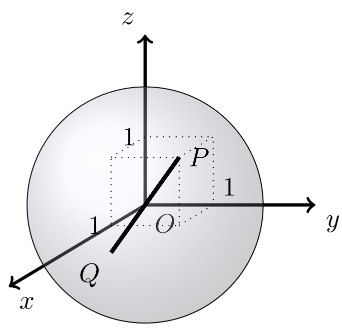
MATEMÁTICA A - 10º Ano
Geometria
Propostas de resolução

Exercícios de exames e testes intermédios



1. Determinando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ e depois do vetor $\overrightarrow{u}$, temos:

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (1,1,1) - (0,0,0) = (1,1,1)$$

$$\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{OP} = -2(1,1,1) = (-2, -2, -2)$$

Assim, temos que as coordenadas do ponto Q são:

$$Q = P + \overrightarrow{u} = (1,1,1) + (-2, -2, -2) = (-1, -1, -1)$$

No contexto do problema, como $[OP]$ é um raio da superfície esférica (porque O é o centro da esfera e P um ponto da superfície esférica), então o ponto $Q = P - 2\overrightarrow{OP} = P + 2\overrightarrow{PO}$ é o ponto simétrico do ponto P relativamente a O, ou seja, $[OP]$ é um diâmetro da superfície esférica.

Exame – 2018, Época especial

2. Escrevendo a equação da reta r na forma reduzida, para identificar o valor do declive, temos:

$$ax + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2y = -ax - 1 \Leftrightarrow y = \frac{-ax-1}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{a}{2}x - \frac{1}{2}, \text{ e assim } m_r = -\frac{a}{2}$$

Calculando o valor do declive da reta s, através das coordenadas do vetor diretor, vem:

$$m_s = \frac{2a}{a} = 2$$

Como as retas r e s são paralelas, os respetivos declives são iguais, pelo que podemos calcular o valor de a:

$$m_r = m_s \Leftrightarrow -\frac{a}{2} = 2 \Leftrightarrow -a = 2 \times 2 \Leftrightarrow a = -4$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2018, Época especial

3. Analisando a figura podemos verificar que os pontos do plano que pertencem à zona representada a sombreado, são os pontos:

   - que pertencem ao interior da circunferência (ou à circunferência) de raio 2 e centro no ponto de coordenadas (0,0), ou seja, os pontos que satisfazem a condição:

   $$(x-0)^2+(y-0)^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 4$$

   - cuja abcissa é inferior a -1 ou superior a 1, ou seja, cuja distância ao eixo das ordenadas é superior a 1, pelo que verificam a condição:

   $$x \leq -1 \vee x \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1$$

   Como os pontos verificam cumulativamente as duas condições, a região sombreada é definida por:

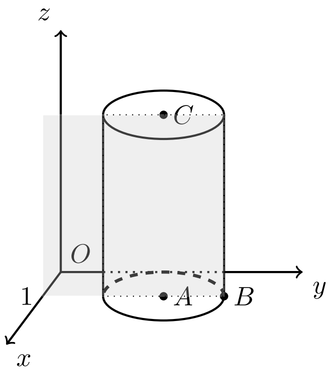
   $$x^2+y^2 \leq 4 \wedge |x| \geq 1$$

   Resposta: **Opção C**

Exame – 2018, 1ª Fase

4. Como os pontos A, B e C têm abcissa 1, todos pertencem ao plano de equação $x=1$. Assim a secção produzida no cilindro pelo plano de equação $x=1$, é o retângulo que contem estes pontos, ou seja o retângulo cujos lados são o diâmetro da base (2) e a altura (3) do cilindro, pelo que a sua área é:

   $$A = 2 \times 3 = 6$$

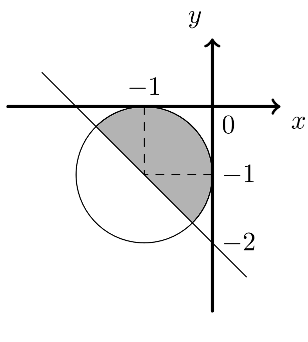


Exame – 2017, Época especial

5. Observando que $(x+1)^2+(y+1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow (x-(-1))^2+(y-(-1))^2 \leq 1^2$, temos que esta condição representa o círculo de centro no ponto $(-1,-1)$ e raio 1

   Observando que $x+y+2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -x-2$, temos que esta condição representa o semiplano superior limitado pela reta de declive -1 e ordenada na origem -2

   Representando a sombreado a interseção dos dois conjuntos de pontos, como na figura ao lado, podemos observar que corresponde a um semi-círculo de raio 1



   Assim, o perímetro da região definida pela condição é a soma do semi-perímetro do círculo com o diâmetro do círculo ($2r$):

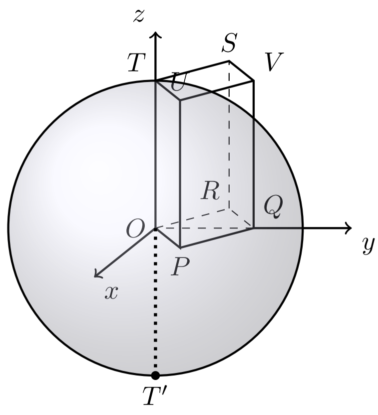
   $$P = \frac{2\pi r}{2} + 2r = \frac{2\pi \times 1}{2} + 2 \times 1 = \pi + 2$$

   Resposta: **Opção C**

Exame – 2017, 2ª Fase

6. Como o ponto T pertence ao eixo Oz tem abcissa e ordenada nulas e como pertence ao plano $z = 3$, as suas coordenadas são $(0,0,3)$
Assim, o ponto T' simétrico do ponto T relativamente à origem do referencial tem de coordenadas $(0,0,-3)$
Assim temos que o centro da superfície esférica é o ponto médio do diâmetro $[TT']$, ou seja, a origem do referencial (como se pretende ilustrar na figura ao lado), e o raio é a distância do ponto T ao centro, ou seja 3, pelo que a equação da superfície esférica é:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9$$



Exame – 2017, 1ª Fase

7. O declive da reta AB é dado por:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-3}{2-(-1)} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

Como retas paralelas têm o mesmo declive, de entre as opções apresentadas a única reta paralela à reta AB é a que tem declive $\frac{1}{3}$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2016, Época especial

8. Representando o quadrado definido pela condição dada, podemos verificar que o centro da circunferência é o ponto médio de uma das diagonais, ou seja o ponto :

$$C\,(2,3)$$

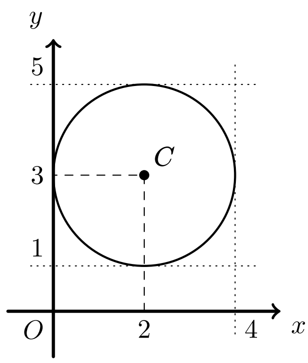
Da mesma forma, o raio da circunferência é metade do comprimento do lado:

$$r = \frac{4}{2} = 2$$

E assim, temos que a equação da circunferência inscrita no quadrado é:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$$

Resposta: **Opção C**



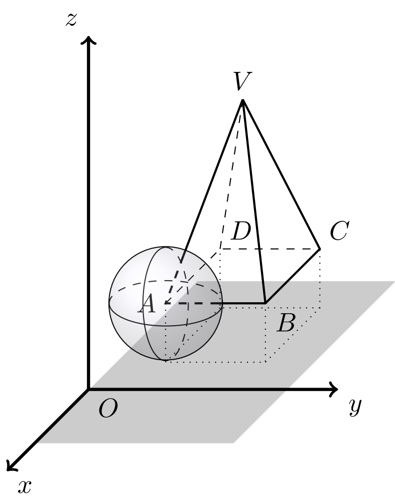
Exame – 2016, 2ª Fase

9. Como o ponto A tem cota 1, está à distância 1 do plano xOy, pelo que o raio da superfície esférica de centro no ponto A e que é tangente ao plano xOy tem raio 1.

