Geometria (10.º ano)

Pontos, retas, e planos

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução

1. Como o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy e à reta de equação $y = 2x + 4$, as suas coordenadas são (0,4)

   Como o ponto A pertence ao semieixo negativo Ox, tem ordenada nula, pelo que a sua abcissa é: $0 = 2x + 4 \Leftrightarrow -4 = 2x \Leftrightarrow -\frac{4}{2} = x \Leftrightarrow -2 = x$

   Assim, as coordenadas do ponto médio, M, do segmento de reta $[AB]$, são:

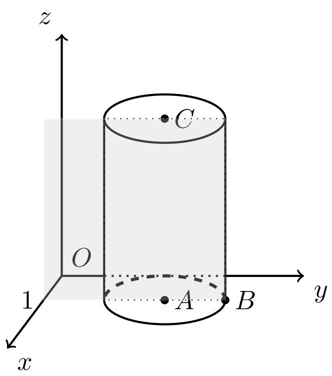
   $$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{-2+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (-1,2)$$

   Resposta: **Opção B**

Exame – 2019, 2.ª Fase

2. Como os pontos A, B e C têm abcissa 1, todos pertencem ao plano de equação $x = 1$. Assim a secção produzida no cilindro pelo plano de equação $x = 1$, é o retângulo que contem estes pontos, ou seja o retângulo cujos lados são o diâmetro da base (2) e a altura (3) do cilindro, pelo que a sua área é:

   $$A = 2 \times 3 = 6$$



Exame – 2017, Época especial

3. O declive da reta AB é dado por:

   $$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-3}{2-(-1)} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

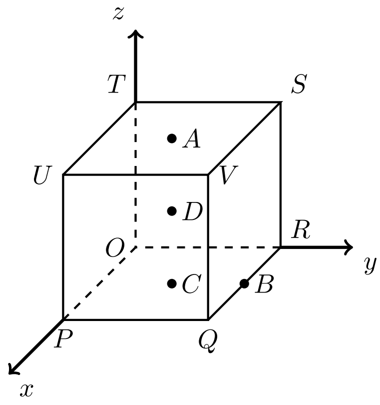
   Como retas paralelas têm o mesmo declive, de entre as opções apresentadas a única reta paralela à reta AB é a que tem declive $\frac{1}{3}$

   Resposta: **Opção B**

Exame – 2016, Época especial

4. Representando os quatro pontos, podemos verificar que:
   - o ponto $A(1,1,2)$ pertence à face $[STUV]$, mas não a qualquer uma das arestas
   - o ponto $B(1,2,0)$ pertence à aresta $[QR]$
   - o ponto $C(1,1,0)$ pertence à face $[OPQR]$, mas não a qualquer uma das arestas
   - o ponto $D(1,1,1)$ é o centro do cubo, mas não pertence a qualquer uma das arestas

   Resposta: **Opção B**



Teste Intermédio 10.º ano – 16.03.2012

5. Como a reta deve ser paralela à reta r deve ter o mesmo declive, ou seja, $m_r = 2$. Como deve conter o ponto A (cuja abcissa é nula) então a ordenada na origem é igual à ordenada do ponto A.

   Assim a equação reduzida, da reta paralela à reta r que passa no ponto A, é:

$$y = m_r x + y_A \;\Leftrightarrow\; y = 2x - 2$$

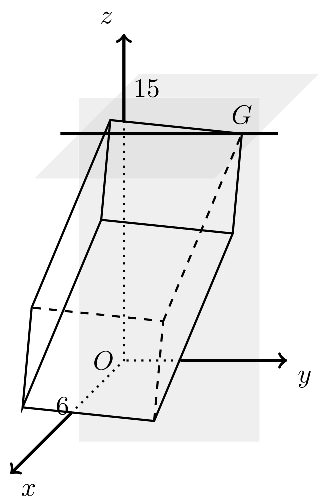
Teste Intermédio 10.º ano – 16.03.2012

6. Como a reta deve ser paralela ao eixo Oy pode ser definida pela interseção de dois planos, perpendiculares aos eixos Ox e Oz, respetivamente.

