

Geometria (10.º ano)

Vetores e equação vetorial da reta

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução



1. Como o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy e à reta de equação $y = 2x + 4$, as suas coordenadas são $(0,4)$

Como o ponto A pertence ao semieixo negativo Ox , tem ordenada nula, pelo que a sua abcissa é:

$$0 = 2x + 4 \Leftrightarrow -4 = 2x \Leftrightarrow -\frac{4}{2} = x \Leftrightarrow -2 = x$$

Desta forma, podemos determinar as coordenadas do vetor \overrightarrow{BA} :

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (-2,0) - (0,4) = (-2 - 0, 0 - 4) = (-2, -4)$$

E assim, as coordenadas do ponto médio, M , do segmento de reta $[AB]$, são:

$$B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = (0,4) + \frac{1}{2}(-2, -4) = \left(0 + \frac{-2}{2}, 4 + \frac{-4}{2}\right) = (0 - 1, 4 - 2) = (-1,2)$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2019, 2.ª Fase

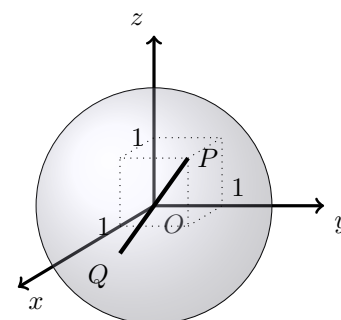
2. Determinando as coordenadas do vetor \overrightarrow{OP} e depois do vetor \vec{u} , temos:

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (1,1,1) - (0,0,0) = (1,1,1)$$

$$\vec{u} = -2\overrightarrow{OP} = -2(1,1,1) = (-2, -2, -2)$$

Assim, temos que as coordenadas do ponto Q são:

$$Q = P + \vec{u} = (1,1,1) + (-2, -2, -2) = (-1, -1, -1)$$



No contexto do problema, como $[OP]$ é um raio da superfície esférica (porque O é o centro da esfera e P um ponto da superfície esférica), então o ponto $Q = P - 2\overrightarrow{OP} = P + 2\overrightarrow{PO}$ é o ponto simétrico do ponto P relativamente a O , ou seja, $[PQ]$ é um diâmetro da superfície esférica.

Exame – 2018, Época especial

3. Escrevendo a equação da reta r na forma reduzida, para identificar o valor do declive, temos:

$$ax + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2y = -ax - 1 \Leftrightarrow y = \frac{-ax - 1}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{a}{2}x - \frac{1}{2}, \text{ e assim } m_r = -\frac{a}{2}$$

Calculando o valor do declive da reta s , através das coordenadas do vetor diretor, vem:

$$m_s = \frac{2a}{a} = 2$$

Como as retas r e s são paralelas, os respetivos declives são iguais, pelo que podemos calcular o valor de a :

$$m_r = m_s \Leftrightarrow -\frac{a}{2} = 2 \Leftrightarrow -a = 2 \times 2 \Leftrightarrow a = -4$$

Resposta: **Opção A**

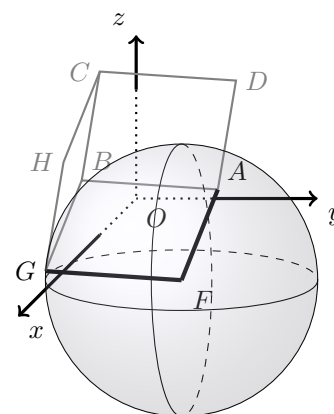
Exame – 2018, Época especial

4. Como $[ABCDEFGH]$ é um cubo então as arestas são iguais, ou seja, o raio da superfície esférica (r) é igual à norma do vetor \overrightarrow{FA} :

$$r = \overline{FG} = \overline{FA} = \|\overrightarrow{FA}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

Desta forma uma condição cartesiana que define a superfície esférica de centro no ponto $F(1,3,-4)$ e de raio 7, é:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-(-4))^2 &= 7^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 &= 49 \end{aligned}$$

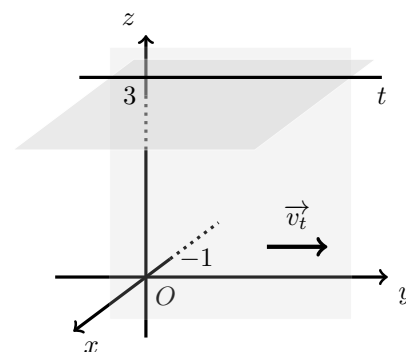


Teste Intermédio 11.º ano – 06.03.2013

5. Como o vetor diretor da reta t ($\vec{v}_t = (0,1,0)$) tem abcissa e cota nulas, a reta é paralela ao eixo das ordenadas.