Assim, a equação da superfície esférica é:

$$(x-(-1))^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$$



Exame – 2016, 1ª Fase

10. O raio r, da superfície esférica da qual o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro, é igual a metade da distância entre os pontos A e B. Calculado a distância e depois o raio, temos

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{16+0+4} = \sqrt{20} = \sqrt{4\times 5} = \sqrt{2^2\times 5} = 2\sqrt{5}$$

$$r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

O centro da superfície esférica é ponto médio do diâmetro, ou seja

$$M_{[AB]} = \left(\frac{4+0}{2},\frac{0+0}{2},\frac{0+2}{2}\right) = (2{,}0{,}1)$$

pelo que, uma equação cartesiana da superfície esférica da qual o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro, é

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$$

Exame – 2015, 1ª Fase

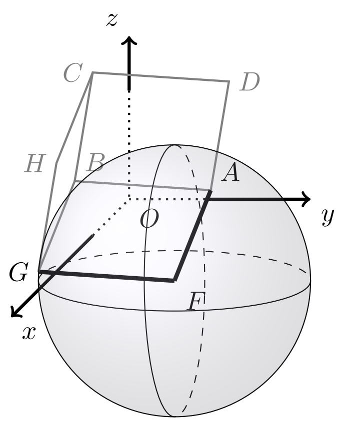
11. Como $[ABCDEFGH]$ é um cubo então as arestas são iguais, ou seja, o raio da superfície esférica (r) é igual à norma do vetor $\overrightarrow{FA}$:

$$r = \overline{FG} = \overline{FA} = \left\|\overrightarrow{FA}\right\| = \sqrt{2^2+3^2+6^2} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$$

Desta forma uma condição cartesiana que define a superfície esférica de centro no ponto $F(1{,}3{,}-4)$ e de raio 7, é:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + \left(z-(-4)\right)^2 = 7^2 \Leftrightarrow$$

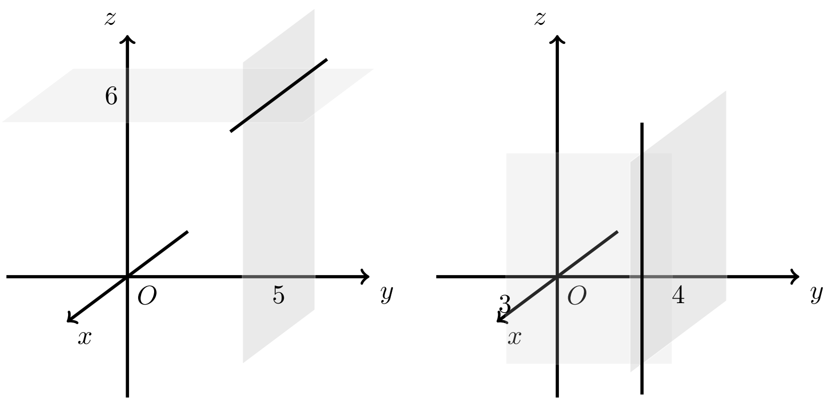
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 49$$



Teste Intermédio 11º ano – 06.03.2013

12. O vetor diretor de uma reta paralela à reta r é colinear com o vetor diretor da reta r.
Assim, como os vetores $\vec{u_C} = (3{,}5{,}4)$ e $\vec{u_D} = (0{,}1{,}0)$ não são colineares com o vetor diretor da reta r, $\vec{u_r} = (1{,}0{,}0)$ então as retas definidas pelas equações das opções (C) e (D) não são paralelas à reta r

Verificando que o vetor diretor da reta r, tem a direção do eixo Ox e representado os planos de equação $y=5$ e $z=6$ e também os planos de equação $x=3$ e $y=4$, podemos verificar que a interseção dos dois planos é uma reta paralela ao eixo Ox apenas no primeiro caso, pelo que, de entre as opções apresentadas, apenas a reta definida por $y=5 \wedge z=6$ é paralela à reta r



Resposta: **Opção A**

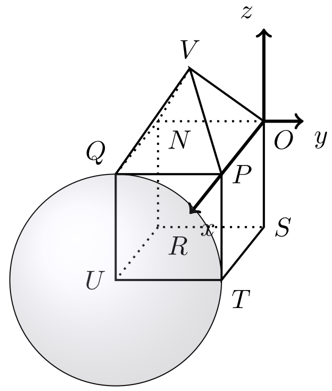
Teste Intermédio 11º ano – 24.05.2011

13.

13.1. Como a reta QN é paralela ao eixo Ox, e como se pretende que o plano seja perpendicular à reta QN também será perpendicular ao eixo Ox, ou seja, é definido por uma equação do tipo $x = k, k \in \mathbb{R}$

Como se pretende que o plano contenha o ponto V, então o valor de k é a abcissa do ponto $V, (k = x_V)$. A abcissa do ponto V é metade da abcissa do ponto Q, ou do ponto U, então temos que a equação do plano perpendicular à reta QN e que passa no ponto V é:

$$x = \frac{x_U}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4}{2} \Leftrightarrow x = 2$$



13.2. Como a superfície esférica de centro em U e passa no ponto T, então o raio da superfície esférica é igual à medida da aresta do cubo, ou seja 4, pelo que a equação da superfície esférica é:

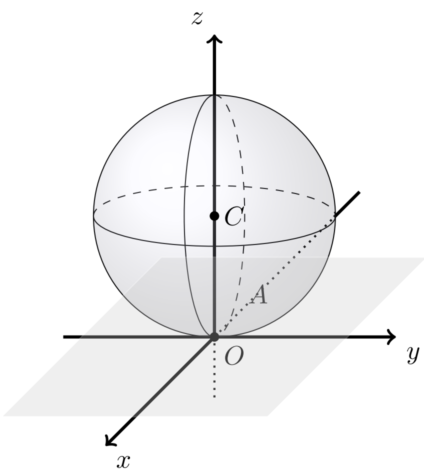
$$(x-4)^2 + (y-(-4))^2 + (z-(-4))^2 = 4^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 16$$

Teste Intermédio 11º ano – 27.01.2011

14. Pela observação da equação da superfície esférica $\left(x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4\right)$, podemos verificar que:

- tem centro no ponto $C(0,0,2)$
- o comprimento r do raio é $r = \sqrt{4} = 2$



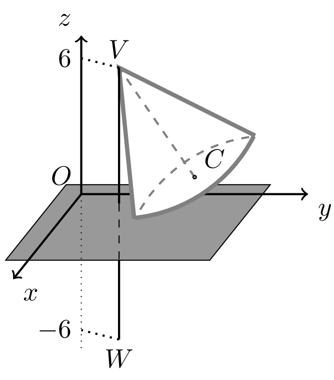
Assim podemos identificar que o centro da superfície esférica está a 2 unidades de distância do plano xOy, e que esta distância é igual ao raio, pelo que a superfície esférica é tangente ao plano xOy na origem do referencial, (como se pretende representar na figura ao lado), ou seja, a intersecção da superfície com o plano xOy é um ponto.

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 11º ano – 29.01.2009

15. Verificando que o ponto simétrico do ponto V, em relação ao plano xOy tem a mesma abcissa, a mesma ordenada e cota simétrica, temos que as coordenadas do ponto W são:

$$W(x_V, y_V, -z_V) = W(1,2,-6)$$



Para definir o segmento de reta $[WV]$, podemos verificar que o vetor $\overrightarrow{WV}$ é paralelo ao eixo das cotas e tem 12 unidades de comprimento, ou seja:

$$\overrightarrow{WV} = V - W = (1,2,6) - (1,2,-6) = (0,0,12)$$

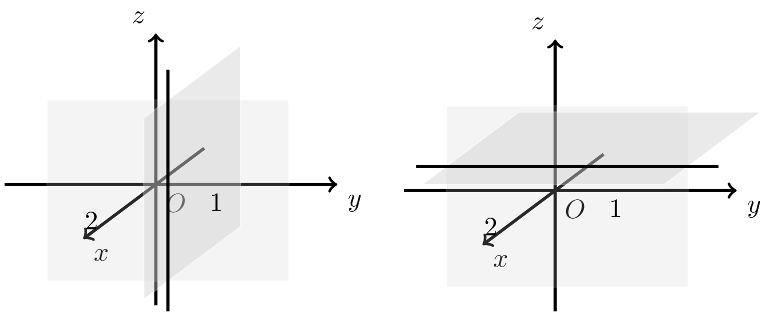
E assim, uma condição vetorial do segmento de reta $[WV]$, é, por exemplo:

$$(x,y,z) = (1,2,-6) + \lambda(0,0,12), \lambda \in [0,1]$$

Teste Intermédio 11º ano – 29.01.2009

16. O vetor diretor de uma reta paralela à reta r é colinear com o vetor diretor da reta r.
Assim, como os vetores $\vec{u_A} = (0,1,0)$ e $\vec{u_B} = (1,2,3)$ não são colineares com o vetor diretor da reta r, $\vec{u_r} = (0,0,1)$ então as retas definidas pelas equações das opções (A) e (B) não são paralelas à reta r

Verificando que o vetor diretor da reta r, tem a direção do eixo Oz e representado os planos de equação $x = 2$ e $y = 1$ e também os planos de equação $x = 2$ e $z = 1$, podemos verificar que a interseção dos dois planos é uma reta paralela ao eixo Ox apenas no primeiro caso, pelo que, de entre as opções apresentadas, apenas a reta definida por $x = 2 \wedge y = 1$ é paralela à reta r



Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 11º ano – 06.05.2008

17.

17.1. Como o ponto A pertence ao eixo das abcissas tem ordenada nula ($y_A = 0$), e como pertence à circunferência de raio 5, centrada na origem, dista 5 unidades da origem, pelo que a abcissa é -5, ($x_A = -5$).

