frac{13}{2}, 2)$ ;
- a reta  $EL$  é definida pela equação vetorial  $(x,y,z) = (-2, -8, 4) + k(3, 4, 0), k \in \mathbb{R}$ .



Qual das seguintes equações define a superfície esférica de diâmetro  $[AG]$  ?

(A)  $(x - 8)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 + (z - 1)^2 = \frac{441}{16}$

(B)  $(x - 8)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 + (z - 1)^2 = \frac{441}{4}$

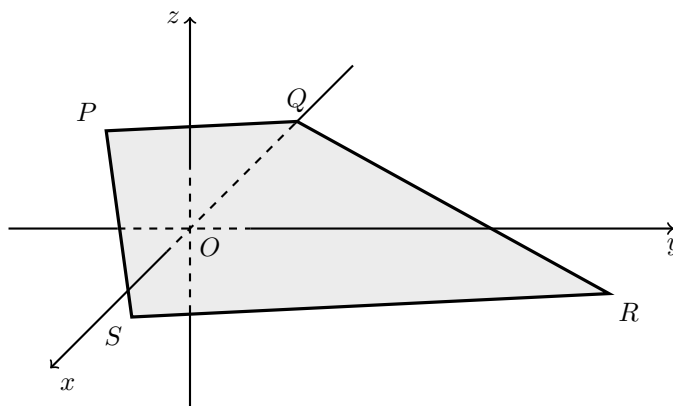
(C)  $(x - 4)^2 + y^2 + z^2 = \frac{441}{16}$

(D)  $(x - 4)^2 + y^2 + z^2 = \frac{441}{4}$

Exame – 2023, 2.ª Fase

2. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n.  $Oxyz$ , um trapézio  $[PQRS]$ , de bases  $[PQ]$  e  $[RS]$ , em que o lado  $[PS]$  é perpendicular às bases.

Tem-se  $P(1, -1, 2)$ ,  $Q(-2, 1, 1)$  e  $R(-5, 5, -3)$



Qual das condições seguintes define a superfície esférica de centro no ponto  $R$  e que passa no ponto  $Q$ ?

- (A)  $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 + (z - 3)^2 = 59$       (B)  $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 + (z - 3)^2 = 41$   
 (C)  $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 + (z + 3)^2 = 41$       (D)  $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 + (z + 3)^2 = 59$

Exame – 2021, 2.ª Fase

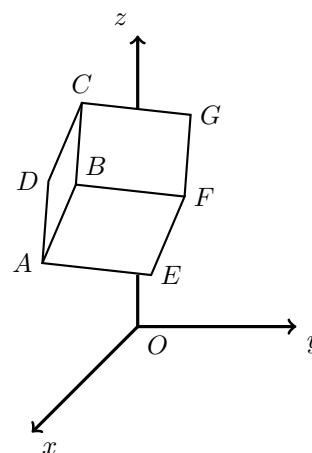
3. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n.  $Oxyz$ , o cubo  $[ABCDEFGH]$  (o ponto  $H$  não está representado na figura).

Sabe-se que:

- o ponto  $A$  tem coordenadas  $(7, 1, 4)$
- o ponto  $G$  tem coordenadas  $(5, 3, 6)$

Resolva o item seguinte sem recorrer à calculadora.

Determine a equação reduzida da superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo.



Exame – 2020, 2.ª Fase



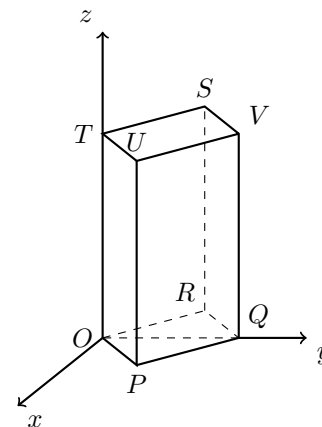
4. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n.  $Oxyz$ , o prisma quadrangular regular  $[OPQRSTUV]$

Sabe-se que:

- a face  $[OPQR]$  está contida no plano  $xOy$
- o vértice  $Q$  pertence ao eixo  $Oy$  e o vértice  $T$  pertence ao eixo  $Oz$
- o plano  $STU$  tem equação  $z = 3$

Seja  $T'$  o simétrico do ponto  $T$ , relativamente à origem do referencial.

