

# MATEMÁTICA A - 11º Ano

## Funções racionais

### Propostas de resolução

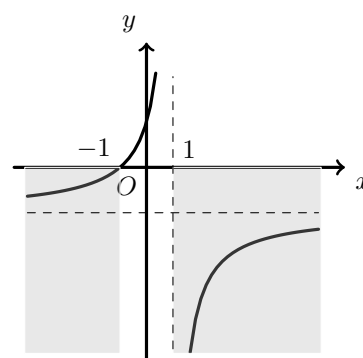
#### Exercícios de exames e testes intermédios

1. Como o conjunto solução da condição  $f(x) \leq 0$  é o conjunto das abcissas dos pontos do gráfico da função que verificam a condição, pela observação do gráfico da função, podemos verificar quais são os pontos que têm ordenada não positiva, isto é, ordenada negativa ou nula (como se pretende ilustrar na figura ao lado).

Assim, temos que os pontos com abcissa inferior ou igual a  $-1$  ou abcissa estritamente superior a  $1$  são os que verificam a condição, pelo que o conjunto solução é:

$$]-\infty, -1] \cup ]1, +\infty[$$

Resposta: **Opção D**



Teste Intermédio 11º ano – 11.03.2014

2.

- 2.1. Para  $x \in ]1, +\infty[$ , temos que:

$$\begin{aligned} f(x) < \frac{1}{x-2} &\Leftrightarrow \frac{2x-3}{1-x} < \frac{1}{x-2} \Leftrightarrow \frac{2x-3}{1-x} - \frac{1}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{(2x-3)(x-2) - 1(1-x)}{(1-x)(x-2)} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 4x - 3x + 6 - 1 + x}{(1-x)(x-2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 6x + 5}{(1-x)(x-2)} < 0 \end{aligned}$$

Identificando os zeros do numerador e do denominador para estudar o quociente recorrendo a um quadro de sinais, temos:

- $2x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4(2)(5)}}{2(2)} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{4}$ , pelo que o numerador não tem zeros, e como o coeficiente de  $x^2$  é positivo, então o numerador assume valores positivos para qualquer valor de  $x$
- $(1-x)(x-2) = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \vee x-2 = 0 \Leftrightarrow 1 = x \vee x = 2$ , e como  $(1-x)(x-2) = x-2-x^2+2x$ , ou seja, o coeficiente de  $x^2$  é negativo, o numerador assume valores negativos no intervalo  $]1, 2[$  e valores positivos fora deste intervalo

Assim, construindo o quadro de sinais para  $x \in ]1, +\infty[$  e identificando o conjunto solução da inequação, temos:

$x$	1		2	$+\infty$
$2x^2 - 6x + 5$	n.d.	+	+	+
$(1-x)(x-2)$	n.d.	+	0	-
Q	n.d.	+	n.d.	-

$$\text{C.S.} = ]2, +\infty[$$



2.2. Como  $(g \circ f)(-3) = g(f(-3))$ , vamos calcular o valor de  $f(-3)$ :

$$f(-3) = \frac{2}{3}(-3)^3 + 3(-3)^2 - 13 = 2 \times -9 + 27 - 13 = -4$$

E assim, calculando o valor de  $k$ , vem que:

$$(g \circ f)(-3) = 6 \Leftrightarrow g(f(-3)) = 6 \Leftrightarrow g(-4) = 6 \Leftrightarrow k(-4) + 2 = 6 \Leftrightarrow -4k = 6 - 2 \Leftrightarrow k = \frac{4}{-4} \Leftrightarrow k = -1$$

2.3. Representando graficamente a função recorrendo à calculadora, com a janela de visualização sugerida, obtemos o gráfico da reproduzido na figura ao lado, em que podemos identificar:

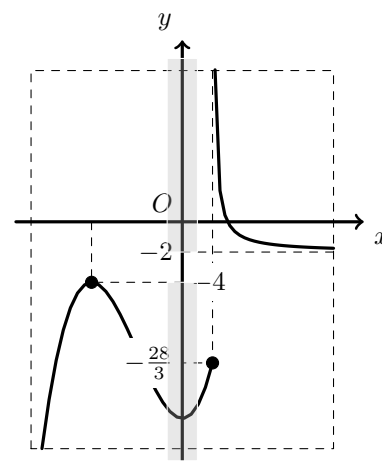
- o ponto do gráfico de abcissa 1, cuja ordenada é:

$$f(1) = \frac{2}{3} \times 1^3 + 3 \times 1^2 - 13 = \frac{2}{3} + 3 - 13 = -\frac{28}{3}$$