   Como a reta deve conter o ponto $G(6,9,15)$, o plano perpendicular ao eixo Ox é o plano de equação $x = 6$ e o plano perpendicular ao eixo das cotas é o plano definido por $z = 15$

   Assim, uma condição que define a reta que passa no ponto G e que é paralela ao eixo Oy, é:

$$x = x_G \,\wedge\, z = z_G \;\Leftrightarrow\; x = 6 \,\wedge\, z = 15$$



Teste Intermédio 10.º ano – 06.05.2011

7. Como a reta QN é paralela ao eixo Ox, e como se pretende que o plano seja perpendicular à reta QN também será perpendicular ao eixo Ox, ou seja, é definido por uma equação do tipo $x = k, k \in \mathbb{R}$

   Como se pretende que o plano contenha o ponto V, então o valor de k é a abcissa do ponto V, $(k = x_V)$. A abcissa do ponto V é metade da abcissa do ponto Q, ou do ponto U, então temos que a equação do plano perpendicular à reta QN e que passa no ponto V é:

$$x = \frac{x_U}{2} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{4}{2} \;\Leftrightarrow\; x = 2$$

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2011

8. Como a reta r que interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 8, ou seja no ponto de coordenadas $B(0,8)$ a respetiva ordenada na origem é 8.

   Como interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 2, ou seja, como também contém o ponto de coordenadas $A(2,0)$, o declive é dado por:

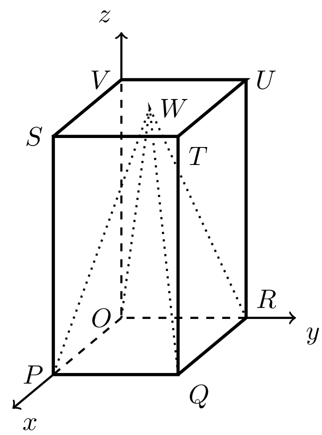
$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8-0}{0-2} = \frac{8}{-2} = -4$$

   Assim, a equação reduzida da reta r é: $y = -4x + 8$

   Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 10.º ano – 05.05.2010

9. Como a base da pirâmide, $[OPQR]$, é um quadrado e o ponto P tem coordenadas $(5,0,0)$ e o ponto o ponto O tem coordenadas $(0,0,0)$, temos que $\overline{OP} = 5$, e a área da base é:



$$A_{[OPQR]} = \overline{OP}^2 = 5^2 = 25$$

   Como o volume da pirâmide é igual a 75, podemos determinar z_W, a cota do ponto W, ou seja a altura da pirâmide:

$$V_{[OPQRW]} = \frac{1}{3} \times A_{[OPQR]} \times z_W \Leftrightarrow 75 = \frac{25}{3} \times z_W \Leftrightarrow \frac{75 \times 3}{25} = z_W \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_W = 9$$

   Assim, como a aresta da base tem comprimento 5, o ponto W é o centro da base superior, ou seja a abcissa e a ordenada medem metade da aresta, as suas coordenadas são:

$$W\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},9\right)$$

Teste Intermédio 10.º ano – 05.05.2010

10. Como a reta r que interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 2, ou seja no ponto de coordenadas $B(0,2)$ a respetiva ordenada na origem é 8.

    Como interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 2, ou seja, como também contém o ponto de coordenadas $A(2,0)$, o declive é dado por:

$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-0}{0-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

    Assim, a equação reduzida da reta r é: $y = -x + 2$

    Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 10.º ano – 29.01.2010

11. *As retas DQ e VF são* ......concorrentes......

As retas EH e ...AB... *são não complanares.*

A reta PQ e o plano HGB são ......paralelos......

A reta FQ e o plano ADH são ......concorrentes......

Os planos BQV e ...PQR... *são perpendiculares.*

Teste Intermédio 10.º ano – 29.01.2010

12. As faces laterais do prisma são retângulos. Temos que $\overline{BE} = z_E = 8$ e a distância entre os pontos $D(4{,}0{,}8)$ e $E(0{,}3{,}8)$, é dada por:

$$\overline{DE} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2 + (8-8)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{16+9+0} = \sqrt{25} = 5$$

Como os pontos E e F são simétricos relativamente ao plano xOz, temos que $\overline{EF} = 2 \times y_E = 2 \times 3 = 6$
Assim, como as bases do prisma são triângulos isósceles, as áreas das faces $[ABED]$ e $[ACFD]$ são iguais e a área **lateral** do prisma, é:

$$A_{Lateral} = 2 \times A_{[ABED]} + A_{[ACFD]} = 2 \times 5 \times 8 + 6 \times 8 = 80 + 48 = 128$$