Assim, podemos calcular o valor da ordenada na origem (b) da reta AB, substituindo as coordenadas de um ponto da reta (ponto A) e o valor do declive $\left(m = \frac{1}{2}\right)$ na forma geral da equação reduzida ($y = mx + b$):

$$y_A = m \times x_A + b \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2} \times (-5) + b \Leftrightarrow 0 = -\frac{5}{2} + b \Leftrightarrow \frac{5}{2} = b$$

E assim, uma equação da reta AB é:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2y = x + 5 \Leftrightarrow 0 = x - 2y + 5 \Leftrightarrow x - 2y + 5 = 0$$

17.2. Como o ponto B pertence simultaneamente à reta AB e à circunferência, as coordenadas do ponto B devem verificar as duas equações - a da reta AB ($x - 2y + 5 = 0$) e a da circunferência de raio 5 e centro na origem ($x^2 + y^2 = 5^2$)

Assim, substituindo as coordenadas (3,4) nas duas equações anteriores, temos que:

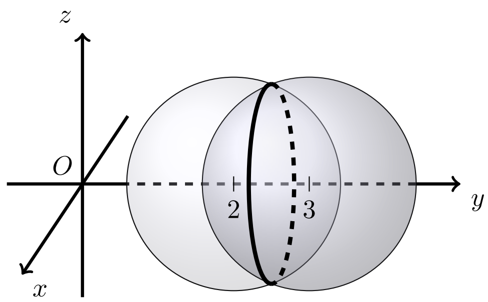
- $(3) - 2(4) + 5 = 0 \Leftrightarrow 3 - 8 - 5 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (Proposição verdadeira)
- $3^2 + 4^2 = 5^2 \Leftrightarrow 9 + 16 = 25 \Leftrightarrow 25 = 25$ (Proposição verdadeira)

Assim, podemos concluir que o ponto B tem coordenadas (3,4), porque, para além das coordenadas do ponto A, estas são as coordenadas do outro ponto que pertence simultaneamente à reta AB e à circunferência descrita, ou seja são as coordenadas do ponto B

Teste Intermédio 11º ano – 24.01.2008

18. Pela observação das equações, podemos verificar que:
    - o centro de uma das circunferências tem coordenadas (0,2,0)
    - o centro da outra circunferência tem coordenadas (0,3,0)
    - o raio de ambas é $\sqrt{2}$

    Assim podemos verificar que as distâncias entre os centros das circunferências é de 1 unidade e que o raio de ambas é superior a esta distância ($\sqrt{2} > 1$) pelo que as duas circunferências se intersectam segundo uma circunferência, (como se pretende representar na figura ao lado).



    Resposta: **Opção B**

Exame – 2001, Prova de reserva (cód. 135)

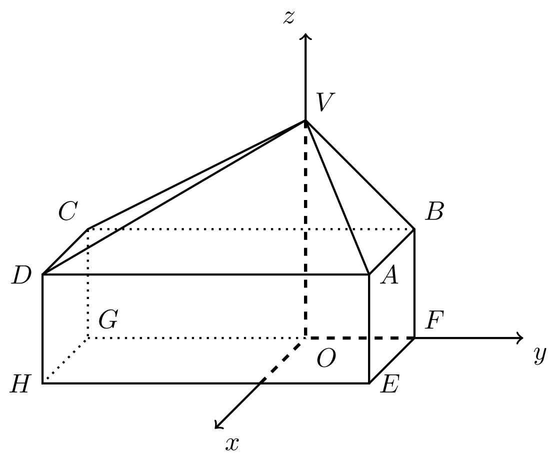
19. Como o ponto G pertence ao eixo Oy tem abcissa e cota nulas ($x_G = 0$ e $z_G = 0$) e como pertence à superfície esféricas, as suas coordenadas devem verificar a equação, pelo que, substituindo os valores da abcissa e da cota, podemos calcular o valor da ordenada:

$$(x_G-1)^2+(y_G-1)^2+(z_G-1)^2=11 \Leftrightarrow (0-1)^2+y_G^2-2y_G+1+(0-1)^2=11 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+y_G^2-2y_G+1+1-11=0 \Leftrightarrow y_G^2-2y_G-8=0 \Leftrightarrow y_G=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-8)}}{2\times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_G=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2} \Leftrightarrow y_G=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_G=\frac{2\pm 6}{2} \Leftrightarrow x=4 \vee x=-2$$



Como o ponto G tem ordenada negativa, temos que as coordenadas do ponto G são $(0,-2,0)$

Como o ponto H tem abcissa igual ao ponto A, e ordenada e cota iguais ao ponto G, vem que:

$$H(x_A,y_G,z_G),\ \text{ou seja},\ H(1,-2,0)$$

Exame – 2001, Prova de reserva (cód. 135)

20. Como o ponto A pertencente ao semieixo positivo Ox, então as coordenadas são da forma $(a,0,0), a \in \mathbb{R}^+$
    Como o ponto B pertencente ao semieixo positivo Oy, então as coordenadas são da forma $(0,b,0), b \in \mathbb{R}^+$

    Assim as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ são da forma: $\overrightarrow{AB} = B - A = (0,b,0) - (a,0,0) = (-a,b,0)$

    Como a e b são valores reais positivos, de entre as opções apresentadas, a única que é compatível com a forma identificada para as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ é $(-2,1,0)$

    Resposta: **Opção C**

Exame – 2001, Época especial (cód. 135)

21. O vértice T tem cota e abcissa respetivamente iguais às do vértice U, e ordenada nula (porque pertence ao plano POS, ou seja ao plano xOz), ou seja, temos que $T(x_U,0,z_U) = T(2,0,4)$

Assim, podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{TU}$:

$$\overrightarrow{TU} = U - T = (2,2,4) - (2,0,4) = (0,2,0)$$

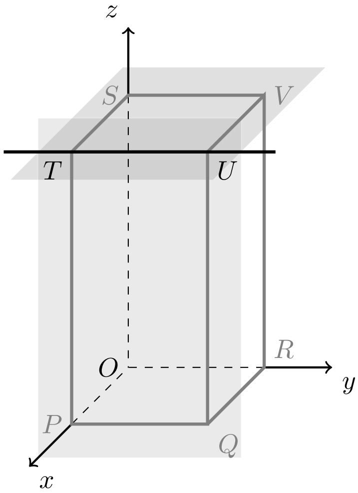
Pelo que uma condição que define a reta TU é uma equação vetorial da reta TU:

$$(x,y,z) = T + k.\overrightarrow{TU}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x,y,z) = (2,0,4) + k(0,2,0), k \in \mathbb{R}$$

*** Outra resolução: ***

Como a reta TU é a interseção dos planos PTU e STU ou seja, dos planos $x = 2$ e $z = 4$, então que uma condição que define a reta TU é:

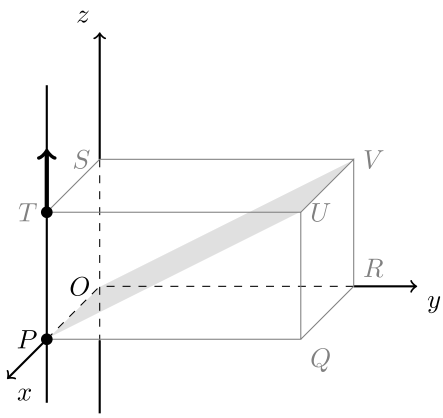
$$x = 2 \wedge z = 4$$



Exame – 2001, Época especial (cód. 135)

22. Como a reta contém o vértice $T(2,0,2)$ e tem a direção do vetor $\vec{u} = (0,0,1)$, a reta r é a reta TP, pelo que o ponto de intersecção da reta r com o plano OUV é o ponto P, que também pertence ao plano OUV

Resposta: **Opção A**



Exame – 2001, 2ª fase (cód. 135)

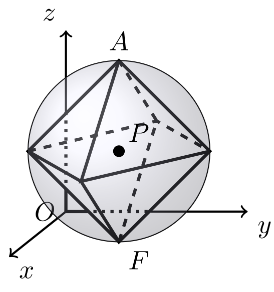
23. Como o vértice F pertence ao plano xOy, o vértice B pertence ao plano xOz e o vértice E pertence ao plano yOz, então o segmento $[AF]$ é paralelo ao eixo Oz

Desta forma temos que:

- o centro da superfície esférica é o ponto médio de $[AF]$, ou seja, $M(1,1,1)$
- o raio da superfície esférica é metade de $\overline{AF}$, ou seja, $r = \frac{\overline{AF}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Assim, uma equação da superfície esférica que contém os seis vértices do octaedro é:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$$

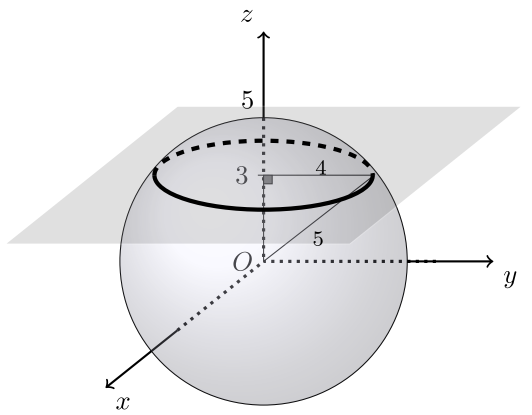


Exame – 2001, 2ª fase (cód. 135)

24. Como interseção da superfície esférica com o plano de equação $z = 3$ é uma circunferência de perímetro 8π, podemos determinar a medida do raio (r_c) desta circunferência:

$$P = 8\pi \Leftrightarrow 2\pi r_c = 8\pi \Leftrightarrow r_c = \frac{8\pi}{2\pi} \Leftrightarrow r_c = 4$$

Desta forma, observando que o raio da circunferência é perpendicular ao eixo Oz, que o centro da circunferência é a origem do referencial, podemos verificar que existe um triângulo retângulo cujos catetos medem 3 e 4 unidades e cuja hipotenusa é o raio da circunferência (como se pretende ilustrar na figura ao lado).