- as assíntotas do gráfico de  $f$ , ou seja, as retas definidas pelas equações  $x = 1$  e  $y = -2$
- o ponto do gráfico correspondente ao máximo relativo da função, ou seja, o ponto de ordenada  $-4$

Assim, podemos verificar que o contradomínio da função é o conjunto:

$$D'_f = ]-\infty, -4] \cup ]-2, +\infty[$$



Teste Intermédio 11º ano – 16.03.2014

3. Como o gráfico da função  $g$  é uma translação do gráfico da função  $f$  e as retas de equações  $x = -2$  e  $y = 2$  são assíntotas do gráfico de  $g$  temos que:

$$g(x) = 2 + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x+1+1} + 2 = f(x+1) + 2$$

Ou seja, temos que  $a = 1$  e  $k = 2$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 11º ano – 06.03.2013

4.

4.1.

4.1.1. Como o domínio da função é  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ , o único valor que não é imagem de um objeto pela função  $f$  é 2, pelo que o valor de  $k$  para o qual a equação  $f(x) = k$  é impossível, é 2.

4.1.2. Quando  $x$  tende para  $+\infty$ , as imagens aproximam-se por valores superiores do valor numérico da assíntota horizontal ou seja de 2, pelo que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2^+$$



4.2.

4.2.1. Para  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ , temos que:

$$\begin{aligned} f(x) \leq \frac{4-x}{x+2} &\Leftrightarrow \frac{6-x}{x-2} \leq \frac{4-x}{x+2} \Leftrightarrow \frac{6-x}{x-2} - \frac{4-x}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(6-x)(x+2) - (4-x)(x-2)}{(x-2)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{6x+12-x^2-2x-(4x-8-x^2+2x)}{(x-2)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4x+12-x^2-4x+8+x^2-2x}{(x-2)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{-2x+20}{(x-2)(x+2)} \leq 0 \end{aligned}$$

Identificando os zeros do numerador e do denominador para estudar o quociente recorrendo a um quadro de sinais, temos:

- $-2x+20=0 \Leftrightarrow 20=2x \Leftrightarrow \frac{20}{2}=x \Leftrightarrow 10=x$
- $(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \vee x+2=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=-2$ , mas sabemos que  $2 \notin D_f$

Assim, construindo o quadro de sinais para  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$  e identificando o conjunto solução da inequação, temos:

$x$	$-\infty$	$-2$		$2$		$10$	$+\infty$
$-2x+20$		+	n.d.	+	+	+	0
$(x-2)(x+2)$		+	n.d.	-	0	+	+
Q		+	n.d.	-	n.d.	+	0

C.S.=] -2,2[ $\cup$ 10, + $\infty$ [

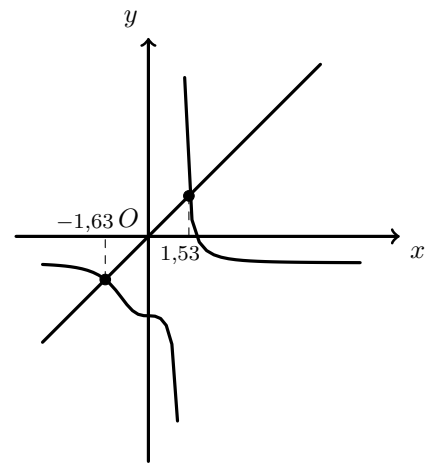
4.2.2. Escrevendo uma expressão algébrica que defina a função  $f \circ g$ , vem:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = \frac{6-x^3}{x^3-2}$$

Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função  $f \circ g$  recorrendo à expressão anterior, e a reta definida pela equação  $y = x$ , (reproduzidos na figura ao lado), temos que as soluções da equação  $(f \circ g)(x) = x$  são as abcissas dos pontos de interseção do gráfico da função com a reta.