Assim, de entre as opções apresentadas, a única que define a reta t é a interseção de um plano paralelo ao plano yOz , ou seja o plano definido por $x = -1$ com um plano paralelo ao plano xOy , ou seja, o plano definido por $z = 3$

Resposta: **Opção C**



Teste Intermédio 10.º ano – 16.03.2012

6. Observando a equação que define a reta r , $y = 2x - 1$, podemos verificar que o ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas tem coordenadas $(0, -1)$, e também que o declive é 2, pelo que, o vetor $\vec{v} = (1,2)$ é um vetor diretor da reta.

Assim, uma equação vetorial da reta r , é:

$$(x,y) = (0, -1) + k(1,2), k \in \mathbb{R}$$

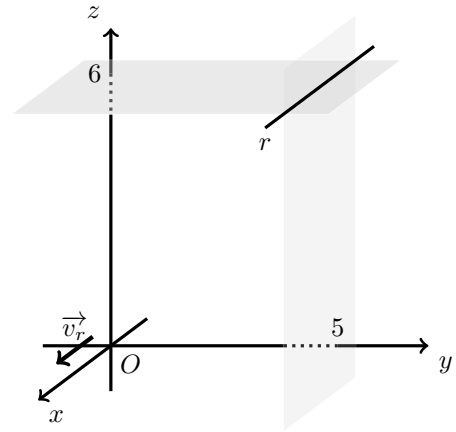
Teste Intermédio 10.º ano – 16.03.2012



7. Como o vetor diretor da reta r ($\vec{v}_r = (0,0,1)$) tem ordenada e cota nulas, a reta é paralela ao eixo das abcissas.

Assim, de entre as opções apresentadas, a única que define a reta r é a interseção de um plano paralelo ao plano xOz , ou seja o plano definido por $y = 5$ com um plano paralelo ao plano xOy , ou seja, o plano definido por $z = 6$

Resposta: **Opção A**



Teste Intermédio 11.º ano – 24.05.2011

8.

- 8.1. Como $[ABCDEFGH]$ é um prisma quadrangular regular, as bases são quadrados, pelo que $\vec{BA} = \vec{GH}$

Calculando as coordenadas do vetor \vec{BA} , temos:

$$\vec{BA} = A - B = (11, -1, 2) - (8, 5, 0) = (11 - 8, -1 - 5, 2 - 0) = (3, -6, 2)$$

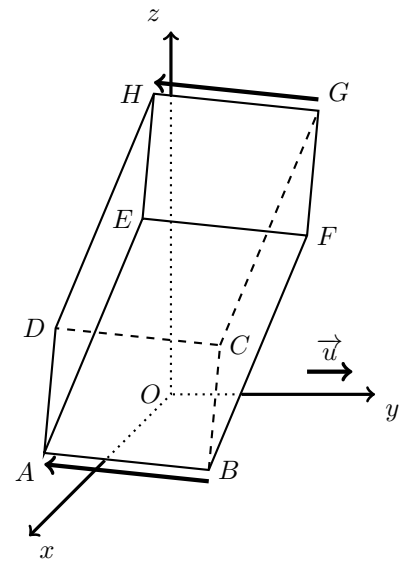
E assim, as coordenadas do ponto H são:

$$H = \vec{GH} + G = (3, -6, 2) + (6, 9, 15) = (9, 3, 17)$$

- 8.2. Como a reta é paralela ao eixo Oy , então um vetor diretor da reta tem abcissa e cota nulas, por exemplo $\vec{u} = (0, 1, 0)$

Como a reta contém o ponto G , é definida pela condição:

$$(x, y, z) = G + k \cdot \vec{u}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y, z) = (6, 9, 15) + k(0, 1, 0), k \in \mathbb{R}$$

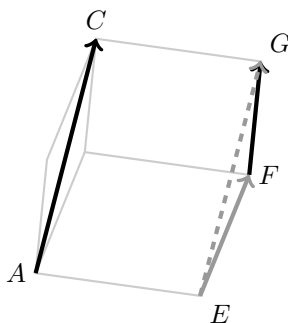


Teste Intermédio 10.º ano – 06.05.2011

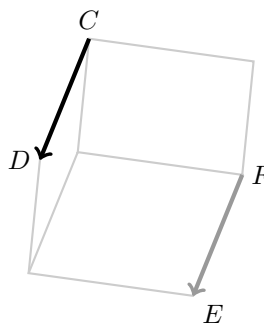
9.