Escreva uma equação da superfície esférica de diâmetro  $[TT']$



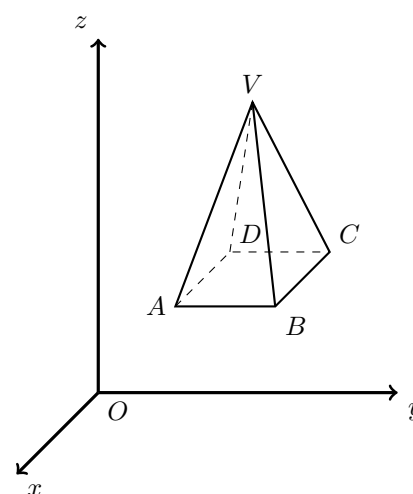
Exame – 2017, 1.ª Fase

5. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n.  $Oxyz$ , uma pirâmide quadrangular regular  $ABCDV$

Sabe-se que:

- a base  $[ABCD]$  da pirâmide é paralela ao plano  $xOy$
- o ponto  $A$  tem coordenadas  $(-1,1,1)$
- o ponto  $C$  tem coordenadas  $(-3,3,1)$

Escreva uma condição que defina a superfície esférica de centro no ponto  $A$  e que é tangente ao plano  $xOy$



Exame – 2016, 1.ª Fase

6. Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , os pontos  $A(0,0,2)$  e  $B(4,0,0)$   
 Determine uma equação cartesiana que defina a superfície esférica da qual o segmento de reta  $[AB]$  é um diâmetro.

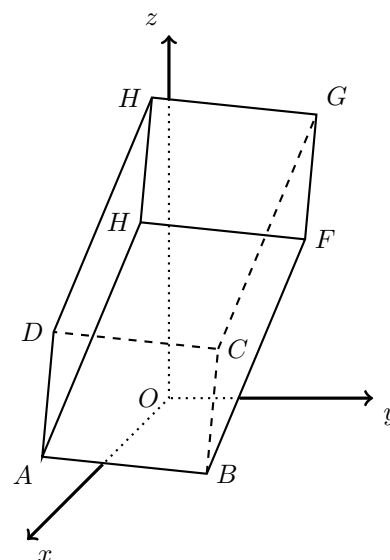
Exame – 2015, 1.ª Fase



7. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n.  $Oxyz$ , o prisma quadrangular regular  $[ABCDEFGH]$

As coordenadas dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $G$  são  $(11, -1, 2)$ ,  $(8, 5, 0)$  e  $(6, 9, 15)$ , respectivamente.

Escreva uma equação que defina a superfície esférica com centro no ponto  $A$  e que passa no ponto  $B$



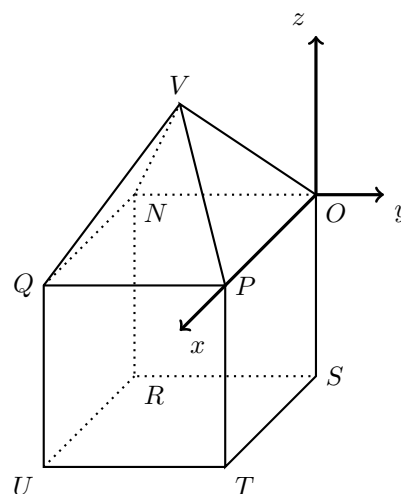
Teste Intermédio 10.º ano – 06.05.2011

8. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n.  $Oxyz$ , o poliedro  $[VNOPQRST]$ , que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

- a base da pirâmide coincide com a face superior do cubo e está contida no plano  $xOy$
- o ponto  $P$  pertence ao eixo  $Ox$
- o ponto  $U$  tem coordenadas  $(4, -4, -4)$

Escreva uma condição cartesiana que defina a superfície esférica de centro em  $U$  e que passa no ponto  $T$



Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2011



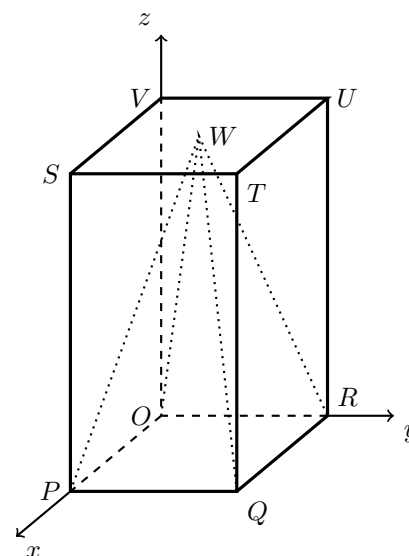
9. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n.  $Oxyz$ , um prisma quadrangular regular e uma pirâmide.

A base da pirâmide,  $[OPQR]$ , está contida no plano  $xOy$  e coincide com a base inferior do prisma.

O ponto  $W$ , vértice da pirâmide, coincide com o centro da base superior,  $[STUV]$ , do prisma.

O ponto  $P$  tem coordenadas  $(5,0,0)$ .

Defina, por uma condição, a superfície esférica de centro no ponto  $Q$  e que passa no ponto  $O$



Teste Intermédio 10.º ano – 05.05.2010

10. Considere, num referencial o.n.  $xOy$ , a circunferência de equação  $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$

Qual das equações seguintes define uma recta tangente a esta circunferência?

- (A)  $x = -3$       (B)  $x = 1$       (C)  $y = -4$       (D)  $y = 1$

Teste Intermédio 10.º ano – 29.01.2010

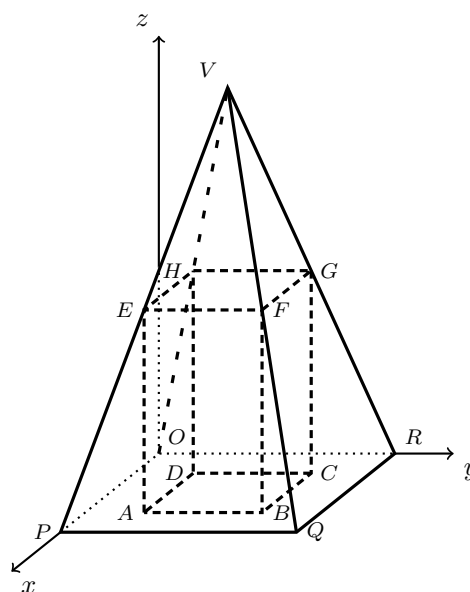
11. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n.  $Oxyz$ , a pirâmide quadrangular regular  $[VOPQR]$  e o prisma quadrangular regular  $[ABCDEFGH]$

Sabe-se que:

- os vértices  $P$  e  $R$  da pirâmide pertencem aos eixos ordenados  $Ox$  e  $Oy$ , respetivamente;
- uma das bases do prisma está contida na base da pirâmide e cada vértice da outra base pertence a uma aresta da pirâmide.

Sabe-se que  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 8z = 0$  é uma equação da superfície esférica que tem centro no ponto  $V$  e que contém os quatro vértices da base da pirâmide  $[VOPQR]$

Calcule o volume da pirâmide  $[VOPQR]$



Teste Intermédio 10.º ano – 29.01.2010

12. Num referencial o.n.  $Oxyz$ , a condição  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4$  define uma esfera.

Qual das equações seguintes define um plano que divide essa esfera em dois sólidos com o mesmo volume?