Teste Intermédio 10.º ano – 06.05.2009

13. Verificando que o ponto simétrico do ponto V, em relação ao plano xOy tem a mesma abcissa, a mesma ordenada e cota simétrica, temos que as coordenadas do ponto W são:

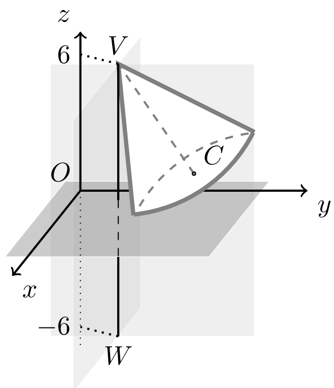
$$W(x_V, y_V, -z_V) = W(1{,}2,-6)$$

Podemos ainda observar que a reta VW é paralela ao eixo Oz, ou seja a interseção de dois planos perpendiculares aos eixos Ox e Oy, ambos contendo o ponto V, ou seja, a reta VW pode ser definida por:

$$x = 1 \ \wedge \ y = 2$$

Para definir o segmento de reta $[WV]$, é necessário garantir que as cotas dos pontos estão compreendidos entre -6 e 6, ou seja, o segmento de reta $[WV]$ é definido por:

$$x = 1 \ \wedge \ y = 2 \ \wedge \ -6 \leq z \leq 6$$



Teste Intermédio 11.º ano – 29.01.2009

14. Como o ponto Q tem coordenadas (2,2,0) e o cubo tem dois vértices sobre os eixos, temos que a aresta do cubo tem medida 2, e volume é:

$$V_C = 2^3 = 8$$

Assim, o volume da pirâmide pode ser calculado pela diferença entre o volume do sólido (V_S) e o volume do cubo (V_C):

$$V_P = V_S - V_C = 10 - 8 = 2$$

Como os vértices da pirâmide são os pontos médios das arestas do cubo, podemos determinar o comprimento da aresta da base da pirâmide:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 2 \underset{\overline{AB}>0}{\Rightarrow} \overline{AB} = \sqrt{2}$$

Assim, a área da base da pirâmide é $A_{[ABCD]} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$, e recorrendo ao valor do volume, podemos calcular a altura da pirâmide, ou seja, a cota do ponto E:

$$V_P = \frac{1}{3} \times A_{[ABCD]} \times z_E \Leftrightarrow 2 = \frac{2 \times z_E}{3} \Leftrightarrow \frac{2 \times 3}{2} = z_E \Leftrightarrow z_E = 3$$

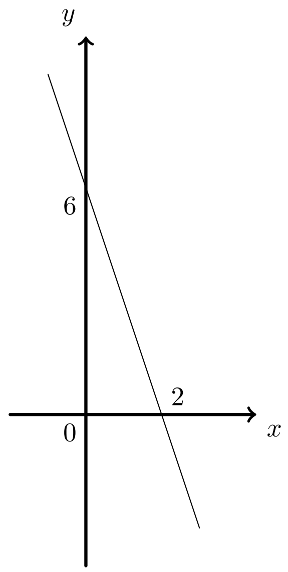
Teste Intermédio 10.º ano – 28.01.2009

15. Como a reta r interseta o eixo Oy no ponto de ordena 6, podemos concluir que a ordenada na origem é 6, ou seja, a equação da reta é da forma $y = ax + 6,\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Como a reta r interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 2 e o eixo Oy no ponto de ordena 6, podemos esboçar a representação da reta num referencial (como na figura ao lado) e concluir que o declive da reta é negativo ($a < 0$).

Assim, de entre as opções apresentadas, a única que satizfaz cumulativamente as duas condições é $y = -3x + 6$

Resposta: **Opção A**



Teste Intermédio 10.º ano – 28.05.2008

16. Como a reta QU é a interseção dos planos PQU e RQU ou seja, dos planos $x = 2$ e $y = 2$, então que uma condição que define a reta $[QU]$ é a parte desta reta que tem cotas compreendidas entre 0 e 2, ou seja:

$$x = 2 \land y = 2 \land 0 \leq z \leq 2$$

Teste Intermédio 10.º ano – 28.05.2008

17.