9.1.

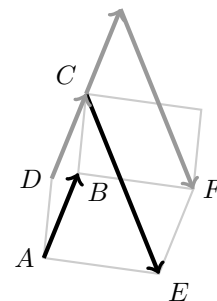
$$\vec{EF} + \vec{FG} = \vec{AC}$$



$$F + \vec{CD} = \dots E \dots$$



$$D + 2\vec{AB} + \vec{CE} = \dots F \dots$$



- 9.1.1. A secção produzida no cubo pelo plano ABG é o retângulo $[ABGH]$



Determinando a medida da aresta do cubo temos que:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (13, 2, 8) - (11, -1, 2) = (13 - 11, 2 - (-1), 8 - 2) = (2, 3, 6)$$

$$\overline{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

E assim, a medida da diagonal da face é:

$$\overline{BG} = \sqrt{\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2} = \sqrt{2 \times 7^2} = \sqrt{2} \times 7 = 7\sqrt{2}$$

E assim, a área da secção produzida no cubo pelo plano ABG , é:

$$A_{[ABGH]} = \overline{AB} \times \overline{BG} = 7 \times 7\sqrt{2} = 49\sqrt{2}$$

9.1.2. Como $\overrightarrow{AB} = (2, 3, 6)$ e $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$, temos que:

$$F = E + \overrightarrow{EF} = E + \overrightarrow{AB} = (8, 5, 0) + (2, 3, 6) = (10, 8, 6)$$

Como a reta deve ser paralela ao eixo Oz , então um vetor diretor da reta tem abcissa e ordenada nulas, por exemplo $\vec{v} = (0, 0, 1)$, e assim a reta deve conter o ponto F , é definida pela condição:

$$(x, y, z) = F + k \cdot \vec{v}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y, z) = (10, 8, 6) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$$

Teste Intermédio 10.º ano – 29.01.2010

10. Como uma das bases do prisma está contida no plano xOy e as arestas laterais são perpendiculares a esta base, temos que a reta AD é paralela ao eixo Oz , e assim o ponto D tem abcissa e ordenada iguais ao ponto A e cota igual ao ponto E , ou seja:

$$D(x_A, y_A, z_E) = D(4, 0, 8)$$

Como o ponto F é simétrico do ponto E relativamente ao plano xOz , os dois pontos têm as mesmas abcissas e cotas e ordenadas simétricas, ou seja:

$$F(x_E, -y_E, z_E) = F(0, -3, 8)$$

Desta forma as coordenadas do vetor \overrightarrow{DF} são:

$$\overrightarrow{DF} = F - D = (0, -3, 8) - (4, 0, 8) = (0 - 4, -3 - 0, 8 - 8) = (-4, -3, 0)$$

Assim, uma equação vectorial da reta DF é:

$$(x, y, z) = (4, 0, 8) + k(-4, -3, 0), k \in \mathbb{R}$$

Teste Intermédio 10.º ano – 06.05.2009



11. Verificando que o ponto simétrico do ponto V , em relação ao plano xOy tem a mesma abscissa, a mesma ordenada e cota simétrica, temos que as coordenadas do ponto W são:

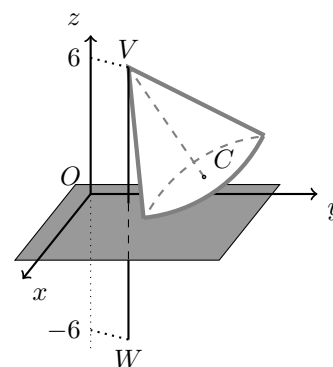
$$W(x_V, y_V, -z_V) = W(1, 2, -6)$$

Para definir o segmento de reta $[WV]$, podemos verificar que o vetor \overrightarrow{WV} é paralelo ao eixo das cotas e tem 12 unidades de comprimento, ou seja:

$$\overrightarrow{WV} = V - W = (1, 2, 6) - (1, 2, -6) = (0, 0, 12)$$

E assim, uma condição vetorial que define o segmento de reta $[WV]$, é, por exemplo:

$$(x, y, z) = (1, 2, -6) + \lambda(0, 0, 12), \lambda \in [0, 1]$$



Teste Intermédio 11.º ano – 29.01.2009

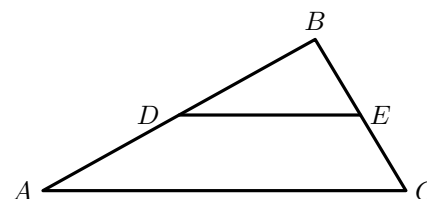
12. Observando as quatro equações vetoriais, podemos verificar que o único vetor diretor com abscissa e ordenada nulas, ou seja, com direção paralela ao eixo Oz é o vetor de coordenadas $\vec{v} = (0, 0, 7)$. Assim, temos que, de entre as opções apresentadas a única condição que define uma reta paralela ao eixo Oz é $(x, y, z) = (1, 1, 0) + k(0, 0, 7), k \in \mathbb{R}$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 10.º ano – 28.01.2009

13. Percorrendo sucessivamente as etapas indicadas na sugestão, temos:

- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DB}$ (porque D é o ponto médio do lado $[AB]$)
- $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BE}$ (porque E é o ponto médio do lado $[BC]$)



Assim, temos que:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{BE} = 2(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE}) = 2\overrightarrow{DE}$$

Da esta forma, como $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{DE}$, os dois vetores são colineares, ou seja, as retas AC e DE são paralelas.

Teste Intermédio 10.º ano – 28.01.2009

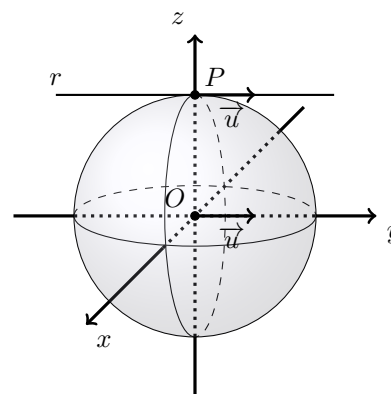


14. Pela observação da condição que define a esfera ($x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$), podemos verificar que:

- tem centro no ponto $C(0,0,0)$
- o comprimento r do raio é $r = \sqrt{4} = 2$
- o ponto de coordenadas $(0,0,2)$ é o ponto da esfera com maior cota.

E também pela observação da equação vetorial da reta, podemos verificar que:

- é paralela ao eixo das ordenadas (porque o vetor diretor tem abcissa e cota nula);
- intersesta o eixo das cotas no ponto de coordenadas $(0,0,2)$.



Desta forma podemos verificar que a reta é tangente à esfera no ponto de coordenadas $(0,0,2)$, como se ilustra na figura anterior, pelo que a interseção da reta com a esfera é este ponto.

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 10.º ano – 28.05.2008

15. O vértice Q tem abcissa e ordenada respetivamente iguais às do vértice U , e cota nula (porque pertence ao plano xOy), ou seja, temos que $Q(x_U, y_U, 0) = Q(2, 2, 0)$

Assim, podemos calcular as coordenadas do vetor \overrightarrow{QU} :

$$\overrightarrow{QU} = U - Q = (2, 2, 2) - (2, 2, 0) = (0, 0, 2)$$

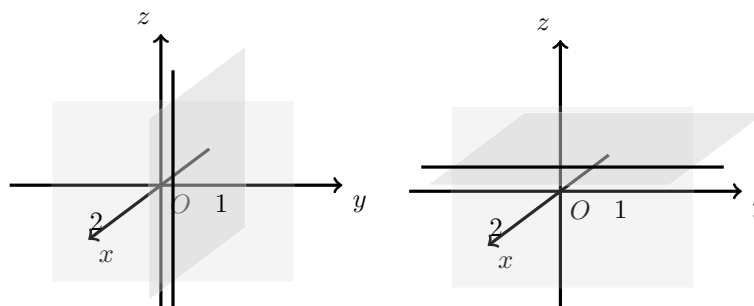
Pelo que uma condição que define a aresta $[QU]$ é:

$$(x, y, z) = Q + k \cdot \overrightarrow{QU}, k \in [0, 1] \Leftrightarrow (x, y, z) = (2, 2, 0) + k(0, 0, 2), k \in [0, 1]$$