Assim, recorrendo ao teorema de Pitágoras, podemos determinar a medida (r) do raio da superfície esférica:

$$r^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow r^2 = 9 + 16 \Leftrightarrow r^2 = 25 \underset{r>0}{\Rightarrow} r = \sqrt{25}$$

Desta forma podemos concluir que a superfície esférica tem centro no ponto de coordenadas (0,0,0) e raio 5, pelo que a equação que a define é:

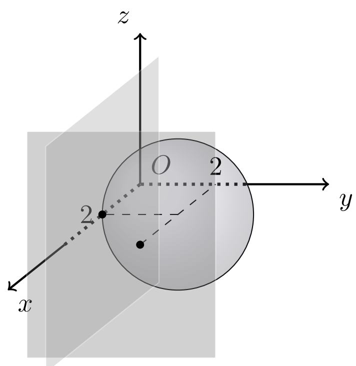
$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2001, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 135)

25. Analisando as alternativas apresentadas, verificamos que:

- podemos excluir as opções (C) e (D) porque as coordenadas dos centros das duas superfícies esféricas são (0,0,2) e (2,0,0), respetivamente, e desta forma podemos verificar que nas duas alternativas, o centro pertence ao plano $y = 0$, pelo que a superfície esférica não é tangente a este plano;
- relativamente à opção (B) as coordenadas do centro da superfície esférica é (2,2,0) e o raio é 4 $(4^2 = 16)$, e assim verificamos que o centro da superfície esférica não está a 4 unidades de distância dos planos $x = 4$ e $y = 0$, pelo que não é tangente a nenhum destes planos.

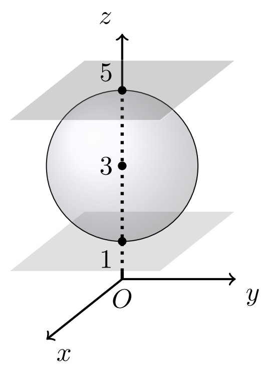


Relativamente à opção (A), as coordenadas do centro da superfície esférica é (2,2,0) e o raio é 2 $(2^2 = 4)$, e assim verificamos que o centro da superfície esférica está a 2 unidades de distância dos planos $x = 4$ e $y = 0$, pelo que é tangente aos dois planos nos pontos de coordenadas (4,2,0) e (2,0,0), (como se pretende ilustrar na figura anterior).

Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 135)

26. Analisando as alternativas apresentadas, verificamos que:



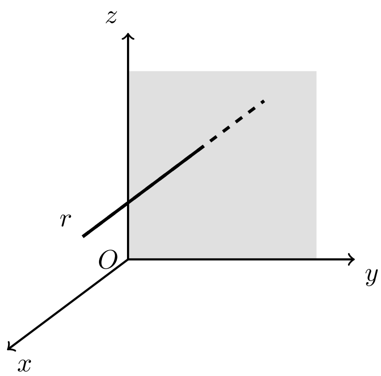
- podemos excluir as opções (B) e (D) porque as coordenadas do centro das duas superfícies esféricas são (0,0,4), e desta forma podemos verificar que nestas duas alternativas, o centro está a uma unidade de distância do plano $z = 5$ e a 3 unidades de distância do plano $z = 1$, pelo que a superfície esférica não é tangente aos dois planos;
- relativamente à opção (A) as coordenadas do centro da superfície esférica são (0,0,3) e o raio é 5 ($5^2 = 25$), e assim verificamos que como o centro da superfície esférica está a 2 unidades de distância dos planos $z = 1$ e $z = 5$, interseta os planos identificados e é tangente aos planos $z = -2$ e $z = 8$.

Relativamente à opção (C), as coordenadas do centro da superfície esférica são (0,0,3) e o raio é 2 ($2^2 = 4$), e assim verificamos que como o centro da superfície esférica está a 2 unidades de distância dos planos $z = 1$ e $z = 5$, pelo que é tangente aos planos identificados nos pontos de coordenadas (0,0,1) e (0,0,5), (como se pretende ilustrar na figura anterior).

Resposta: **Opção C**

Exame – 2001, Prova Modelo (cód. 135)
Exame – 2000, 2ª Fase (cód. 135)

27. Analisando as alternativas apresentadas, verificamos que:



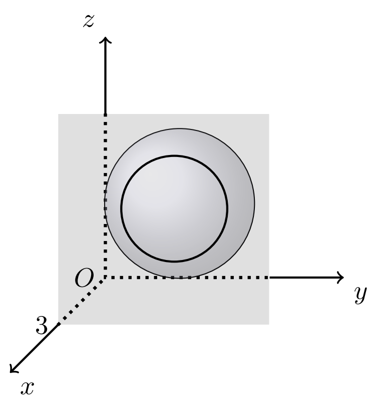
- A opção (A) é falsa porque a reta r é paralela ao plano xOy;
- A opção (B) não é necessariamente verdadeira porque a reta r pode ser um conjunto de pontos com cota não nula;
- A opção (C) é falsa porque a reta r é paralela ao eixo Ox;

Relativamente à opção (D),como a reta r é perpendicular ao plano yOz também é perpendicular a todas as retas contidas no plano yOz, em particular aos eixos Oy e Oz, e assim, é paralela ao eixo Ox (como se pretende ilustrar na figura anterior).

Resposta: **Opção D**

Exame – 2000, Prova 2 para Militares (cód. 135)
Exame – 2000, Prova de reserva (cód. 135)

28. A partir da equação da superfície esférica, podemos observar que o centro é o ponto C de coordenadas (2,2,2) e o raio é $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, e desta forma, relativamente a cada uma das alternativas apresentadas, podemos verificar que:



- a interseção com os planos de equação $x = -1$, $x = 0$ e $x = 4$ é o conjunto vazio porque a diferença entre a abcissa do centro e as abcissas dos pontos de cada um dos planos é maior que o raio da circunferência;
- relativamente ao plano de equação $x = 3$, a distância do centro da superfície esférica ao plano é $|x_C - 3| = |2 - 3| = 1$, ou seja, esta distância é menor que o raio da superfície esférica, pelo que a interseção é uma circunferência (como se pretende ilustrar na figura ao lado).

Resposta: **Opção C**

Exame – 2000, Prova 2 para Militares (cód. 135)
Exame – 2000, Prova de reserva (cód. 135)

29. Como a base está contida no plano yOz, o centro é a origem do referencial e o vértice pertence ao semieixo positivo Ox, então a altura do cone é a abcissa do vértice (x_V), ou seja a abcissa do ponto da reta r, com ordenada e cota nulas ($y_V = 0$ e $z_V = 0$)

A partir da equação da reta r, podemos verificar que as coordenadas de todos os pontos da reta r são da forma $(3k,3-k,0), k \in \mathbb{R}$

$(x,y,x) = (0,3,0)+k(3,-1,0), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x,y,x) = (0,3,0)+(3k,-k,0), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x,y,x) = (3k,3-k,0), k \in \mathbb{R}$

Como a ordenada é nula, temos que:

$$y_V = 0 \Leftrightarrow 3 - k = 0 \Leftrightarrow 3 = k$$

E assim podemos determinar a abcissa do vértice, ou seja, a altura do cone:

$$x_V = 3k \underset{k=3}{=} 3 \times 3 = 9$$

Exame – 2000, Prova para Militares (cód. 135)
Exame – 2000, Época Especial (cód. 135)

30. Analisando as alternativas apresentadas, verificamos que as coordenadas do centro das quatro superfícies esféricas são (2,0,0), pelo que a distância do centro ao plano yOz é 2, ou seja, a única superfície esférica (de entes as alternativas apresentadas) é a que tem raio 2, ou seja:

$$(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4$$

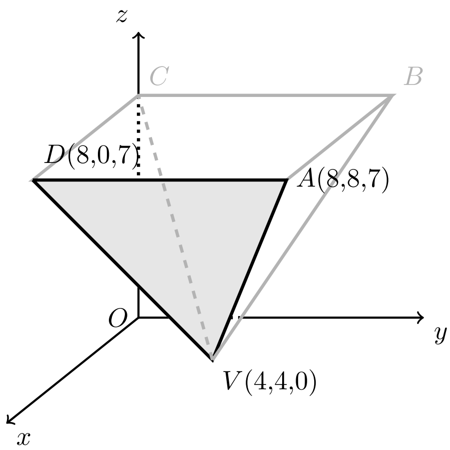
Exame – 2000, Ép. Especial (setembro) (cód. 135)

31. Como o ponto A tem coordenadas (8,8,7), o ponto D pertence ao plano xOz e que a base da pirâmide é paralela ao plano xOy, então as coordenadas do ponto D são (8,0,7) e o lado da base da pirâmide é:

$$\overline{DA} = \sqrt{(8-8)^2 + (0-8)^2 + (7-7)^2} = \sqrt{0 + 8^2 + 0} = 8$$

Como a o vértice V da pirâmide pertence ao plano xOy tem cota nula como a pirâmide é regular as restantes coordenadas são metade das coordenadas respetivas do ponto A, ou seja as coordenadas do vértice V são ((4,4,0)).