17.1. Como o ponto A pertence ao eixo das abcissas tem ordenada nula ($y_A = 0$), e como pertence à circunferência de raio 5, centrada na origem, dista 5 unidades da origem, pelo que a abcissa é -5, ($x_A = -5$).

Assim, podemos calcular o valor da ordenada na origem (b) da reta AB, substituindo as coordenadas de um ponto da reta (ponto A) e o valor do declive $\left(m = \frac{1}{2}\right)$ na forma geral da equação reduzida ($y = mx + b$):

$$y_A = m \times x_A + b \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2} \times (-5) + b \Leftrightarrow 0 = -\frac{5}{2} + b \Leftrightarrow \frac{5}{2} = b$$

E assim, uma equação da reta AB é:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2y = x + 5 \Leftrightarrow 0 = x - 2y + 5 \Leftrightarrow x - 2y + 5 = 0$$

17.2. Como o ponto B pertence simultaneamente à reta AB e à circunferência, as coordenadas do ponto B devem verificar as duas equações - a da reta AB ($x - 2y + 5 = 0$) e a da circunferência de raio 5 e centro na origem ($x^2 + y^2 = 5^2$)

Assim, substituindo as coordenadas (3,4) nas duas equações anteriores, temos que:

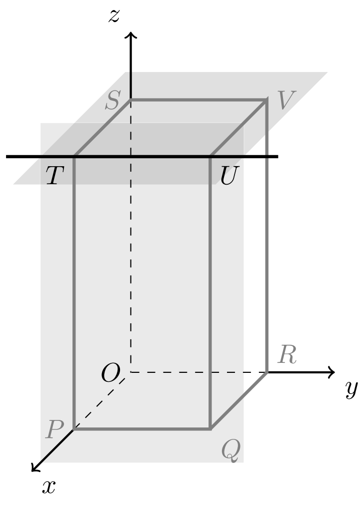
- $(3) - 2(4) + 5 = 0 \Leftrightarrow 3 - 8 - 5 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (Proposição verdadeira)
- $3^2 + 4^2 = 5^2 \Leftrightarrow 9 + 16 = 25 \Leftrightarrow 25 = 25$ (Proposição verdadeira)

Assim, podemos concluir que o ponto B tem coordenadas (3,4), porque, para além das coordenadas do ponto A, estas são as coordenadas do outro ponto que pertence simultaneamente à reta AB e à circunferência descrita, ou seja são as coordenadas do ponto B

Teste Intermédio 11.º ano – 24.01.2008

18. Como a reta TU é a interseção dos planos PTU e STU ou seja, dos planos $x = 2$ e $z = 4$, então que uma condição que define a reta TU é:

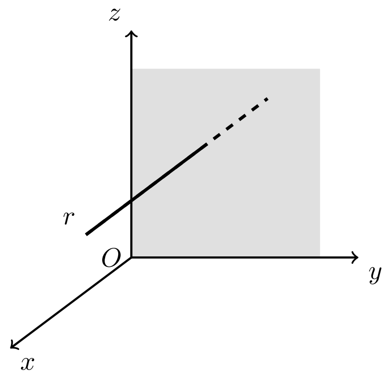
$$x = 2 \wedge z = 4$$



Exame – 2001, Época especial (cód. 135)

19. Analisando as alternativas apresentadas, verificamos que:
    - A opção (A) é falsa porque a reta r é paralela ao plano xOy;
    - A opção (B) não é necessariamente verdadeira porque a reta r pode ser um conjunto de pontos com cota não nula;
    - A opção (C) é falsa porque a reta r é paralela ao eixo Ox;

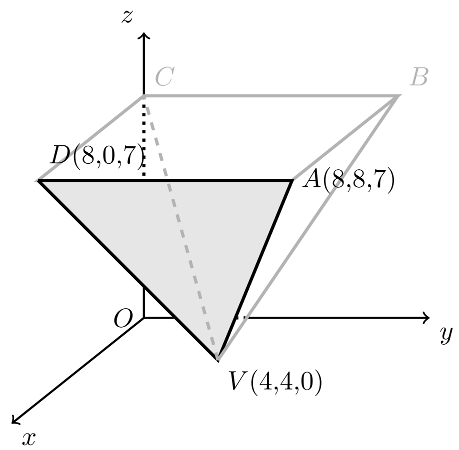
    Relativamente à opção (D),como a reta r é perpendicular ao plano yOz também é perpendicular a todas as retas contidas no plano yOz, em particular aos eixos Oy e Oz, e assim, é paralela ao eixo Ox (como se pretende ilustrar na figura anterior).