Teste Intermédio 10.º ano – 28.05.2008

16. O vetor diretor de uma reta paralela à reta r é colinear com o vetor diretor da reta r . Assim, como os vetores $\vec{u}_A = (0, 1, 0)$ e $\vec{u}_B = (1, 2, 3)$ não são colineares com o vetor diretor da reta r , $\vec{u}_r = (0, 0, 1)$ então as retas definidas pelas equações das opções (A) e (B) não são paralelas à reta r

Verificando que o vetor diretor da reta r , tem a direção do eixo Oz e representado os planos de equação $x = 2$ e $y = 1$ e também os planos de equação $x = 2$ e $z = 1$, podemos verificar que a interseção dos dois planos é uma reta paralela ao eixo Ox apenas no primeiro caso, pelo que, de entre as opções apresentadas, apenas a reta definida por $x = 2 \wedge y = 1$ é paralela à reta r



Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 11.º ano – 06.05.2008



17. Como o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox , então as coordenadas são da forma $(a,0,0)$, $a \in \mathbb{R}^+$
 Como o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy , então as coordenadas são da forma $(0,b,0)$, $b \in \mathbb{R}^+$

Assim as coordenadas do vetor \overrightarrow{AB} são da forma: $\overrightarrow{AB} = B - A = (0,b,0) - (a,0,0) = (-a,b,0)$

Como a e b são valores reais positivos, de entre as opções apresentadas, a única que é compatível com a forma identificada para as coordenadas do vetor \overrightarrow{AB} é $(-2,1,0)$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2001, Época especial (cód. 135)

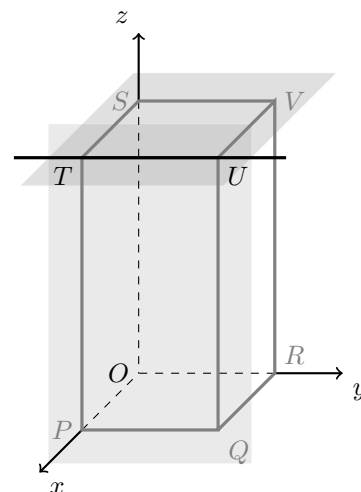
18. O vértice T tem cota e abcissa respetivamente iguais às do vértice U , e ordenada nula (porque pertence ao plano POS , ou seja ao plano xOz), ou seja, temos que $T(x_U, 0, z_U) = T(2, 0, 4)$

Assim, podemos calcular as coordenadas do vetor \overrightarrow{TU} :

$$\overrightarrow{TU} = U - T = (2, 2, 4) - (2, 0, 4) = (0, 2, 0)$$

Pelo que uma condição que define a reta TU é uma equação vetorial da reta TU :

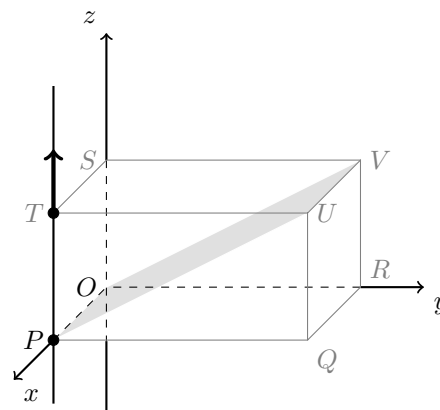
$$(x, y, z) = T + k \cdot \overrightarrow{TU}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y, z) = (2, 0, 4) + k(0, 2, 0), k \in \mathbb{R}$$



Exame – 2001, Época especial (cód. 135)

19. Como a reta contém o vértice $T(2,0,2)$ e tem a direção do vetor $\vec{u} = (0,0,1)$, a reta r é a reta TP , pelo que o ponto de interseção da reta r com o plano OUV é o ponto P , que também pertence ao plano OUV

Resposta: **Opção A**



Exame – 2001, 2.ª fase (cód. 135)



20. Como a base do cone está contida no plano yOz , o centro é a origem do referencial e o vértice pertence ao semieixo positivo Ox , então a altura do cone é a abcissa do vértice (x_V), ou seja a abcissa do ponto da reta r , com ordenada e cota nulas ($y_V = 0$ e $z_V = 0$)

A partir da equação da reta r , podemos verificar que as coordenadas de todos os pontos da reta r são da forma $(3k, 3 - k, 0)$, $k \in \mathbb{R}$

$$(x, y, z) = (0, 3, 0) + k(3, -1, 0), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 3, 0) + (3k, -k, 0), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y, z) = (3k, 3 - k, 0), k \in \mathbb{R}$$