Assim, usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção do gráfico com a reta, obtemos um valor aproximado (às centésimas) das abcissas dos pontos de interseção, ou seja, das soluções da equação:

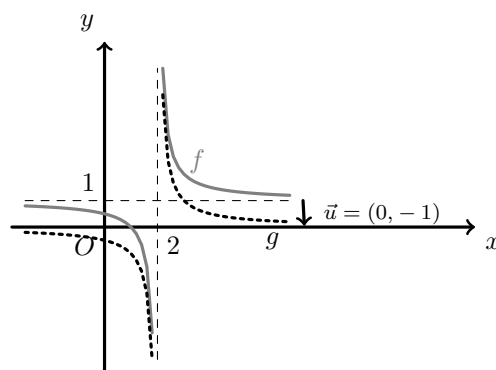
$$x_1 \approx -1,63 \text{ e } x_2 \approx 1,53$$



5. Como os gráficos da função  $g$  é uma translação do gráfico da função  $f$  associada a um vetor de coordenadas  $(0, k)$ .

Assim, para que a função  $g$  não tenha zeros a assintota horizontal deve ser a reta de equação  $y = 0$ , ou seja a translação do gráfico da função  $f$  deve estar associada ao vetor  $(0, -1)$  (como se ilustra na figura ao lado), pelo que o valor de  $k$  é  $-1$

Resposta: **Opção A**



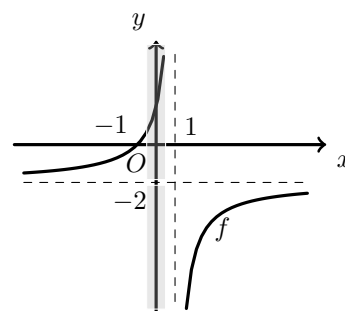
Teste Intermédio 11º ano – 09.02.2012

6.

6.1.

- 6.1.1. Como a assintota horizontal do gráfico é a reta de equação  $y = -2$ ,  $-2$  é o único número real que não pertence ao conjunto dos números reais, pelo que o contradomínio da função  $f$  é:

$$D'_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\} = ]-\infty, -2[ \cup ]-2, +\infty[$$

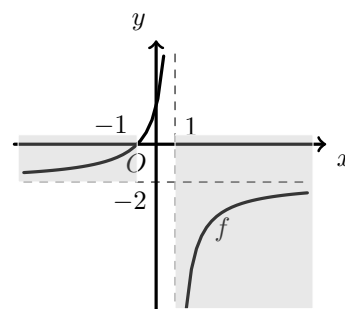


- 6.1.2. Pela observação do gráfico, podemos verificar que os objetos menos ou iguais a  $-1$  têm imagens compreendidas entre  $-2$  e  $0$

Podemos ainda observar que os objetos maiores que  $1$  têm imagens inferiores a  $-2$

Assim, o conjunto solução da condição  $f(x) \leq 0$  é:

$$]-\infty, -1] \cup ]1, +\infty[$$



- 6.2. Como o gráfico da função  $f$  é uma hipérbole com uma assintota horizontal de equação  $y = -2$  e uma assintota vertical de equação  $x = 1$  então a expressão analítica é da forma:

$$f(x) = -2 + \frac{a}{x-1}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Como o gráfico da função  $f$  intersecta o eixo  $Ox$  no ponto de abcissa  $-1$ , ou seja o ponto de coordenadas  $(-1, 0)$  pertence ao gráfico da função, substituindo as coordenadas deste ponto na expressão anterior, podemos calcular o valor do parâmetro  $a$ :

$$0 = -2 + \frac{a}{-1-1} \Leftrightarrow 2 = \frac{a}{-2} \Leftrightarrow 2 \times (-2) = a \Leftrightarrow -4 = a$$

Assim, uma expressão analítica da função  $f$  é:

$$f(x) = -2 + \frac{-4}{x-1} = -2 - \frac{4}{x-1}$$

Teste Intermédio 11º ano – 09.02.2012



7. Pela definição de função composta, temos que:

$$(g \circ h)(a) = \frac{1}{9} \Leftrightarrow g(h(a)) = \frac{1}{9} \Leftrightarrow g(a+1) = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{a+1} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 9 = a+1 \Leftrightarrow 9-1 = a \Leftrightarrow 8 = a$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 11º ano – 24.05.2011