    Resposta: **Opção D**

Exame – 2000, Prova 2 para Militares (cód. 135)
Exame – 2000, Prova de reserva (cód. 135)

20. Como o ponto A tem coordenadas (8,8,7), o ponto D pertence ao plano xOz e que a base da pirâmide é paralela ao plano xOy, então as coordenadas do ponto D são (8,0,7) e o lado da base da pirâmide é:

$$\overline{DA} = \sqrt{(8-8)^2 + (0-8)^2 + (7-7)^2} = \sqrt{0 + 8^2 + 0} = 8$$

Como a o vértice V da pirâmide pertence ao plano xOy tem cota nula como a pirâmide é regular as restantes coordenadas são metade das coordenadas respetivas do ponto A, ou seja as coordenadas do vértice V são ((4,4,0)).

Como a pirâmide é regular, as arestas laterais têm o mesmo comprimento ($\overline{DV} = \overline{AV}$), e calculado o valor do comprimento, temos:

$$\overline{DV} = \sqrt{(8-4)^2 + (0-4)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{16 + 16 + 49} = \sqrt{81} = 9$$

Desta forma o perímetro de uma face lateral da pirâmide é:

$$P_{[DAV]} = \overline{DA} + \overline{DV} + \overline{AV} = \overline{DA} + 2\overline{DV} = 8 + 2 \times 9 = 8 + 18 = 26$$

Exame – 2000, Época Especial (setembro) (cód. 135)
Exame – 1999, Prova de reserva (cód. 135)

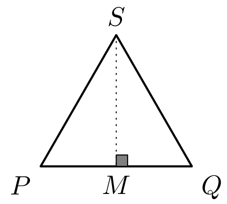
21. Sabendo que a área lateral do prisma é 72, e que a área lateral é a soma das áreas de três retângulos, temos que a área de cada retângulo, em particular do retângulo $[QRST]$ é:

$$A_{[QRST]} = \frac{72}{3} = 24$$

Como o segmento $[QR]$ tem comprimento 6, podemos determinar o comprimento do segmento $[QS]$:

$$A_{[QRST]} = \overline{QR} \times \overline{QS} \Leftrightarrow 24 = 6\overline{QS} \Leftrightarrow \frac{24}{6} = \overline{QS} \Leftrightarrow \overline{QS} = 4$$

Como o prisma é regular, as bases são poolígonos regulares, ou seja, o triângulo $[PQS]$ é equilátero ($\overline{QP} = \overline{QS} = 4$), e por isso considerando M o ponto médio do lado $[PQ]$, temos que



$$\overline{QM} = \frac{\overline{QP}}{2} = \frac{\overline{2}}{2} = 2$$

Desta forma, recorrendo ao teorema de Pitágoras, podemos calcular a cota do ponto S:

$$\overline{QS}^2 = \overline{QM}^2 + \overline{MS}^2 \Leftrightarrow 4^2 = 2^2 + \overline{MS}^2 \Leftrightarrow 16 - 4 = \overline{MS}^2 \underset{\overline{MS}>0}{\Rightarrow} \overline{MS} = \sqrt{12}$$

E assim, verificando que o ponto S tem a mesma abcissa que o ponto P, a mesma ordenada que o ponto M e a cota calculada, temos que as coordenadas do ponto S são $\left(6{,}2{,}\sqrt{12}\right)$

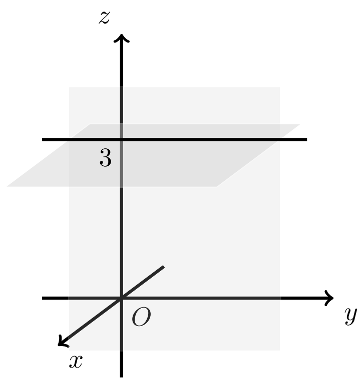
Exame – 2000, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

22. A condição $x = 0$ define um plano perpendicular ao eixo Ox e a condição $z = 3$ define um plano perpendicular ao eixo Oz

