MATEMÁTICA A - 11º Ano
Geometria - Declive e inclinação
Propostas de resolução

Exercícios de exames e testes intermédios

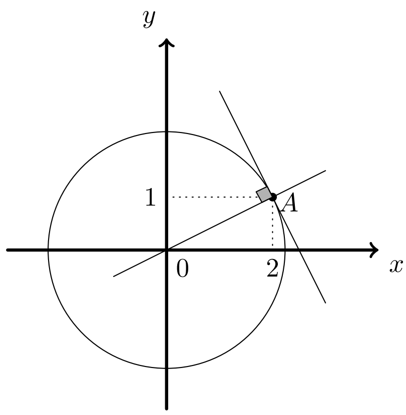
1. Como a tangente é perpendicular ao raio, a reta r é perpendicular à reta OA, ou seja, declive da reta r é o simétrico do declive da reta OA

   Calculando o declive da reta OA, temos:

$$m_{OA} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$$

   Assim, o declive da reta r, é:

$$m_r = -\frac{1}{m_{OA}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$



Logo a equação da reta r é da forma $y = -2x + b$ pelo que, substituindo as coordenadas do ponto A na equação da reta, podemos calcular o valor de b, ou seja, da ordenada na origem:

$$1 = -2 \times 2 + b \Leftrightarrow 1 = -4 + b \Leftrightarrow 1 + 4 = b \Leftrightarrow 5 = b$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2018, 2ª Fase

2. Como $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, temos que:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = 5 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = 4 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \pm 2$$

Como $\cos \alpha < 0$, então a reta tem declive negativo.
Assim, como o declive da reta é a tangente da inclinação ($m = \operatorname{tg} \alpha$), temos que $\operatorname{tg} \alpha = -2$, ou seja a reta tem declive -2, pelo que, de entre as opções apresentadas a reta de equação $y = -2x$ é a única, cuja inclinação α, verifica a condição $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2017, 1ª Fase

3. Determinando as abcissas dos pontos de interseção da circunferência com o eixo Ox, como estes pontos têm ordenada nula ($y = 0$), vem

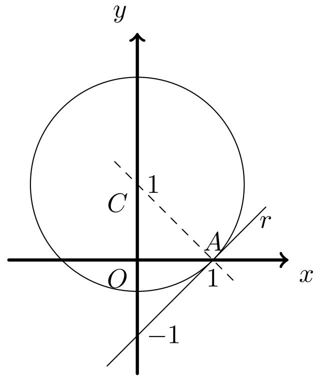
$$x^2 + (0-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2 - 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

Como o ponto A tem abcissa positiva é o ponto de coordenadas (1,0)
Como o centro da circunferência é o ponto C de coordenadas (0,1), a reta CA que contém o raio $[CA]$ da circunferência tem declive

$$m_{CA} = \frac{1-0}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Como a reta r é tangente à circunferência no ponto A, é perpendicular à reta CA, e por isso, o seu declive é o simétrico do inverso de m_{CA}, temos que,

$$m_r = -\frac{1}{m_{CA}} = -\frac{1}{-1} = 1$$



Assim, temos que a equação reduzida da reta r é da forma $y = 1 \times x + b \Leftrightarrow y = x + b$

Como o ponto A pertence à reta r, substituindo as suas coordenadas na expressão anterior, vem
$0 = 1 + b \Leftrightarrow -1 = b$

Pelo que, a equação reduzida da reta r é

$$y = x - 1$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2015, 2ª Fase

4. Como o triângulo $[ABC]$ é equilátero, temos que $C\hat{B}A = \frac{180}{3} = 60°$, ou seja a inclinação da reta AB é $60°$, pelo que o declive correspondente, m_{AB}, é

$$m_{AB} = \text{tg}(60°) = \sqrt{3}$$

Assim, temos que a equação reduzida da reta AB é da forma

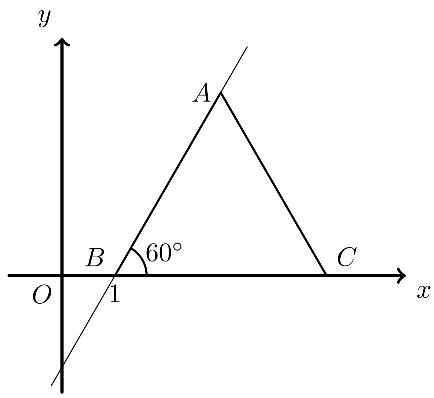
$$y = \sqrt{3}x + b$$

Como o ponto $A(1,0)$ pertence à reta, podemos calcular o valor de b, substituindo as coordenadas do ponto A na condição anterior:

$$0 = \sqrt{3} \times 1 + b \Leftrightarrow -\sqrt{3} = b$$

Pelo que a equação reduzida da reta AB é

$$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$$



Resposta: **Opção D**

Exame – 2015, 1ª Fase

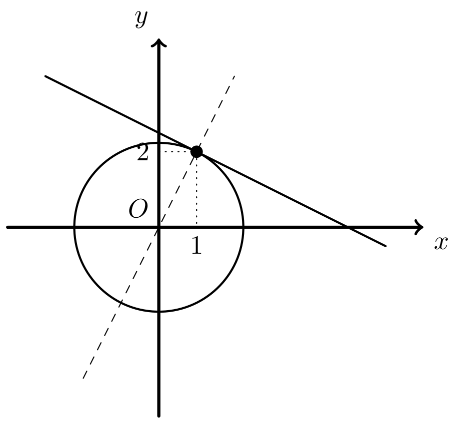
5. Como o centro da circunferência é a origem do referencial, a reta que contém os pontos de coordenadas (0,0) e (1,2) contém o raio da circunferência que é perpendicular à reta tangente no ponto de coordenadas (1,2). Calculando o declive desta reta temos:

$$m_{raio} = \frac{2-0}{1-0} = 2$$

Assim, o declive (m) da reta tangente à circunferência no ponto (1,2), é o simétrico do inverso de m_{raio}, ou seja:

$$m = -\frac{1}{m_{raio}} = -\frac{1}{2}$$

Resposta: **Opção B**



Teste Intermédio 11º ano – 09.02.2012

6. Como a circunferência tem centro em O e raio 5, é definida pela equação

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

Como a abcissa do ponto P é 3, e o ponto P pertence à circunferência, podemos calcular a ordenada, com recurso à equação anterior:

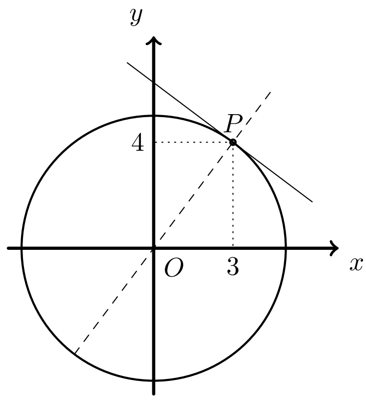
$$3^2 + y^2 = 5^2 \Leftrightarrow y^2 = 25 - 9 \Leftrightarrow y^2 = 16 \underset{y>0}{\Rightarrow} y = 4$$

Como o centro da circunferência é a origem do referencial, a reta que contém a origem e o ponto P contém o raio da circunferência que é perpendicular à reta tangente no ponto P. Calculando o declive da reta OP, temos:

$$m_{OP} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$$

Assim, o declive (m) da reta tangente à circunferência no ponto P, é o simétrico do inverso de m_{OP}, ou seja:

$$m = -\frac{1}{m_{OP}} = -\frac{1}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$$



Assim, a equação da reta tangente à circunferência no ponto P é da forma $y = -\frac{3}{4}x + b$ e contém o ponto P, pelo que podemos determinar o valor da ordenada na origem substituindo as coordenadas do ponto P:

$$4 = -\frac{3}{4} \times 3 + b \Leftrightarrow 4 = -\frac{9}{4} + b \Leftrightarrow 4 + \frac{9}{4} = b \Leftrightarrow \frac{16}{4} + \frac{9}{4} = b \Leftrightarrow \frac{25}{4} = b$$

Ou seja, a equação reduzida da reta tangente à circunferência no ponto P é $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$

Teste Intermédio 11º ano – 27.01.2011

7. Como o centro da circunferência é o ponto (4,1), a reta que contém a origem e o ponto A contém o raio da circunferência que é perpendicular à reta t.