8. Recorrendo à regra de Ruffini para fazer a divisão inteira dos polinómios que compõem o numerador e o denominador do quociente que define a função  $g$ , temos:

$$\begin{array}{r|rr} & 1 & -1 \\ -1 & & -1 \\ \hline & 1 & -2 \end{array}$$

E assim, vem que  $x - 1 = (x + 1) \times 1 - 2 \Leftrightarrow \frac{x - 1}{x + 1} = 1 - \frac{2}{x + 1}$

Logo, como  $g(x) = \frac{x - 1}{x + 1} = 1 - \frac{2}{x + 1}$  as retas de equações  $y = 1$  e  $x = -1$  são as assintotas do gráfico de  $g$ , pelo que as coordenadas do ponto  $P$  são  $(-1, 1)$

Como  $f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 9(-1) - 11 = -1 + 3 \times 1 + 9 - 11 = 0$  e como, para que ponto  $P$  pertença ao gráfico de  $h$ , as suas coordenadas devem verificar a condição  $h(x) = y \Leftrightarrow f(x) + k = y$ , e assim, substituindo as coordenadas do ponto  $P$ , podemos calcular o valor de  $k$ :

$$h(-1) = 1 \Leftrightarrow f(-1) + k = 1 \Leftrightarrow 0 + k = 1 \Leftrightarrow k = 1$$

Teste Intermédio 11º ano – 24.05.2011

9.

9.1. O número de animais da espécie A, no início de 2009, ou seja, zero anos após o início de 2009, é:

$$A(0) = \frac{11 \times 0 + 6}{0 + 1} = \frac{6}{1} = 6 \text{ milhares}$$

Da mesma forma, o número de animais desta espécie, no início de 2010, ou seja 1 ano após o início de 2009, é dado por:

$$A(1) = \frac{11 \times 1 + 6}{1 + 1} = \frac{17}{2} = 8,5 \text{ milhares}$$

Desta forma, temos que a variação do número de animais desta espécie, neste intervalo de tempo, foi:

$$A(1) - A(0) = 8,5 - 6 = 2,5 \text{ milhares}$$

Assim, o número de nascimentos pode ser calculado como a soma da variação com o número de mortes, ou seja o número de nascimentos é  $n = 2500 + 500 = 3000$



9.2. Recorrendo à regra de Ruffini para fazer a divisão inteira dos polinómios que compõem o numerador e o denominador do quociente que definem as funções  $a$  e  $b$ , temos:

$$\begin{array}{r|rr} -1 & 11 & 6 \\ & & -11 \\ \hline & 11 & -5 \end{array}$$

E assim, vem que  $11t - 6 = (t + 1) \times 11 - 5 \Leftrightarrow \frac{11t - 6}{t + 1} = 11 - \frac{5}{t + 1}$

$$\begin{array}{r|rr} -3 & 1 & 9 \\ & & -3 \\ \hline & 1 & 6 \end{array}$$

E assim, vem que  $t + 9 = (t + 3) \times 1 + 6 \Leftrightarrow \frac{t + 9}{t + 3} = 1 + \frac{6}{t + 3}$

Logo, como  $g(x) = \frac{x - 1}{x + 1} = 1 - \frac{2}{x + 1}$  as retas de equações  $y = 1$  e  $x = -1$  são as assíntotas do gráfico de  $g$ , pelo que as coordenadas do ponto  $P$  são  $(-1,1)$

Assim, podemos observar que a assíntota horizontal da função  $a$  é a reta de equação  $y = 11$  e a assíntota horizontal da função  $b$  é a reta de equação  $y = 1$ , pelo que o número de animais da espécie A tende a aproximar-se de 11 milhares e o número de animais da espécie B tende a aproximar-se de 1 milhar, ou seja, com o decorrer do tempo, a diferença entre o número de animais das duas espécies tende para  $11 - 1 = 10$  milhares.

Teste Intermédio 11º ano – 06.05.2010

10.

