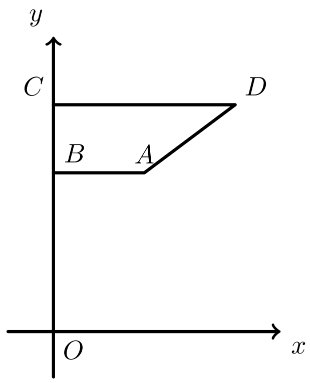
Geometria (10.º ano)

Mediatriz e plano mediador

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução

1.

1.1. Como o trapézio é retângulo, e os vértices B e C pertencem ao eixo Oy e as ordenadas são respetivamente iguais às dos pontos A e D, temos que a base menor é $\overline{BA} = x_A = 4$ e a base maior é $\overline{DC} = x_D = 8$
A altura do trapézio é $\overline{BC} = y_C - y_B = 10 - 7 = 3$



Assim, a área do trapézio é:

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{BA} + \overline{DC}}{2} \times \overline{BC} = \frac{4+8}{2} \times 3 = 6 \times 3 = 18$$

1.2. Escrevendo uma condição que define a mediatriz do segmento $[AD]$, e simplificando até obter a equação reduzida, temos:

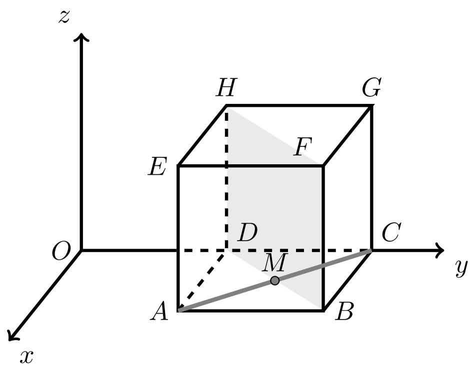
$$(x-4)^2+(y-7)^2 = (x-8)^2+(y-10)^2 \Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2-14y+49 = x^2-16x+64+y^2-20y+100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8x+16-14y+49 = -16x+64-20y+100 \Leftrightarrow -14y+20y = -16x+8x+64+100-16-49 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6y = -8x+99 \Leftrightarrow 6y = 8x-99 \Leftrightarrow y = -\frac{8}{6}x + \frac{99}{6} \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{33}{2}$$

Teste Intermédio 10.º ano – 29.01.2010

2. Os vértices de coordenadas (2,2,0) e (0,4,0), são respetivamente os vértices A e C.



Desta forma, pela observação da figura podemos verificar que o plano mediados do segmento $[AC]$, ou seja a diagonal da face $[ABCD]$, é o plano que contém a outra diagonal desta face, o segmento $[DB]$ e é perpendicular à face $[ABCD]$, ou seja, o plano BDH

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 10.º ano – 28.01.2009

3. Como o ponto C pertence ao eixo Ox tem ordenada nula ($y_C = 0$), e tem abcissa 3 ($x_C = 3$), porque pertence à circunferência de raio 3 com centro na origem.

   Assim, uma equação da mediatriz do segmento $[BC]$, considerando $B(6,3)$ e $C(3,0)$, é:

$$(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 = (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 \Leftrightarrow (x-6)^2 + (y-3)^2 = (x-3)^2 + (y-0)^2 \Leftrightarrow$$

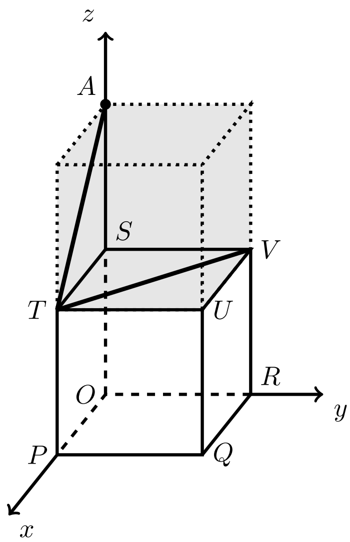
$$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 \Leftrightarrow -12x + 36 - 6y = -6x \Leftrightarrow -12x + 6x + 36 = 6y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6x + 36 = 6y \Leftrightarrow -x + 6 = y \Leftrightarrow y = -x + 6$$

Teste Intermédio 10.º ano – 28.01.2009

4. Como o ponto A tem cota 4, está a duas unidades de distância do ponto S. Assim podemos considerar outro cubo de aresta 2 com uma face comum ao cubo dado e com vértice no ponto A, como se ilustra na figura ao lado. Desta forma é possível verificar que o ponto T é equidistante dos pontos A e V porque ambas as distâncias correspondem às medidas das diagonais de faces do mesmo cubo, ou seja, o ponto T pertence ao plano mediador do segmento $[AV]$.

   A mesma conclusão poderia ser obtida calculando as distâncias entre os pontos T e A e entre T e V e verificar que $\overline{TA} = \overline{TV}$. Ou ainda, determinando uma condição que defina o plano mediador do segmento $[AV]$ $\left(x^2 + y^2 - (z-4)^2 = x^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2\right)$ e depois, substituíndo nessa condição as coordenadas do ponto T, verificar que se obtém uma proposição verdadeira.



Teste Intermédio 10.º ano – 28.05.2008

5. Determinando uma equação do plano mediador do segmento de reta $[PQ]$, temos:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-4)^2 = (x-0)^2 + (y-4)^2 + (z-0)^2 \Leftrightarrow$$

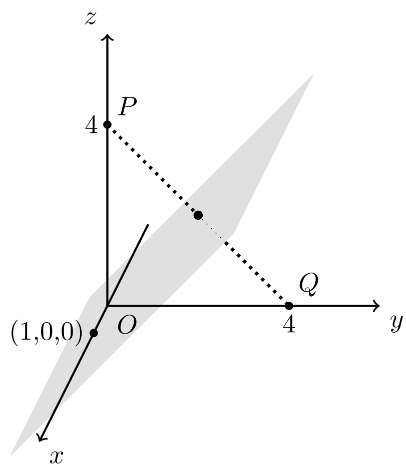
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z-4)^2 = x^2 + (y-4)^2 + z^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 + z^2 - 8z + 16 = y^2 - 8y + 16 + z^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8z = -8y \Leftrightarrow z = y$$

   E assim, observando as coordenadas dos pontos de cada uma das opções, podemos verificar que apenas o ponto de coordenadas (1,0,0), verifica a equação do plano mediador.

   Podemos, em alternativa, representar os pontos P e Q e verificar que o plano mediador do segmento de reta $[PQ]$ contém o eixo Ox, pelo que o ponto de coordenadas (1,0,0), pertence ao plano mediador (como se pretende ilustrar na figura ao lado).



   Resposta: **Opção A**

Exame – 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)