Como a ordenada é nula, temos que:

$$y_V = 0 \Leftrightarrow 3 - k = 0 \Leftrightarrow 3 = k$$

E assim podemos determinar a abcissa do vértice, ou seja, a altura do cone:

$$x_V = 3k \underset{k=3}{=} 3 \times 3 = 9$$

Exame – 2000, Prova para Militares (cód. 135)
Exame – 2000, Época Especial (cód. 135)

21. Observando as coordenadas dos vetores diretores de cada uma das retas relativas às opções apresentadas, podemos verificar que:

- O vetor de coordenadas $(1, 0, 0)$ tem a mesma direção do eixo Ox , pelo que a reta com a direção deste vetor não intersecta nem o plano xOy , nem o plano xOz
- O vetor de coordenadas $(0, 2, 0)$ tem a mesma direção do eixo Oy , pelo que a reta com a direção deste vetor não intersecta nem o plano xOy , nem o plano yOz
- O vetor de coordenadas $(1, 2, 0)$ tem uma direção do plano xOy , e como a reta contém o ponto de coordenadas $(1, 1, 1)$ pelo que a reta não intersecta nem o plano xOy
- O vetor de coordenadas $(1, 1, 1)$ não é paralelo a nenhum dos eixos, pelo que a reta com a direção deste vetor intersecta os três planos coordenados.

Resposta: **Opção D**

Exame – 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

22.

22.1. Calculando as coordenadas dos vetores, temos:

- $\vec{AB} = B - A = (10, 13, 25) - (2, 3, 10) = (8, 10, 15)$
- $\vec{AC} = C - A = (98, 123, 190) - (2, 3, 10) = (96, 120, 180)$

Verificando que os vetores são colineares, vem que:

$$\vec{AC} = \lambda \vec{AB}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow (96, 120, 180) = \lambda(8, 10, 15) \Leftrightarrow \begin{cases} 96 = 8\lambda \\ 120 = 10\lambda \\ 180 = 15\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{96}{8} = \lambda \\ \frac{120}{10} = \lambda \\ \frac{180}{15} = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 12 \\ \lambda = 12 \\ \lambda = 12 \end{cases}$$

Assim temos que $\vec{AC} = 12\vec{AB}$, ou seja, os vetores \vec{AB} e \vec{AC} são colineares, o que permite garantir que os pontos A , B e C devem ser colineares, logo se o projétil seguir uma trajetória retilínea, o alvo é atingido.



22.2. Calculando a distância entre os pontos C (o alvo) e o ponto A (o local onde o projétil é disparado), temos:

$$\overline{CA} = \|\overrightarrow{CA}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{96^2 + 120^2 + 180^2} = \sqrt{56016} \approx 236,7$$

Assim, como $\overline{CA} < 300$, ou seja, o alvo encontra-se a menos de 300 unidades do local onde o projétil é disparado, pelo que é garantida a trajetória retilínea, no caso presente.

Exame – 1999, Prova para Militares (cód. 135)

23. Como as arestas $[AD]$ e $[EH]$ são paralelas (e têm o mesmo comprimento) temos que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EH}$, pelo que podemos calcular as coordenadas do ponto H observando que $H = \overrightarrow{AD} + E$

Assim, calculando as coordenadas do vetor \overrightarrow{AD} e do ponto H , temos:

- $\overrightarrow{AD} = D - A = (-3, 3, 6) - (3, 5, 3) = (-3 - 3, 3 - 5, 6 - 3) = (-6, -2, 3)$
- $H = \overrightarrow{AD} + E = (-6, -2, 3) + (1, 2, -3) = (-6 + 1, -2 + 2, 3 - 3) = (-5, 0, 0)$

Como duas das coordenadas do ponto H são nulas, então o ponto H pertence a um dos eixos coordenados.