10.1. Para  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , temos que:

$$f(x) \leq 5 \Leftrightarrow 3 + \frac{6}{x} \leq 5 \Leftrightarrow -5 + 3 + \frac{6}{x} \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2x}{x} + \frac{6}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x + 6}{x} \leq 0$$

Identificando o zero do numerador para estudar o quociente recorrendo a um quadro de sinais, temos:

$$-2x + 6 = 0 \Leftrightarrow 6 = 2x \Leftrightarrow 3 = x$$

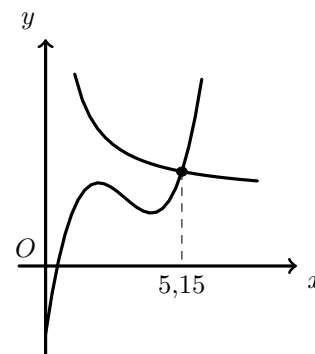
Assim, construindo o quadro de sinais para  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e identificando o conjunto solução da inequação, temos:

$x$	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$-2x + 6$		+	+	+	0	-	
$x$		-	0	+	+	+	
Q		-	n.d.	+	0	-	

$$C.S. = ]-\infty, 0[ \cup ]3, +\infty[$$

10.2. Visualizando na calculadora gráfica a representação gráfica das funções  $f$  e  $g$  com abcissas positivas, observando o ponto de interseção dos dois gráficos, com abcissa positiva, e determinando um valor aproximado às centésimas da abcissa do ponto de interseção, através das funcionalidades da calculadora, obtemos um valor arredondado às centésimas da solução positiva da equação  $f(x) = g(x)$ :

$$x \approx 5,15$$



Teste Intermédio 11º ano – 06.05.2010



11.

11.1. Para  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ , temos que:

$$f(x) \geq 3 \Leftrightarrow 4 - \frac{4}{x+2} \geq 3 \Leftrightarrow -3 + 4 - \frac{4}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x+2} - \frac{4}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+2} \geq 0$$

Assim, construindo o quadro de sinais para  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$  e identificando o conjunto solução da inequação, temos:

$x$	$-\infty$	$-2$		$2$	$+\infty$
$x-2$	-	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+
Q	+	n.d.	-	0	+

$$C.S. = ]-\infty, -2[ \cup ]2, +\infty[$$

11.2. Podemos calcular a área do quadrilátero como a diferença entre a área do trapézio  $[OBCD]$  e a área do triângulo  $[OAB]$

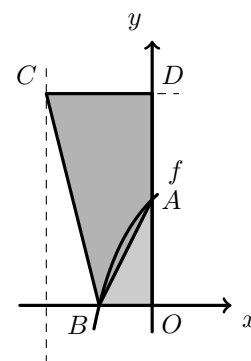
Podemos observar que como a função  $f$  é definida por  $f(x) = 4 - \frac{4}{x+2} = 4 - \frac{4}{x - (-2)}$  então as assíntotas do gráfico da função são as retas de equações  $x = -2$  e  $y = 4$ , então temos que as coordenadas do ponto  $C$  são  $(-2,4)$  e as coordenadas do ponto  $D$  são  $(0,4)$

As coordenadas do ponto  $A$  são  $(0,2)$  porque a sua ordenada calculada por:

$$y_A = f(0) = 4 - \frac{4}{0+2} = 4 - 2 = 2$$

As coordenadas do ponto  $B$  são  $(-1,0)$  porque a sua abcissa é a solução da equação:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow 4 - \frac{4}{x+2} = 0 \Leftrightarrow 4 = \frac{4}{x+2} \Leftrightarrow \frac{4(x+2)}{4} = 1 \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x+2 = 1 \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$



Assim temos que a área do quadrilátero  $[ABCD]$  é:

$$\begin{aligned} A_{[ABCD]} &= A_{[OBCD]} - A_{[OAB]} = \frac{\overline{CD} + \overline{OB}}{2} \times \overline{OD} - \frac{\overline{OB} \times \overline{OA}}{2} = \frac{|x_C| + |x_B|}{2} \times y_D - \frac{|x_B| \times y_A}{2} = \\ &= \frac{|-2| + |-1|}{2} \times 4 - \frac{|-1| \times 2}{2} = \frac{3}{2} \times 4 - \frac{2}{2} = \frac{12}{2} - 1 = 6 - 1 = 5 \end{aligned}$$