Como a pirâmide é regular, as arestas laterais têm o mesmo comprimento ($\overline{DV} = \overline{AV}$), e calculado o valor do comprimento, temos:



$$\overline{DV} = \sqrt{(8-4)^2 + (0-4)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{16 + 16 + 49} = \sqrt{81} = 9$$

Desta forma o perímetro de uma face lateral da pirâmide é:

$$P_{[DAV]} = \overline{DA} + \overline{DV} + \overline{AV} = \overline{DA} + 2\overline{DV} = 8 + 2 \times 9 = 8 + 18 = 26$$

Exame – 2000, Época Especial (setembro) (cód. 135)
Exame – 1999, Prova de reserva (cód. 135)

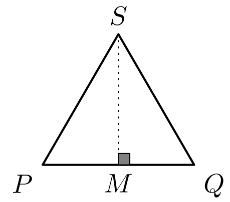
32. Sabendo que a área lateral do prisma é 72, e que a área lateral é a soma das áreas de três retângulos, temos que a área de cada retângulo, em particular do retângulo $[QRST]$ é:

$$A_{[QRST]} = \frac{72}{3} = 24$$

Como o segmento $[QR]$ tem comprimento 6, podemos determinar o comprimento do segmento $[QS]$:

$$A_{[QRST]} = \overline{QR} \times \overline{QS} \Leftrightarrow 24 = 6\overline{QS} \Leftrightarrow \frac{24}{6} = \overline{QS} \Leftrightarrow \overline{QS} = 4$$

Como o prisma é regular, as bases são poolígonos regulares, ou seja, o triângulo $[PQS]$ é equilátero ($\overline{QP} = \overline{QS} = 4$), e por isso considerando M o ponto médio do lado $[PQ]$, temos que



$$\overline{QM} = \frac{\overline{QP}}{2} = \frac{\overline{2}}{2} = 2$$

Desta forma, recorrendo ao teorema de Pitágoras, podemos calcular a cota do ponto S:

$$\overline{QS}^2 = \overline{QM}^2 + \overline{MS}^2 \Leftrightarrow 4^2 = 2^2 + \overline{MS}^2 \Leftrightarrow 16 - 4 = \overline{MS}^2 \underset{\overline{MS}>0}{\Rightarrow} \overline{MS} = \sqrt{12}$$

E assim, verificando que o ponto S tem a mesma abcissa que o ponto P, a mesma ordenada que o ponto M e a cota calculada, temos que as coordenadas do ponto S são $\left(6{,}2{,}\sqrt{12}\right)$

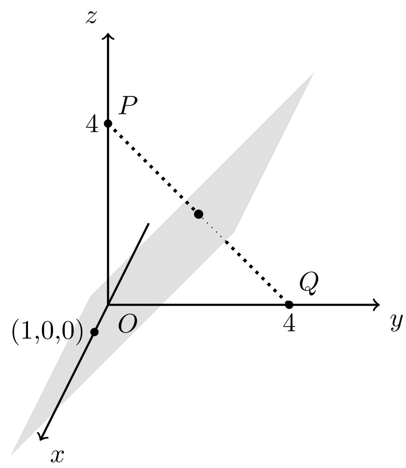
Exame – 2000, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 135)

33. Determinando uma equação do plano mediador do segmento de reta $[PQ]$, temos:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-4)^2 = (x-0)^2 + (y-4)^2 + (z-0)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z-4)^2 = x^2 + (y-4)^2 + z^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y^2 + z^2 - 8z + 16 = y^2 - 8y + 16 + z^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -8z = -8y \Leftrightarrow z = y$$

E assim, observando as coordenadas dos pontos de cada uma das opções, podemos verificar que apenas o ponto de coordenadas (1,0,0), verifica a equação do plano mediador.

Podemos, em alternativa, representar os pontos P e Q e verificar que o plano mediador do segmento de reta $[PQ]$ contém o eixo Ox, pelo que o ponto de coordenadas (1,0,0), pertence ao plano mediador (como se pretende ilustrar na figura ao lado).



Resposta: **Opção A**

Exame – 2000, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 135)

34. Observando as coordenadas dos vetores diretores de cada uma das retas relativas às opções apresentadas, podemos verificar que:

- O vetor de coordenadas (1,0,0) tem a mesma direção do eixo Ox, pelo que a reta com a direção deste vetor não intersecta nem o plano xOy, nem o plano xOz
- O vetor de coordenadas (0,2,0) tem a mesma direção do eixo Oy, pelo que a reta com a direção deste vetor não intersecta nem o plano xOy, nem o plano yOz
- O vetor de coordenadas (1,2,0) tem uma direção do plano xOy, e como a reta contém o ponto de coordenadas (1,1,1) pelo que a reta não intersecta nem o plano xOy
- O vetor de coordenadas (1,1,1) não é paralelo a nenhum dos eixos, pelo que a reta com a direção deste vetor interseta os três planos coordenados.

Resposta: **Opção D**

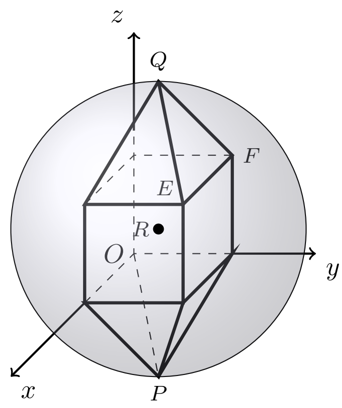
Exame – 2000, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 135)

35. Como o vértice E do poliedro tem coordenadas (2,2,2), e a altura de cada uma das pirâmides é igual ao comprimento da aresta do cubo, os pontos P e Q são simétricos relativamente ao ponto R, o centro geométrico do cubo, ou seja, a superfície esférica de diâmetro $[PQ]$, tem centro no ponto R de coordenadas (1,1,1)

Sabemos também que o raio da superfície esférica de diâmetro $[PQ]$ é 3, correspondendo à soma de metade da aresta do cubo (1 unidade que é distância entre o dentro e a base de qualquer uma das pirâmides) e a aresta do cubo (2 unidades que é a altura das duas pirâmides).

Assim, a equação da superfície esférica é:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3^2$$



Como o ponto F tem a mesma cota e ordenada do ponto E e pertence ao plano yOz, as suas coordenadas são (0,2,2), pelo que podemos verificar que este ponto não pertence à superfície esférica, porque não verifica a respetiva equação:

$$(0-1)^2 + (2-1)^2 + (2-1)^2 < 3^2 \Leftrightarrow 1+1+1 < 9 \Leftrightarrow 3 < 9$$

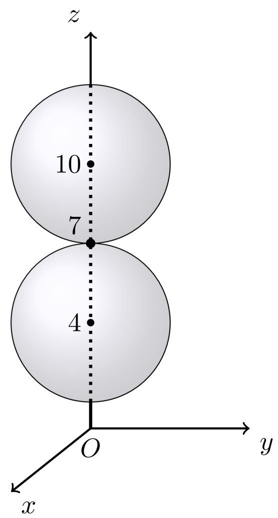
Em conclusão, sendo R o centro da superfície esférica de diâmetro $[PQ]$, o ponto F não pertence à superfície esférica, porque $\overline{RF} < \overline{RP}$ (como se pretende ilustrar na figura ao lado).

Exame – 2000, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 135)

36. Pela observação das equações, podemos verificar que:

- o centro de uma das superfície esférica tem coordenadas (0,0,10)
- o centro da outra superfície esférica tem coordenadas (0,0,4)
- o raio de ambas é $\sqrt{9} = 3$

Assim podemos verificar que as distâncias entre os centros das superfícies esféricas é de 6 unidades $(10-4=6)$ e que a soma dos raios é igual a esta distância pelo que as duas superfícies esféricas são tangentes entre si, ou seja, intersetam-se no ponto de coordenadas (0,0,7) (como se pretende representar na figura ao lado).



Resposta: **Opção A**

Exame – 1999, Prova para Militares (cód. 135)

37.

37.1. Calculando as coordenadas dos vetores, temos:

- $\overrightarrow{AB} = B - A = (10{,}13{,}25) - (2{,}3{,}10) = (8{,}10{,}15)$
- $\overrightarrow{AC} = C - A = (98{,}123{,}190) - (2{,}3{,}10) = (96{,}120{,}180)$

Verificando que os vetores são colineares, vem que:

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}, \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \Leftrightarrow (96{,}120{,}180) = \lambda(8{,}10{,}15) \Leftrightarrow \begin{cases} 96 = 8\lambda \\ 120 = 10\lambda \\ 180 = 15\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{96}{8} = \lambda \\ \frac{120}{10} = \lambda \\ \frac{180}{15} = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 12 \\ \lambda = 12 \\ \lambda = 12 \end{cases}$$

Assim temos que $\overrightarrow{AC} = 12\overrightarrow{AB}$, ou seja, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são colineares, o que permite garantir que os pontos A, B e C devem ser colineares, logo se o projétil seguir uma trajetória retilínea, o alvo é atingido.

37.2. Calculando a distância entre os pontos C (o alvo) e o ponto A (o local onde o projétil é disparado), temos:

$$\overline{CA} = \sqrt{(98-2)^2 + (123-3)^2 + (190-10)^2} = \sqrt{96^2 + 120^2 + 180^2} = \sqrt{56016} \approx 236{,}7$$

Assim, como $\overline{CA} < 300$, ou seja, o alvo encontra-se a menos de 300 unidades do local onde o projétil é disparado, pelo que é garantida a trajetória retilínea,no caso presente.