Exame – 1999, Época Especial (cód. 135)

24. A partir da equação vetorial da reta BC , podemos verificar que o ponto B , e também o ponto C , são da forma:

$$(x, y, z) = (5, 4, -1) + k(1, 2, -1), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y, z) = (5 + k, 4 + 2k, -1 - k), k \in \mathbb{R}$$

Assim, temos que:

- Como o ponto B pertence ao plano xOz , tem ordenada nula ($y_B = 0$), e assim, anulando a ordenada genérica dos pontos da reta BC , vem que:

$$4 + 2k = 0 \Leftrightarrow 2k = -4 \Leftrightarrow k = -2$$

E assim, as coordenadas do ponto B , podem ser obtidas substituindo o valor de k :

$$(x, y, z) = (5 + k, 4 + 2k, -1 - k) \underset{k=-2}{=} (5 + (-2), 4 + 2(-2), -1 - (-2)) = (5 - 2, 4 - 4, -1 + 2) = (3, 0, 1)$$

- Da mesma forma, como o ponto C pertence ao plano xOy , tem cota nula ($z_C = 0$), e assim, anulando a cota genérica dos pontos da reta BC , vem que:

$$-1 - k = 0 \Leftrightarrow -1 = k$$

E assim, as coordenadas do ponto C , podem ser obtidas substituindo o valor de k :

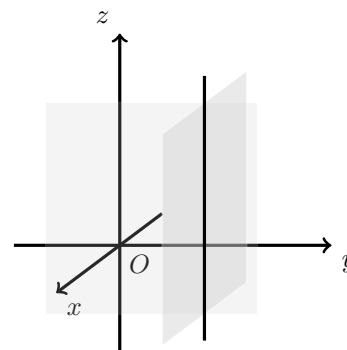
$$(x, y, z) = (5 + k, 4 + 2k, -1 - k) \underset{k=-1}{=} (5 + (-1), 4 + 2(-1), -1 - (-1)) = (5 - 1, 4 - 2, -1 + 1) = (4, 2, 0)$$

Exame – 1999, 2.ª fase (cód. 135)

25. A condição $x = 1$ define um plano perpendicular ao eixo Ox e a condição $y = 2$ define um plano perpendicular ao eixo Oy . Assim, os dois planos intersectam-se segundo uma reta paralela ao eixo Oz , pelo que, observando as opções apresentadas, podemos identificar as coordenadas do vetor diretor da reta: $\vec{v}_r = (0, 0, 2)$

Como os pontos da reta têm abcissa igual a 1 e ordenada igual a 2, de entre as opções apresentadas, a equação deve ser definida com o ponto de coordenadas $(1, 2, 0)$, ou seja, a reta $x = 1 \wedge y = 2$ é definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (1, 2, 0) + k(0, 0, 2), k \in \mathbb{R}$

Resposta: **Opção A**



Exame – 1999, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)



26. Pela observação da condição da esfera, podemos verificar que o centro da esfera é o ponto C de coordenadas $(2,3,4)$

Como $[AB]$ é um diâmetro da esfera, então C é o ponto médio de $[AB]$, e assim, temos que:

- $\vec{AC} = \vec{CB}$
- $C + \vec{CB} = B$

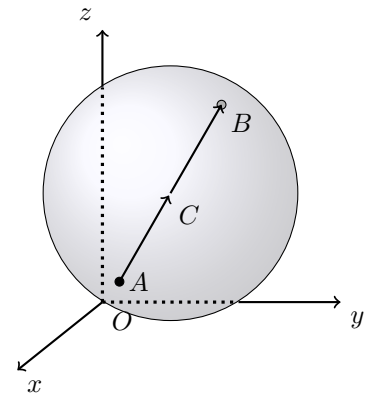
Logo, calculando as coordenadas do vetor \vec{AC} , temos:

$$\vec{AC} = C - A = (2,3,4) - (1,1,1) = (1,2,3)$$

E assim, podemos calcular as coordenadas do ponto B :

$$B = C + \vec{CB} = (2,3,4) + (1,2,3) = (3,5,7)$$

Resposta: **Opção B**



Exame – 1998, 2.ª fase (cód. 135)

27. Analisando cada uma das opções apresentadas, temos que:

- A condição $3x + 5y + 4z = 0$ representa um plano
- A condição $x = 3 \wedge y = 5 \wedge z = 4$ representa o ponto de coordenadas $(3,4,5)$
- A condição $(x,y,z) = (3,0,-4) + k(3,5,0), k \in \mathbb{R}$ representa uma reta que contém o ponto $(3,0,-4)$, ou seja que intersesta o plano xOz , ao contrário da reta PQ paralela ao eixo Oy
- A condição $(x,y,z) = (3,5,0) + k(3,0,-4), k \in \mathbb{R}$ representa a reta que contém o ponto Q e tem a direção do vetor $\vec{PQ} = Q - P = (3,5,0) - (0,5,4) = (3,0,-4)$, ou seja, a reta PQ

Resposta: **Opção D**

Exame – 1998, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

28. Identificando o centro da esfera ε , podemos verificar que é o ponto de coordenadas $(1,2,3)$ e que é um ponto da reta r

Assim, temos que a intersecção da reta r com a esfera ε é um diâmetro da esfera.