Teste Intermédio 11º ano – 07.05.2009

12. Como a função  $f$  é definida por uma expressão do tipo  $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ , e as assíntotas do seu gráfico são as retas de equações  $x = 2$  e  $y = 3$ , temos que:

$$a = 3 \text{ e } c = 2$$

Como o ponto de coordenadas  $(0,0)$  pertence ao gráfico da função, ou seja,  $f(0) = 0$ , substituindo os valores de  $a$  e  $c$  e as coordenadas do ponto que pertence ao gráfico da função, podemos calcular o valor de  $b$ :

$$0 = 3 + \frac{b}{0-2} \Leftrightarrow -3 = \frac{b}{-2} \Leftrightarrow -3 \times (-2) = b \Leftrightarrow 6 = b$$

Teste Intermédio 11º ano – 06.05.2008



13. Pela observação da representação gráfica da função  $f$  verificamos que a assíntota horizontal do gráfico, ou seja a reta de equação  $y = a$ , é uma reta horizontal cujos pontos têm ordenada positiva, pelo que  $a > 0$

Da mesma forma, podemos observar que a assíntota vertical do gráfico, ou seja a reta de equação  $x = b$ , é uma reta horizontal cujos pontos têm abcissa negativa, ou seja,  $b < 0$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 11º ano – 10.05.2007

14.

14.1. Para  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , temos que:

$$f(x) \leq -1 \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{1-x} \leq -1 \Leftrightarrow 1 + 2 + \frac{1}{1-x} \leq 0 \Leftrightarrow 3 + \frac{1}{1-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3-3x}{1-x} + \frac{1}{1-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4-3x}{1-x} \leq 0$$

Identificando o zero do numerador para estudar o quociente recorrendo a um quadro de sinais, temos:

$$4 - 3x = 0 \Leftrightarrow 4 = 3x \Leftrightarrow \frac{4}{3} = x$$

Assim, construindo o quadro de sinais para  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  e identificando o conjunto solução da inequação, temos:

$x$	$-\infty$	$1$		$\frac{4}{3}$	$+\infty$	
$4 - 3x$		+	+	0	-	
$1 - x$		+	0	-	-	
Q		+	n.d.	-	0	+

$$\text{C.S.} = \left] 1, \frac{4}{3} \right]$$

14.2. Observando que:

$$f(x) = 2 + \frac{1}{1-x} = 2 + \frac{1}{-(-1+x)} = 2 - \frac{1}{x-1}$$

podemos verificar que as assíntotas do gráfico de  $f$  são as retas, cujas equações são:

$$y = 2 \quad \text{e} \quad x = 1$$

Teste Intermédio 11º ano – 19.05.2006

15. Recorrendo à regra de Ruffini para fazer a divisão inteira dos polinómios que compõem o numerador e o denominador do quociente que define a função  $f$ , temos:

$$\begin{array}{r|rr} & 1 & -2 \\ 3 & & 3 \\ \hline & 1 & 1 \end{array}$$

$$\text{E assim, vem que } x - 2 = (x - 3) \times 1 + 1 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x-3} = 1 + \frac{1}{x-3}$$

Logo, como  $f(x) = \frac{x-2}{x-3} = 1 + \frac{1}{x-3}$  as retas de equações  $x = 3$  e  $y = 1$  são as assíntotas do gráfico de  $f$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)





16. Em dois decilitros do vinho bebido existem  $2 \times 5 = 10$  gramas de álcool e 70% do peso de uma pessoa com  $x$  quilogramas é  $0,7x$ .

Assim, o quociente entre o peso do álcool ingerido (em gramas) e 70% do peso dessa pessoa (em quilogramas), ou seja, o nível de álcool no sangue, é  $\frac{10}{0,7x}$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2004, 2ª fase (cód. 435)

17. O coeficiente de ampliação  $A$  de uma certa lupa é dado, em função da distância  $d$  (em decímetros) da lupa ao objeto, por

$$A(d) = \frac{5}{5-d}$$

A distância a que o objeto tem de estar da lupa para que o coeficiente de ampliação seja igual a 5 é a solução da equação  $A(d) = 5$

Resolvendo a equação para obter o valor da distância, vem:

$$A(d) = 5 \Leftrightarrow \frac{5}{5-d} = 5 \Leftrightarrow \frac{5}{5} = 5-d \wedge d \neq 5 \Leftrightarrow d+1 = 5 \wedge d \neq 5 \Leftrightarrow d = 5-1 \wedge d \neq 5 \Leftrightarrow d = 4$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2000, 2ª fase (cód. 435)