Exame – 1999, Prova para Militares (cód. 135)

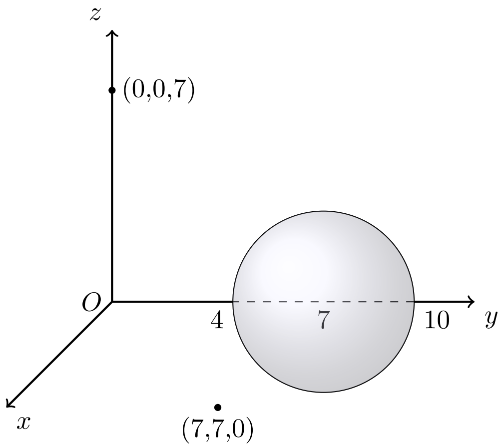
38. Como o raio da esfera é 3 ($3^2 = 9$) e o centro é o ponto de coordenadas $(0{,}7{,}0)$, podemos analisar cada uma das afirmações e obter as conclusões que se ilustram na figura seguinte:

- O ponto de coordenadas $(0{,}4{,}0)$ é o ponto da esfera mais próximo do eixo Ox, pelo que a esfera não interseta este eixo
- O centro da esfera é um ponto do eixo Oy que pertence à esfera (assim como os pontos com ordenada compreendida entre 3 e 10, abcissa e ordenada nulas)
- Substituindo as coordenadas do ponto $(7{,}7{,}0)$ na condição que define a espera, é possível verificar que o ponto não pertence à esfera:

  $$7^2+(7-7)^2+0^2 \leq 9 \Leftrightarrow 49+0+0 \leq 9 \text{(Proposição falsa)}$$

- Substituindo as coordenadas do ponto $(0{,}0{,}7)$ na condição que define a espera, é possível verificar que o ponto não pertence à esfera:

  $$0^2+(0-7)^2+7^2 \leq 9 \Leftrightarrow 0+49+49 \leq 9 \text{(Proposição falsa)}$$



Resposta: **Opção B**

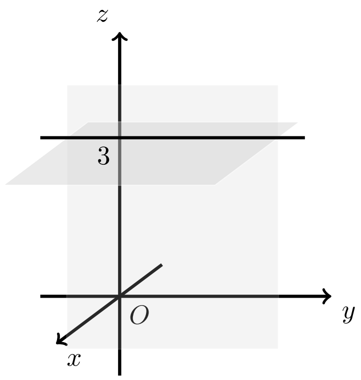
Exame – 1999, Época Especial (cód. 135)

39. A condição $x = 0$ define um plano perpendicular ao eixo Ox e a condição $z = 3$ define um plano perpendicular ao eixo Oz

Os dois planos intersectam-se segunda uma reta que é definida pela condição:

$$x = 0 \wedge z = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

Resposta: **Opção C**



Exame – 1999, Época Especial (cód. 135)

40.

40.1. Calculando o comprimento da aresta do cubo, ou seja, a distância entre os vértices A e D, temos:

$$\overline{AD} = \sqrt{(3-(-3))^2 + (5-3)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{6^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{36+4+9} = \sqrt{49} = 7$$

Assim, o volume do cubo é: $V = \overline{AD}^3 = 7^3 = 343$

40.2. Como as arestas $[AD]$ e $[EH]$ são paralelas (e têm o mesmo comprimento) temos que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EH}$, pelo que podemos calcular as coordenadas do ponto H observando que $H = \overrightarrow{AD} + E$

Assim, calculando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AD}$ e do ponto H, temos:

- $\overrightarrow{AD} = D - A = (-3,3,6) - (3,5,3) = (-3-3,3-5,6-3) = (-6,-2,3)$
- $H = \overrightarrow{AD} + E = (-6,-2,3) + (1,2,-3) = (-6+1,-2+2,3-3) = (-5,0,0)$

Como duas das coordenadas do ponto H são nulas, então o ponto H pertence a um dos eixos coordenados.

Exame – 1999, Época Especial (cód. 135)

41.

41.1. A partir da equação vetorial da reta BC, podemos verificar que o ponto B, e também o ponto C, são da forma:

$$(x,y,z) = (5,4,-1) + k(1,2,-1), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x,y,z) = (5+k,4+2k,-1-k), k \in \mathbb{R}$$

Assim, temos que:

- Como o ponto B pertence ao plano xOz, tem ordenada nula ($y_B = 0$), e assim, anulando a ordenada genérica dos pontos da reta BC, vem que:

$$4 + 2k = 0 \Leftrightarrow 2k = -4 \Leftrightarrow k = -2$$

E assim, as coordenadas do ponto B, podem ser obtidas substituindo o valor de k:

$$(x,y,z) = (5+k,4+2k,-1-k) \underset{k=-2}{=} \big(5+(-2),4+2(-2),-1-(-2)\big) = (5-2,4-4,-1+2) = (3,0,1)$$

- Da mesma forma, como o ponto C pertence ao plano xOy, tem cota nula ($z_C = 0$), e assim, anulando a cota genérica dos pontos da reta BC, vem que:

$$-1 - k = 0 \Leftrightarrow -1 = k$$

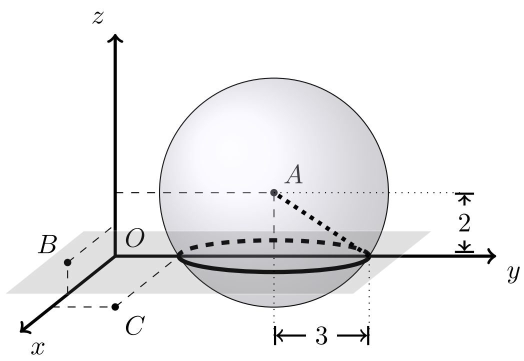
E assim, as coordenadas do ponto C, podem ser obtidas substituindo o valor de k:

$$(x,y,z) = (5+k,4+2k,-1-k) \underset{k=-1}{=} \big(5+(-1),4+2(-1),-1-(-1)\big) = (5-1,4-2,-1+1) = (4,2,0)$$

41.2. Como o centro da superfície esférica tem é o ponto A, a distância do centro ao plano xOy é 2

Como se pretende que o raio da circunferência seja 3, calculando o raio (r) da superfície esférica como a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem respetivamente 3 e 2:

$$r^2 = 3^2 + 2^2 \Leftrightarrow r^2 = 9 + 4 \underset{r>0}{\Rightarrow} r = \sqrt{13}$$



Assim, a equação da superfície esférica de centro no ponto A e raio r, é:

$$(x-0)^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 = 13$$

Exame – 1999, 2ª fase (cód. 135)

42. Como o volume do cubo é 27, a medida (a) da aresta é:

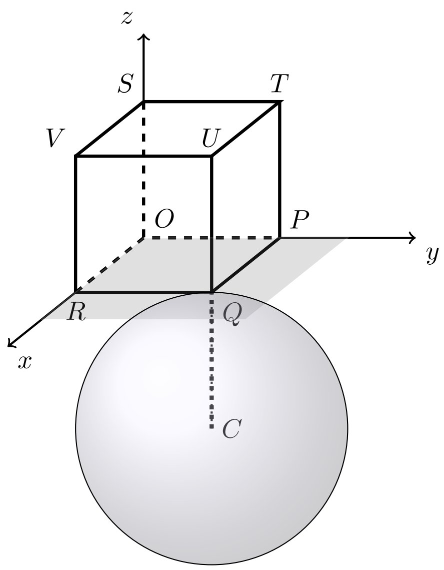
$$a = \sqrt[3]{27} = 3$$

E assim temos que as coordenadas do ponto U são: (3,3,3)

Como o centro da superfície esférica é o simétrico do ponto U, em relação ao plano xOy, tem abcissa e ordenada iguais às do ponto U e cota simétrica, ou seja o centro da superfície esférica é o ponto $C(3,3,-3)$

Como o ponto Q pertence ao plano xOy, e está sobre a reta UC tem cota nula e é o ponto médio do segmento do segmento de reta $[UC]$, pelo que o raio da superfície esférica, é:

$$\overline{CQ} = \overline{QU} = 3$$



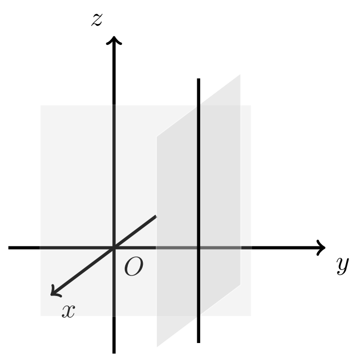
E assim, a equação da superfície esférica de centro no ponto C e raio $\overline{CQ}$, é:

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-(-3))^2 = 3^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 9$$

Exame – 1999, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 135)

43. A condição $x = 1$ define um plano perpendicular ao eixo Ox e a condição $y = 2$ define um plano perpendicular ao eixo Oy. Assim, os dois planos intersectam-se segunda uma reta paralela ao eixo Oz, pelo que, observando as opções apresentadas, podemos identificar as coordenadas do vetor diretor da reta: $\vec{v_r} = (0,0,2)$