- (A)  $x = 0$       (B)  $x = 1$       (C)  $x = 2$       (D)  $x = 3$

Teste Intermédio 10.º ano – 28.01.2009



13. Considere, num referencial o. n.  $Oxyz$ , a superfície esférica de equação  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$

A intersecção desta superfície com o plano  $xOy$  é

- (A) o conjunto vazio      (B) um ponto      (C) uma circunferência      (D) um círculo

Teste Intermédio 11.º ano – 29.01.2009

14. Na figura está representado, em referencial o.n.  $Oxyz$ , um sólido que pode ser decomposto num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

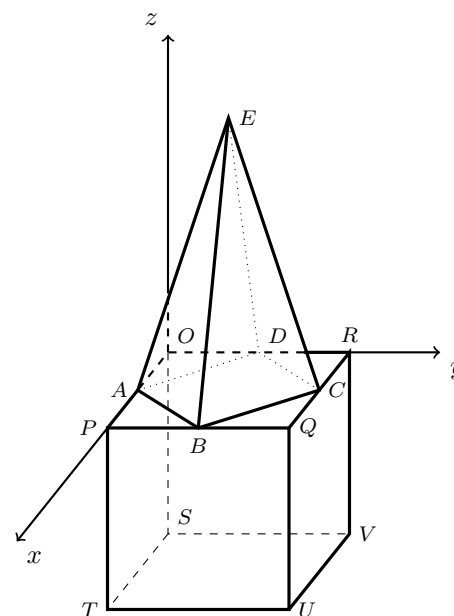
A origem do referencial é um dos vértices do cubo, o vértice  $P$  pertence ao eixo  $Ox$  e o vértice  $R$  pertence ao eixo  $Oy$ .

Os vértices da base da pirâmide são os pontos médios dos lados do quadrado  $[OPQR]$ .

O ponto  $Q$  tem coordenadas  $(2,2,0)$ .

O volume do sólido é igual a 10

Determine uma equação da superfície esférica que tem centro no ponto  $T$  e que contém o ponto  $C$ .



Teste Intermédio 10.º ano – 28.01.2009

15. Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , as superfícies esféricas definidas pelas equações

$$x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 2 \quad \text{e} \quad x^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 2$$

A intersecção destas superfícies esféricas é ...

- (A) um ponto.      (B) uma circunferência.  
(C) o conjunto vazio.      (D) um segmento de reta.

Exame – 2001, Prova de reserva (cód. 135)



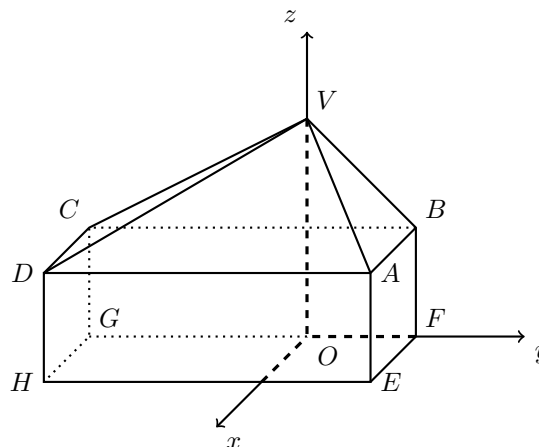
16. Na figura ao lado está representado, em referencial o.n.  $Oxyz$ , um sólido formado por um paralelepípedo retângulo  $[ABCDEFGH]$  e uma pirâmide  $[ABCDV]$ .

A base  $[EFGH]$  do paralelepípedo está contida no plano  $xOy$  e a base da pirâmide  $[ABCD]$  coincide com a face superior do paralelepípedo.

A aresta  $[GF]$  está contida no eixo  $Oy$ .

Uma equação da superfície esférica com centro  $A(1,1,1)$  e que contém  $G$  é  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 11$

Verifique que o ponto  $H$  tem coordenadas  $(1, -2, 0)$



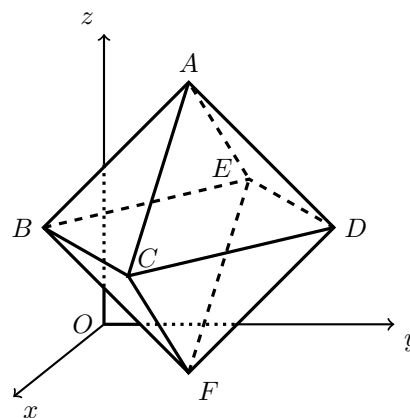
Exame – 2001, Prova de reserva (cód. 135)

17. Na figura ao lado está representado, em referencial o.n.  $Oxyz$ , um octaedro  $[ABCDEFGH]$

Sabe-se que:

- o vértice  $B$  tem coordenadas  $(1,0,1)$
- o vértice  $E$  tem coordenadas  $(0,1,1)$
- o vértice  $F$  pertence ao plano  $xOy$
- o vértice  $A$  tem coordenadas  $(1,1,2)$

Determine uma equação da superfície esférica que contém os seis vértices do octaedro.