Desta forma, identificando o raio da esfera ($\sqrt{36} = 6$) calculamos o comprimento do diâmetro, ou seja do segmento de reta que é a intersecção da reta r com a esfera ε : $2 \times 6 = 12$

Resposta: **Opção C**

Exame – 1998, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)



29. Para escrever uma equação vetorial da reta UV , determinamos as coordenadas do vetor \overrightarrow{UV} :

$$\overrightarrow{UV} = V - U = (3,3,12) - (6,6,6) = (-3, -3,6)$$

E assim, a reta UV é definida pela equação vetorial $(x,y,z) = (6,6,6) + k(-3, -3,6)$, $k \in \mathbb{R}$

Desta forma sabemos que as coordenadas de todos os pontos da reta UV são da forma $(6 - 3k, 6 - 3k, 6 + 6k)$, $k \in \mathbb{R}$

Assim, podemos calcular o valor de k relativo ao ponto que é a intersecção da reta UV com o plano de equação $x = 4$, igualando a abcissa do ponto genérico a 4:

$$4 = 6 - 3k \Leftrightarrow 3k = 6 - 4 \Leftrightarrow 3k = 2 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$$

E desta forma, calculamos as coordenadas do ponto de intersecção:

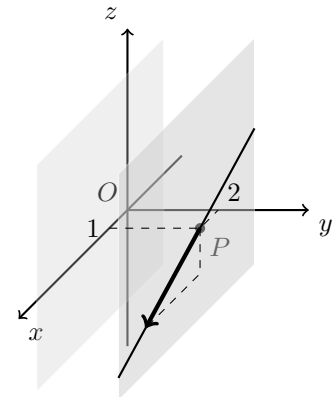
$$\left(6 - 3 \times \frac{2}{3}, 6 - 3 \times \frac{2}{3}, 6 + 6 \times \frac{2}{3}\right) = (6 - 2, 6 - 2, 6 + 4) = (4, 4, 10)$$

Exame - 1998, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

30. Como a equação vetorial da reta r é $(x,y,z) = (1,2,0) + k(3,0,-1)$, $k \in \mathbb{R}$, então as coordenadas de todos os pontos da reta r são da forma $(1 + 3k, 2, -k)$, $k \in \mathbb{R}$, ou seja, têm todos ordenada 2, pelo que a reta r está contida no plano $y = 2$

Como o plano de equação $y = 2$ é paralelo ao plano de equação $y = 0$, ou seja o plano xOy , então a reta r é paralela ao plano xOz (como se pretende ilustrar na figura ao lado).

Resposta: **Opção B**



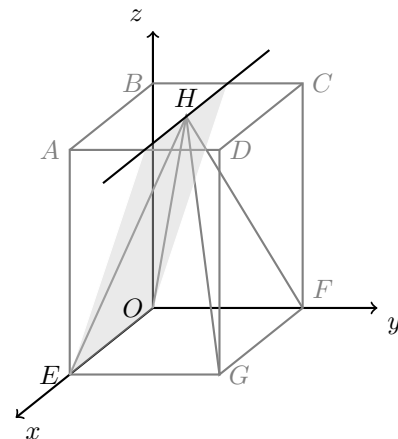
Exame - 1997, Prova para militares (cód. 135)

31. Como a intersecção do plano OEH com o plano ABC é uma reta paralela ao eixo Ox (como se pretende ilustrar na figura ao lado), então tem a direção do vetor

$$\overrightarrow{OE} = E - O = (4,0,0) - (0,0,0) = (4,0,0)$$

Como a reta contém o ponto H uma equação vetorial da reta é:

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= H + \lambda \overrightarrow{OE}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x,y,z) &= (2,2,6) + \lambda(4,0,0), \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



Exame - 1997, Prova para militares (cód. 135)

32. Como a reta r é paralela ao eixo Oz , tem a direção do vetor $\vec{u} = (0,0,1)$ e como passa no ponto B , uma equação vetorial da reta r é:

$$(x,y,z) = B + \lambda \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,5,0) + \lambda(0,0,1), \lambda \in \mathbb{R}$$

Exame - 1997, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