Como os pontos da reta têm abcissa igual a 1 e ordenada igual a 2, de entre as opções apresentadas, a equação deve ser definida com o ponto de coordenadas (1,2,0), ou seja, a reta $x = 1 \wedge y = 2$ é definida pela equação vetorial $(x,y,z) = (1,2,0) + k(0,0,2), k \in \mathbb{R}$



Resposta: **Opção A**

Exame – 1999, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 135)

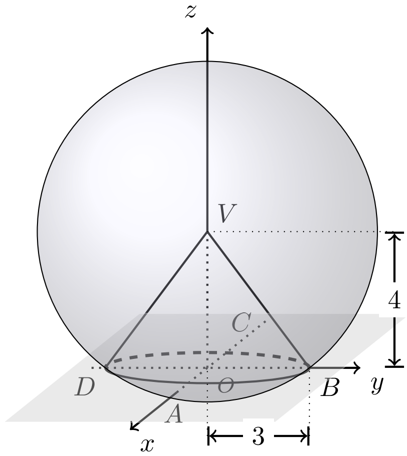
44. Como o comprimento do raio da base é 3 e a altura do cone é 4, podemos determinar o raio da esfera através do teorema de Pitágoras:

$$r^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow r^2 = 9 + 16 \Leftrightarrow r^2 = 25 \underset{r>0}{\Rightarrow} r = 5$$

Como a altura do cone é 4, o vértice V pertence ao semieixo positivo Oz e a base do cone está contida no plano xOy, então as coordenadas do ponto V, ou seja, o centro da esfera são $(0,0,4)$

Desta forma, uma condição que define a esfera cujo centro é o ponto V e cuja intersecção com o plano xOy é a base do cone, é:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-4)^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 25$$



Exame – 1999, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 135)

45. Como o centro da esfera é a origem do referencial, a distância do centro da esfera ao plano de equação $z = 4$ é de 4 unidades.

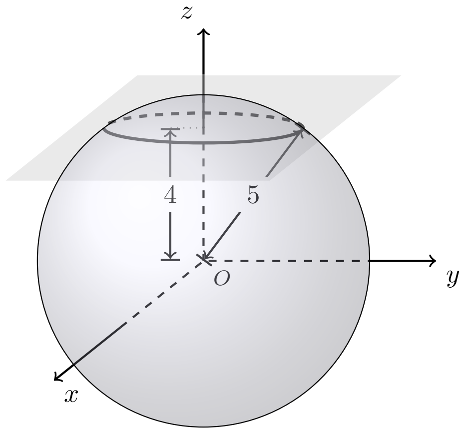
Como o raio da esfera é 5 ($5^2 = 25$), a interseção da esfera com o plano é um círculo, cujo raio r pode ser calculado como a medida de um cateto de um triângulo retângulo em que a hipotenusa é o raio da esfera e o restante cateto é a distância do plano ao centro da esfera:

$$r^2 + 4^2 = 5^2 \Leftrightarrow r^2 = 25 - 16 \Leftrightarrow r^2 = 9 \underset{r>0}{\Rightarrow} r = 3$$

Assim, a área da secção, ou seja, do círculo de raio 3, é:

$$A_\circ = \pi r^2 = \pi \times 3^2 = 9\pi$$

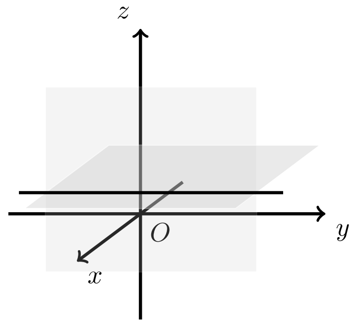
Resposta: **Opção D**



Exame – 1999, Prova Modelo (cód. 135)

46. Analisando cada uma das opções apresentadas, temos que:

- A condição $x = 1 \wedge y = 2 \wedge z = 3$ representa o ponto de coordenadas $(1,2,3)$
- A condição $x = 2 \wedge z = 1$ é a interseção de dois planos paralelos aos planos yOz e xOy, respetivamente, ou, em alternativa todos os pontos da forma $(2,k,1), k \in \mathbb{R}$ (como se pretende ilustrar na figura ao lado)
- A condição $x = y = z$ representa todos os pontos da forma $(k,k,k), k \in \mathbb{R}$, ou seja a reta que contém a origem e, por exemplo o ponto $(1,1,1)$, pelo que não é paralela ao eixo Oy
- A condição $y = 1$ representa um plano perpendicular ao eixo Oy



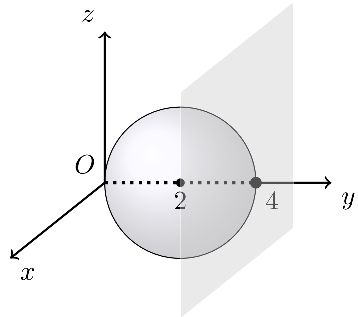
Resposta: **Opção B**

Exame – 1998, Prova para militares (cód. 135)

47. Pela observação das equações, podemos verificar que:

   - o centro da superfície esférica E tem coordenadas $(0,2,0)$
   - o raio de E é $\sqrt{4} = 2$

   Assim podemos verificar que a distância entre o centro da superfície esférica E e o plano α é de 2 unidades $(4-2=2)$ e que o raio de E é igual a esta distância pelo que a superfície esférica E é tangente ao plano α, ou seja, intersetam-se no ponto de coordenadas $(0,4,0)$ (como se pretende representar na figura ao lado).



   Resposta: **Opção A**

Exame – 1998, Prova de reserva (cód. 135)

48. Pela observação da condição da esfera, podemos verificar que o centro da esfera é o ponto C de coordenadas $(2,3,4)$

   Como $[AB]$ é um diâmetro da esfera, então C é o ponto médio de $[AB]$, e assim, temos que:

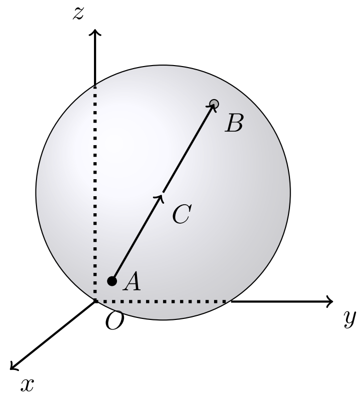
   - $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$
   - $C + \overrightarrow{CB} = B$

   Logo, calculando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$, temos:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2,3,4) - (1,1,1) = (1,2,3)$$

   E assim, podemos calcular as coordenadas do ponto B:

$$B = C + \overrightarrow{CB} = (2,3,4) + (1,2,3) = (3,5,7)$$



   Resposta: **Opção B**

Exame – 1998, 2ª fase (cód. 135)

49. Analisando cada uma das opções apresentadas, temos que:

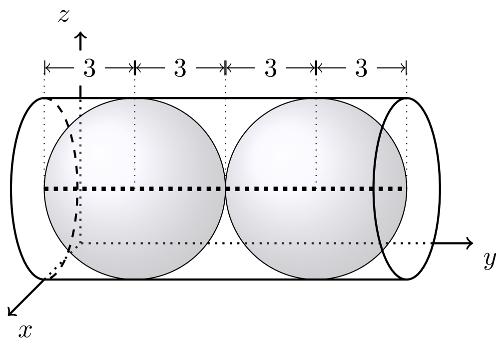
   - A condição $3x + 5y + 4z = 0$ representa um plano
   - A condição $x = 3 \wedge y = 5 \wedge z = 4$ representa o ponto de coordenadas $(3,4,5)$
   - A condição $(x,y,z) = (3,0,-4) + k(3,5,0), k \in \mathbb{R}$ representa uma reta que contém o ponto $(3,0,-4)$, ou seja que interseta o plano xOz, ao contrário da reta PQ paralela ao eixo Oy
   - A condição $(x,y,z) = (3,5,0) + k(3,0,-4), k \in \mathbb{R}$ representa a reta que contém o ponto Q e tem a direção do vetor $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (3,5,0) - (0,5,4) = (3,0,-4)$, ou seja, a reta PQ

   Resposta: **Opção D**

Exame – 1998, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 135)

50. Como o centro da base que está contida no plano xOz tem coordenadas (3,0,3), e a outra base é paralela e está contida no plano de equação $y = 12$, então as coordenadas do centro da outra base são (3,12,3)

Desta forma, podemos verificar que os centros das bases, das esferas e os pontos de tangência estão todos sobre a reta definida por $x = 3 \wedge z = 3$ e as ordenadas estão a 3 unidades de distância, ou seja, distanciadas pelo raio das esferas.



Desta forma o centro da esfera mais afastada do plano xOz tem de coordenadas $(3,3+3+3,3)$, ou seja, (3,9,3)

Assim, temos que uma equação da superfície esférica é:

$$(x-3)^2 + (y-9)^2 + (z-3)^2 = 3^3$$

E o ponto de coordenadas (1,8,1) pertence à superfície esférica porque obtemos uma proposição verdadeira na substituição das suas coordenadas na equação que define a superfície esférica:

$$(1-3)^2 + (8-9)^2 + (1-3)^2 = 3^3 \Leftrightarrow (-2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 = 3^3 \Leftrightarrow 4+1+4 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9$$

Exame – 1998, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 135)

51. Identificando o centro da esfera ε, podemos verificar que é o ponto de coordenadas (1,2,3) e que é um ponto da reta r
Assim, temos que a intersecção da reta r com a esfera ε é um diâmetro da esfera.
Desta forma, identificando o raio da esfera ($\sqrt{36} = 6$) calculamos o comprimento do diâmetro, ou seja do segmento de reta que é a intersecção da reta r com a esfera ε: $2 \times 6 = 12$

Resposta: **Opção C**

Exame – 1998, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 135)

52.