Exame – 2001, 2.ª fase (cód. 135)

18. Considere, em referencial o.n.  $Oxyz$ , a superfície esférica centrada na origem do referencial e cuja interseção com o plano de equação  $z = 3$  é uma circunferência de perímetro  $8\pi$

Qual das seguintes é uma equação desta superfície esférica?

- (A)  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$       (B)  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$       (C)  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$       (D)  $x^2 + y^2 + z^2 = 36$

Exame – 2001, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

19. Qual das seguintes equações define, num referencial o.n.  $Oxyz$ , uma superfície esférica tangente aos planos de equações  $x = 4$  e  $y = 0$  ?

- (A)  $(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$       (B)  $(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 16$

- (C)  $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$       (D)  $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 16$

Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)



20. Num referencial o.n.  $Oxyz$ , considere os planos definidos pelas equações  $z = 1$  e  $z = 5$

Qual das equações seguintes define uma superfície esférica tangente aos dois planos?

- (A)  $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 25$                       (B)  $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 25$   
 (C)  $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 4$                       (D)  $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 4$

Exame – 2001, Prova Modelo (cód. 135)  
 Exame – 2000, 2.ª Fase (cód. 135)

21. Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , a superfície esférica  $S$ , de equação  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 2$

Qual das equações seguintes define um plano cuja intersecção com a superfície esférica não é vazia?

- (A)  $x = -1$                       (B)  $x = 0$                       (C)  $x = 3$                       (D)  $x = 4$

Exame – 2000, Prova 2 para Militares (cód. 135)  
 Exame – 2000, Prova de reserva (cód. 135)

22. Num referencial o. n.  $Oxyz$ , qual das seguintes equações define uma superfície esférica tangente ao plano  $yOz$ ?

- (A)  $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 1$                       (B)  $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 2$   
 (C)  $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 4$                       (D)  $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 9$

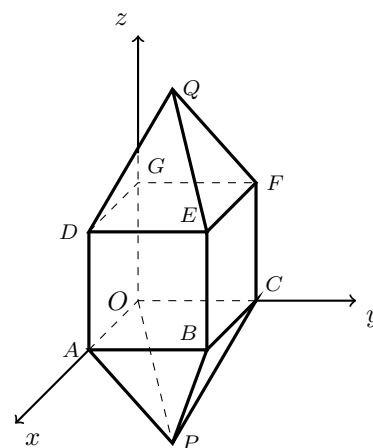
Exame – 2000, Época Especial (setembro) (cód. 135)  
 Exame – 1999, Prova de reserva (cód. 135) (adaptado)

23. Na figura ao lado está representado um poliedro num referencial o.n.  $Oxyz$

Sabe-se que:

- o vértice  $O$  do poliedro é a origem do referencial;
- o vértice  $E$  do poliedro tem coordenadas  $(2,2,2)$ ;
- a altura de cada uma das pirâmides é igual ao comprimento da aresta do cubo.

Justifique que o ponto  $F$  não pertence à superfície esférica de diâmetro  $[PQ]$



Exame – 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

24. Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , as superfícies esféricas de equações

$$x^2 + y^2 + (z - 10)^2 = 9 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 9$$

A intersecção das duas superfícies esféricas é

- (A) um ponto.                      (B) uma circunferência.  
 (C) uma superfície esférica.                      (D) o conjunto vazio.