   Calculando o declive da reta OA, temos:

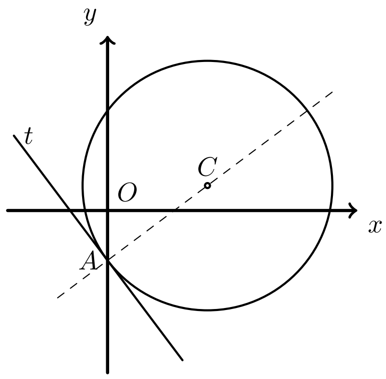
$$m_{OA} = \frac{1-(-2)}{4-0} = \frac{3}{4}$$

   Assim, o declive (m_t) da reta t, é o simétrico do inverso de m_{OA}, ou seja:

$$m_t = -\frac{1}{m_{OA}} = -\frac{1}{\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$$

   Assim, a ordenada na origem da equação da reta tangente à circunferência no ponto A é a ordenada do A ($b = y_A = -2$), porque este ponto pertence à reta e tem abcissa nula.

   Assim, a equação reduzida da reta t é $y = -\frac{4}{3}x - 2$



Teste Intermédio 11º ano – 27.01.2010

8. Como o declive (m_s) da reta s, perpendicular à reta t, é o simétrico do inverso do declive da reta m_t, temos que:

$$m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

   Assim, as retas de equação $y = 2x + 2$ e $y = 2x + \frac{5}{3}$ são ambas perpendiculares à reta r.
   Substituindo as coordenadas do ponto (1,4), podemos verificar qual delas contém este ponto:

   - $y = 2x + 2$: $4 = 2(1) + 2 \Leftrightarrow 4 = 2 + 2 \Leftrightarrow 4 = 4$ (Proposição verdadeira)
   - $y = 2x + \frac{5}{3}$: $4 = 2(1) + \frac{5}{3} \Leftrightarrow 4 = \frac{6}{2} + \frac{5}{3} \Leftrightarrow 4 = \frac{11}{3}$ (Proposição falsa)

   Pelo que a equação reduzida da reta s é $y = 2x + 2$

   Resposta: **Opção A**

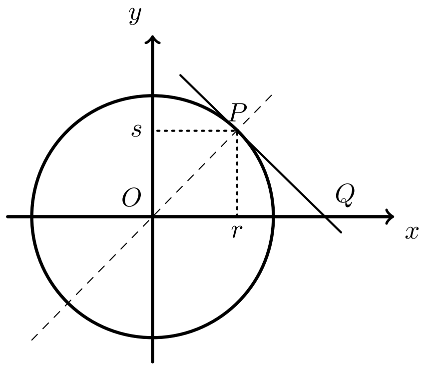
Teste Intermédio 11º ano – 29.01.2009

9. Como o centro da circunferência é a origem do referencial, a reta que contém a origem e o ponto P contém o raio da circunferência que é perpendicular à reta t. Calculando o declive desta reta temos:

$$m_{OP} = \frac{s-0}{r-0} = \frac{s}{r}$$

Assim, o declive (m_t) da reta t, é o simétrico do inverso de m_{OP}, ou seja:

$$m_t = -\frac{1}{m_{OP}} = -\frac{1}{\frac{s}{r}} = -\frac{r}{s}$$



Assim, a equação da reta t é da forma $y = -\frac{s}{r}x + b$ e contém o ponto P, pelo que podemos determinar o valor da ordenada na origem substituindo as coordenadas do ponto P:

$$s = -\frac{r}{s} \times r + b \Leftrightarrow s = -\frac{r^2}{s} + b \Leftrightarrow s + \frac{r^2}{s} = b \Leftrightarrow \frac{s^2}{s} + \frac{r^2}{s} = b \Leftrightarrow \frac{r^2+s^2}{s} = b$$

Como a circunferência tem raio 1, é definida pela equação $x^2 + y^2 = 1$, e como o ponto P pertence à circunferência, temos que $r^2 + s^2 = 1$, e assim, vem que a ordenada da origem da equação da reta t é $b = \frac{1}{s}$, e assim a equação da reta t é:

$$y = -\frac{r}{s} \times x + \frac{1}{s}$$

Como o ponto Q pertence ao eixo Ox tem ordenada nula $(y_Q = 0)$ e como pertence à reta t, calculamos a sua abcissa (x_Q), substituindo o valor da ordenada na equação da reta t:

$$0 = -\frac{r}{s} \times x_Q + \frac{1}{s} \Leftrightarrow \frac{r}{s} \times x_Q = \frac{1}{s} \Leftrightarrow x_Q = \frac{1 \times s}{s \times r} \Leftrightarrow x_Q = \frac{1}{r}$$

Teste Intermédio 11º ano – 10.05.2007