52.1. Como a altura da pirâmide é igual ao comprimento da aresta do cubo ($\overline{VM} = \overline{UQ}$), e a base da pirâmide coincide com a face superior do cubo, e a face inferior do cubo tem cota zero (está contida no plano xOy) ao então a cota do vértice (z_V) é a soma da aresta do cubo ($\overline{UQ}$) com a altura da pirâmide($\overline{VM}$):

$$\overline{UQ}+\overline{VM} = z_V \underset{\overline{VM}=\overline{UQ}}{\Leftrightarrow} \overline{UQ}+\overline{UQ} = z_V \Leftrightarrow 2\times\overline{UQ} = z_V \underset{z_V=12}{\Leftrightarrow} 2\times\overline{UQ} = 12 \Leftrightarrow \overline{UQ} = \frac{12}{2} \Leftrightarrow \overline{UQ} = 6$$

Assim, como $[ON]$, $[OP]$ e $[OS]$ são arestas do cubo, têm comprimento 6 e assim, temos que as coordenadas do ponto U são (6,6,6), pelo que a distância entre os pontos U e V, é:

$$\overline{UV} = \sqrt{(6-3)^2 + (6-3)^2 + (6-12)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{9+9+36} =$$

$$= \sqrt{54} = \sqrt{9\times 6} = \sqrt{9}\times\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$

52.2. Para escrever uma equação vetorial da reta UV, determinamos as coordenadas do vetor $\overrightarrow{UV}$:

$$\overrightarrow{UV} = V - U = (3,3,12) - (6,6,6,) = (-3,-3,6)$$

E assim, a reta UV é definida pela equação vetorial $(x,y,z) = (6,6,6) + k(-3,-3,6), k \in \mathbb{R}$
Desta forma sabemos que as coordenadas de todos os pontos da reta UV são da forma $(6-3k,6-3k,6+6k), k \in \mathbb{R}$

Assim, podemos calcular o valor dde k relativo ao ponto que é a intersecção da reta UV com o plano de equação $x = 4$, igualando a abcissa do ponto genérico a 4:

$$4 = 6 - 3k \Leftrightarrow 3k = 6 - 4 \Leftrightarrow 3k = 2 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$$

E desta forma, calculamos as coordenadas do ponto de interseção:

$$\left(6 - 3 \times \frac{2}{3},6 - 3 \times \frac{2}{3},6 + 6 \times \frac{2}{3}\right) = (6-2,6-2,6+4) = (4,4,10)$$

Exame – 1998, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 135)

53. Como a abcissa do ponto R é 2 e $[OR]$ é uma aresta do cubo, temos que a medida das arestas do cubo é 2
Assim, como $[ON]$, $[OP]$ e $[OS]$ são arestas do cubo, têm comprimento 2 e assim, temos que as coordenadas do ponto U são $(2,2,2)$, pelo que o raio (r) da superfície esférica que contém os oito vértices do cubo, é metade da distância entre os vértices U e O), e pode ser calculado por:

$$r = \frac{\overline{UO}}{2} = \frac{\sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2+(2-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4+4+4}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{\sqrt{4 \times 3}}{2} = \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

E assim, observando que o centro da superfície esférica que contém os oito vértices do cubo, é o ponto médio de dois vértice opostos (por exemplo U e O, temos que as coordenadas do centro são:

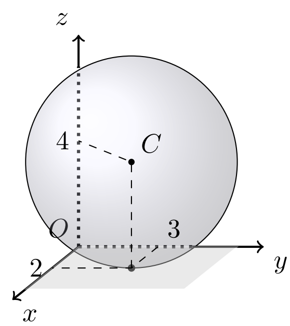
$$\left(\frac{2-0}{2},\frac{2-0}{2},\frac{2-0}{2}\right) = \left(\frac{2}{2},\frac{2}{2},\frac{2}{2}\right) = (1,1,1)$$

E assim, uma equação da superfície esférica que contém os oito vértices do cubo, é:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$$

Exame – 1998, Prova Modelo (cód. 135)

54. Como a superfície esférica é tangente ao plano xOy, ou seja ao plano de equação $z = 0$, então o raio é igual ao valor absoluto da cota do centro, ou seja, a superfície esférica tem raio 4 (como se pretende ilustrar na figura ao lado).



Como as coordenadas do centro da circunferência são $(2,3,4)$, então a equação da superfície esférica é:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 4^2$$

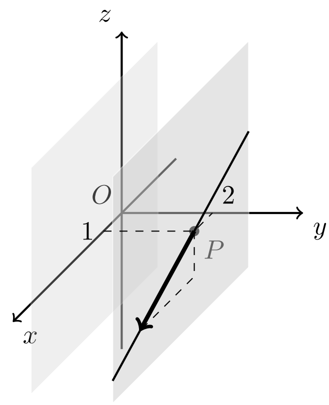
Resposta: **Opção D**

Exame – 1997, Prova para militares (cód. 135)

55. Como a equação vetorial da reta r é $(x,y,z) = (1,2,0) + k(3,0,-1), k \in \mathbb{R}$, então as coordenadas de todos os pontos da reta r são da forma $(1+3k,2,-k)$, $k \in \mathbb{R}$, ou seja, têm todos ordenada 2, pelo que a reta r está contida no plano $y = 2$

Como o plano de equação $y = 2$ é paralelo ao plano de equação $y = 0$, ou seja o plano xOy, então a reta r é paralela ao plano xOz (como se pretende ilustrar na figura ao lado).

Resposta: **Opção B**



Exame – 1997, Prova para militares (cód. 135)

56.

56.1. Como o ponto G tem coordenadas (4,4,0), e o ponto O coincide com a origem do referencial então a área da base do prisma é: $A_{[OEGF]} = 4 \times 4 = 16$

E assim, calculando a altura do prisma ($\overline{OB}$), temos que:

$$V_{[ABCDEFGO]} = A_{[OEGF]} \times \overline{OB} \Leftrightarrow 96 = 16 \times \overline{OB} \Leftrightarrow \frac{96}{16} = \overline{OB} \Leftrightarrow 6 = \overline{OB}$$

Assim, como o vértice da pirâmide, ou seja, o ponto H, coincide com o centro da base superior do prisma, as suas coordenadas são metade da abcissa do ponto G, metade da ordenada do ponto G e a cota igual à altura do prisma, ou seja, as coordenadas do pontos H são:

$$\left(\frac{x_G}{2},\frac{y_G}{2},\overline{OB}\right) = \left(\frac{4}{2},\frac{4}{2},6\right) = (2,2,6)$$

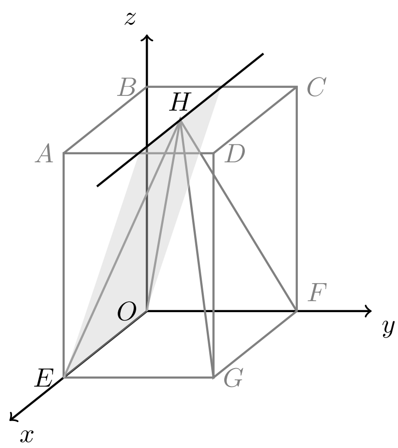
56.2. Como a interseção do plano OEH com o plano ABC é uma reta paralela ao eixo Ox (como se pretende ilustrar na figura ao lado), então tem a direção do vetor

$$\overrightarrow{OE} = E - O = (4,0,0) - (0,0,0 = (4,0,0)$$

Como a reta contém o ponto H uma equação vetorial da reta é:

$$(x,y,z) = H + \lambda\overrightarrow{OE}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

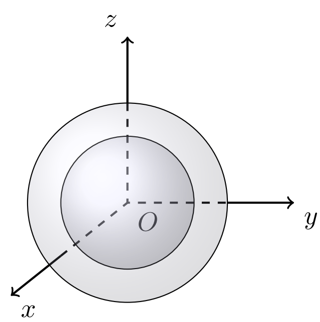
$$\Leftrightarrow (x,y,z) = (2,2,6) + \lambda(4,0,0), \lambda \in \mathbb{R}$$



Exame – 1997, Prova para militares (cód. 135)

57. Como o centro de ambas as superfícies esféricas é comum (a origem do referencial) e o raio é diferente (respetivamente 2 e 3), as duas superfícies esféricas não se intersetam (como se pretende ilustrar na figura ao lado), pelo que a interseção é o conjunto vazio.

Resposta: **Opção D**



Exame – 1997, 2ª fase (cód. 135)

58. Como a reta r e é paralela ao eixo Oz, tem a direção do vetor $\vec{u} = (0,0,1)$ e como passa no ponto B, uma equação vetorial da reta r é:

$$(x,y,z) = B + \lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,5,0) + \lambda(0,0,1), \lambda \in \mathbb{R}$$

Exame – 1997, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 135)