Exame – 1999, Prova para Militares (cód. 135)





25. Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , a esfera  $\varepsilon$  definida pela condição

$$x^2 + (y - 7)^2 + z^2 \leq 9$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

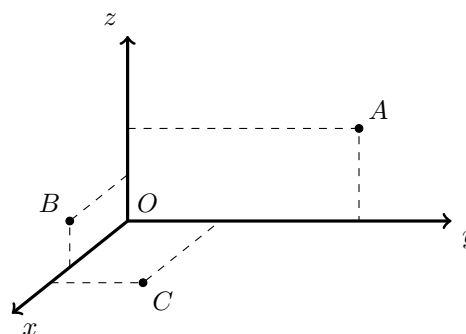
- (A) Na esfera  $\varepsilon$  existem pontos do eixo  $Ox$                       (B) Na esfera  $\varepsilon$  existem pontos do eixo  $Oy$   
 (C) O ponto  $(7,7,0)$  pertence à esfera  $\varepsilon$                       (D) O ponto  $(0,0,7)$  pertence à esfera  $\varepsilon$

Exame – 1999, Época Especial (cód. 135)

26. Na figura seguinte estão representados três pontos, em referencial o.n.  $Oxyz$

Sabe-se que:

- o ponto  $A$  tem coordenadas  $(0,5,2)$
- o ponto  $B$  pertence ao plano  $xOz$
- o ponto  $C$  pertence ao plano  $xOy$
- a reta  $BC$  tem equação vetorial  $(x,y,z) = (5,4,-1) + k(1,2,-1)$ ,  $k \in \mathbb{R}$



Considere a superfície esférica de centro em  $A$ , cuja intersecção com o plano  $xOy$  é uma circunferência de raio 3

Determine uma equação dessa superfície esférica.

Exame – 1999, 2.ª fase (cód. 135)

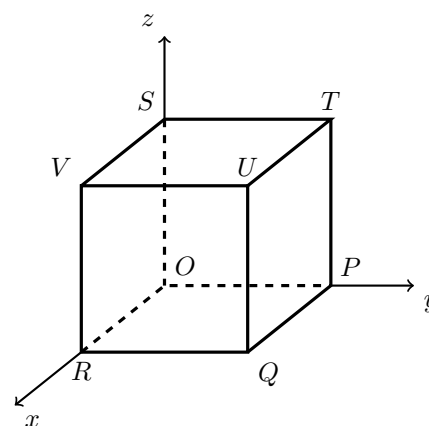
27. Na figura ao lado está representado um cubo, em referencial o.n.  $Oxyz$

Sabe-se que:

- a face  $[OPQR]$  está contida no plano  $xOy$
- a face  $[OSVR]$  está contida no plano  $xOz$
- a face  $[OSTP]$  está contida no plano  $yOz$
- o volume do cubo é 27

Determine uma equação da superfície esférica tal que:

- o centro é o simétrico do ponto  $U$ , em relação ao plano  $xOy$
- o ponto  $Q$  pertence a essa superfície esférica



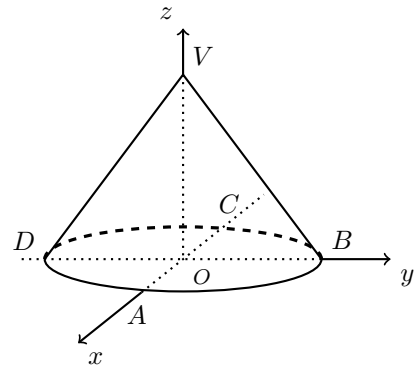
Exame – 1999, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)



28. Na figura seguinte está representado, em referencial o.n.  $Oxyz$ , um cone de revolução.

Sabe-se que:

- A base do cone está contida no plano  $xOy$  e tem o seu centro na origem do referencial
- $[AC]$  e  $[BD]$  são diâmetros da base
- O ponto  $A$  pertence ao semieixo positivo  $Ox$
- O ponto  $B$  pertence ao semieixo positivo  $Oy$
- O vértice  $V$  pertence ao semieixo positivo  $Oz$
- O comprimento do raio da base é 3 e a altura do cone é 4



Determine uma condição que defina a esfera cujo centro é o ponto  $V$  e cuja intersecção com o plano  $xOy$  é a base do cone.