Os dois planos intersectam-se segunda uma reta que é definida pela condição:

$$x = 0 \wedge z = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \\ z = 3 \end{cases}$$

Resposta: **Opção C**



Exame – 1999, Época Especial (cód. 135)

23. Calculando o comprimento da aresta do cubo, ou seja, a distância entre os vértices A e D, temos:

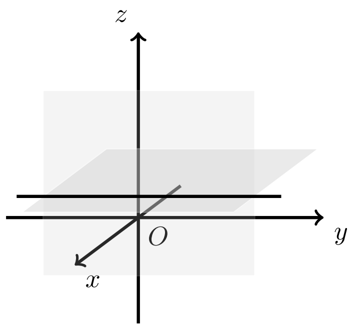
$$\overline{AD} = \sqrt{(3-(-3))^2 + (5-3)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{6^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{36+4+9} = \sqrt{49} = 7$$

Assim, o volume do cubo é: $V = \overline{AD}^3 = 7^3 = 343$

Exame – 1999, Época Especial (cód. 135)

24. Analisando cada uma das opções apresentadas, temos que:

- A condição $x = 1 \wedge y = 2 \wedge z = 3$ representa o ponto de coordenadas $(1,2,3)$
- A condição $x = 2 \ \wedge \ z = 1$ é a interseção de dois planos paralelos aos planos yOz e xOy, respetivamente, ou, em alternativa todos os pontos da forma $(2,k,1), k \in \mathbb{R}$ (como se pretende ilustrar na figura ao lado)
- A condição $x = y = z$ representa todos os pontos da forma $(k,k,k), k \in \mathbb{R}$, ou seja a reta que contém a origem e, por exemplo o ponto $(1,1,1)$, pelo que não é paralela ao eixo Oy
- A condição $y = 1$ representa um plano perpendicular ao eixo Oy



Resposta: **Opção B**

Exame – 1998, Prova para militares (cód. 135)

25. Como a altura da pirâmide é igual ao comprimento da aresta do cubo ($\overline{VM} = \overline{UQ}$), e a base da pirâmide coincide com a face superior do cubo, e a face inferior do cubo tem cota zero (está contida no plano xOy) ao então a cota do vértice (z_V) é a soma da aresta do cubo ($\overline{UQ}$) com a altura da pirâmide($\overline{VM}$):

$$\overline{UQ} + \overline{VM} = z_V \underset{\overline{VM}=\overline{UQ}}{\Leftrightarrow} \overline{UQ} + \overline{UQ} = z_V \Leftrightarrow 2 \times \overline{UQ} = z_V \underset{z_V=12}{\Leftrightarrow} 2 \times \overline{UQ} = 12 \Leftrightarrow \overline{UQ} = \frac{12}{2} \Leftrightarrow \overline{UQ} = 6$$

Assim, como $[ON]$, $[OP]$ e $[OS]$ são arestas do cubo, têm comprimento 6 e assim, temos que as coordenadas do ponto U são $(6,6,6)$, pelo que a distância entre os pontos U e V, é:

$$\overline{UV} = \sqrt{(6-3)^2 + (6-3)^2 + (6-12)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{9+9+36} =$$

$$= \sqrt{54} = \sqrt{9 \times 6} = \sqrt{9} \times \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$

Exame – 1998, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

26. Como o ponto G tem coordenadas $(4,4,0)$, e o ponto O coincide com a origem do referencial então a área da base do prisma é: $A_{[OEGF]} = 4 \times 4 = 16$

E assim, calculando a altura do prisma ($\overline{OB}$), temos que:

$$V_{[ABCDEFGO]} = A_{[OEGF]} \times \overline{OB} \Leftrightarrow 96 = 16 \times \overline{OB} \Leftrightarrow \frac{96}{16} = \overline{OB} \Leftrightarrow 6 = \overline{OB}$$

Assim, como o vértice da pirâmide, ou seja, o ponto H, coincide com o centro da base superior do prisma, as suas coordenadas são metade da abcissa do ponto G, metade da ordenada do ponto G e a cota igual à altura do prisma, ou seja, as coordenadas do pontos H são:

$$\left(\frac{x_G}{2}, \frac{y_G}{2}, \overline{OB}\right) = \left(\frac{4}{2}, \frac{4}{2}, 6\right) = (2,2,6)$$

Exame – 1997, Prova para militares (cód. 135)