Exame – 1999, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

29. Num referencial o.n.  $Oxyz$ , considere:

- a esfera definida pela condição  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$
- o plano de equação  $z = 4$

Qual é a área da intersecção da esfera com o plano?

- (A)  $\pi$       (B)  $3\pi$       (C)  $6\pi$       (D)  $9\pi$

Exame – 1999, Prova Modelo (cód. 135)

30. Num referencial o.n.  $Oxyz$ , considere:

- o plano  $\alpha$ , de equação  $y = 4$
- a superfície esférica  $E$  de equação  $x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 4$

A intersecção da superfície esférica  $E$  com o plano  $\alpha$  é

- (A) um ponto      (B) uma circunferência de raio 1  
 (C) uma circunferência de raio 2      (D) o conjunto vazio

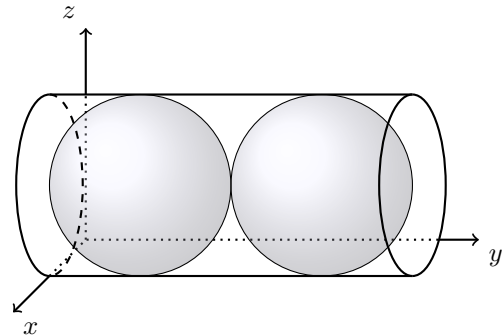
Exame – 1998, Prova de reserva (cód. 135)



31. Na figura abaixo está representada, em referencial o.n.  $Oxyz$ , uma caixa cilíndrica construída num material de espessura desprezável.

A caixa contém duas bolas encostadas uma à outra e às bases da caixa cilíndrica.

- O cilindro tem uma das bases no plano  $xOz$
- O centro dessa base é o ponto de coordenadas  $(3,0,3)$
- A outra base está contida no plano de equação  $y = 12$
- As bolas são esferas de raio igual a 3
- Os diâmetros das esferas e das bases do cilindro são iguais



Justifique que a superfície esférica correspondente à bola mais afastada do plano tem centro no ponto  $(3,9,3)$  e que o ponto  $(1,8,1)$  pertence a essa superfície esférica.

Exame – 1998, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

32. Na figura ao lado está representado um cubo, em referencial o.n.  $Oxyz$

O vértice  $O$  coincide com a origem do referencial.

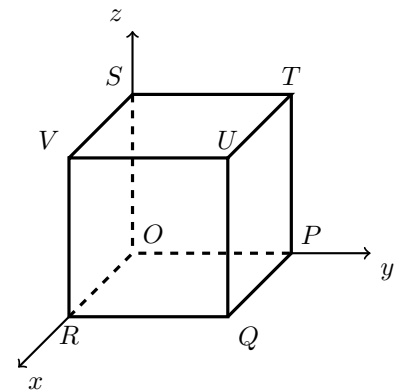
O vértice  $R$  pertence ao semieixo positivo  $Ox$

O vértice  $P$  pertence ao semieixo positivo  $Oy$

O vértice  $S$  pertence ao semieixo positivo  $Oz$

A abscissa do ponto  $R$  é 2

Mostre que o raio da superfície esférica que contém os oito vértices do cubo é  $\sqrt{3}$  e determine uma equação dessa superfície esférica.



Exame – 1998, Prova Modelo (cód. 135)

33. Num referencial o.n.  $Oxyz$  uma esfera tem centro no ponto  $C(2,3,4)$  e é tangente ao plano  $xOy$ . Uma condição que define a esfera é:

(A)  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4^2$

(B)  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 \leq 2^2$

(C)  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 \leq 3^2$

(D)  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 \leq 4^2$

Exame – 1997, Prova para militares (cód. 135)

34. Num referencial o.n.  $Oxyz$ , a intersecção das superfícies esféricas definidas pelas equações

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad \text{é}$$

(A) um ponto.

(B) uma superfície esférica.

(C) uma circunferência.

(D) o conjunto vazio.

Exame – 1997, 2.ª fase (cód. 135)

