

MATEMÁTICA A - 11º Ano

Geometria - Produto escalar

Exercícios de exames e testes intermédios

1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ e o ponto P de coordenadas $(1,1,1)$, pertencente a essa superfície esférica.
Seja R o ponto de intersecção da superfície esférica com o semieixo negativo das ordenadas.

Determine a amplitude do ângulo ROP

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Exame – 2018, Ép. especial

2. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 10$$

Seja C o centro da superfície esférica e seja A o simétrico do ponto C relativamente ao plano xOy

Determine a amplitude do ângulo AOC

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

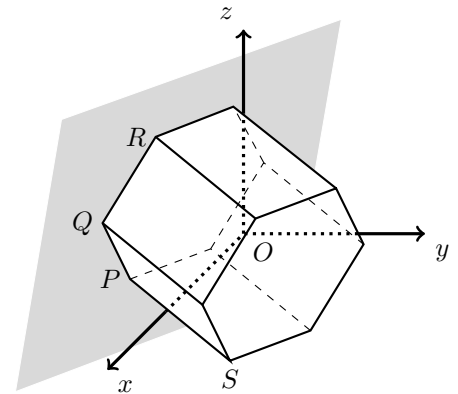
Exame – 2018, 2ª Fase

3. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma hexagonal regular.

Sabe-se que:

- $[PQ]$ e $[QR]$ são arestas de uma das bases do prisma;
- $\overline{PQ} = 4$

Determine o produto escalar $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}$



Exame – 2018, 1ª Fase



4. Considere, num referencial o.n. xOy , dois pontos distintos, R e S

Seja A o conjunto dos pontos P desse plano que verificam a condição $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PS} = 0$
($\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PS}$ designa o produto escalar de \overrightarrow{PR} por \overrightarrow{PS}).

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) O conjunto A é a mediatriz do segmento de reta $[RS]$
- (B) O conjunto A é o segmento de reta $[RS]$
- (C) O conjunto A é o triângulo $[ROS]$
- (D) O conjunto A é a circunferência de diâmetro $[RS]$

Exame – 2017, Ép. especial

5. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cilindro de revolução de altura 3

Sabe-se que:

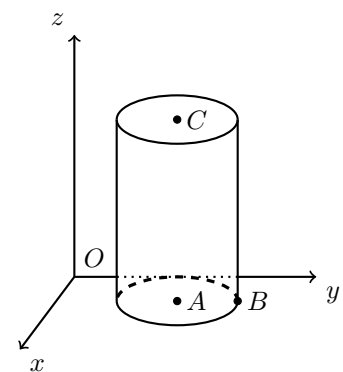
- o ponto A tem coordenadas $(1,2,0)$ e é o centro da base inferior do cilindro, a qual está contida no plano xOy
- o ponto B tem coordenadas $(1,3,0)$ e pertence à circunferência que delimita a base inferior do cilindro;
- o ponto C é o centro da base superior do cilindro.

Seja α o plano que passa no ponto A e que é perpendicular à reta r definida pela condição $x = y = 1 - z$. Seja P o ponto desse plano de abcissa e ordenada iguais a 2

Determine a amplitude do ângulo POC

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.



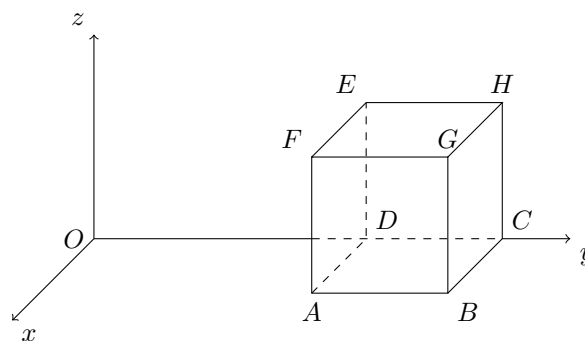
Exame – 2017, Ép. especial



6. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$

Sabe-se que:

- a face $[ABCD]$ está contida no plano xOy
- a aresta $[CD]$ está contida no eixo Oy
- o ponto D tem coordenadas $(0,4,0)$
- o plano ACG é definido pela equação $x + y - z - 6 = 0$
- o vértice A tem abcissa igual a 2



Seja P o vértice de uma pirâmide regular de base $[EFGH]$

Sabe-se que:

- a cota do ponto P é superior a 2
- o volume da pirâmide é 4

Determine a amplitude do ângulo OGP

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

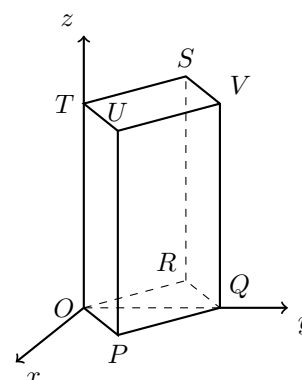
Exame – 2017, 2ª Fase

7. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[OPQRSTUVWXYZ]$

Sabe-se que:

- a face $[OPQR]$ está contida no plano xOy
- o vértice Q pertence ao eixo Oy e o vértice T pertence ao eixo Oz
- o plano STU tem equação $z = 3$

Determine o valor do produto escalar $\vec{UP} \cdot \vec{RS}$



Exame – 2017, 1ª Fase



8. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[OABCDEFG]$

Sabe-se que:

- os pontos C , A e E pertencem aos eixos coordenados Ox , Oy e Oz , respetivamente;
- o ponto A tem coordenadas $(0,2,0)$
- o plano OFB é definido pela equação $3x + 3y - z = 0$

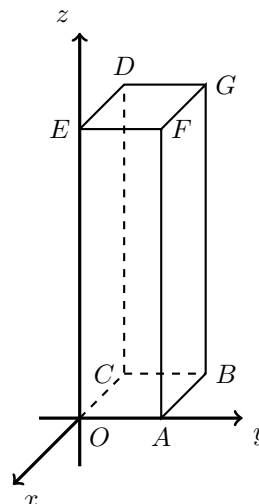
Seja P o ponto de cota igual a 1 que pertence à aresta $[BG]$

Seja R o simétrico do ponto P relativamente à origem.

Determine a amplitude do ângulo RAP

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.



Exame – 2016, Ép. especial

9. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α definido pela equação $3x + 2y + 4z - 12 = 0$
 Sejam A e B os pontos pertencentes ao plano α , tais que A pertence ao semieixo positivo Ox e B pertence ao semieixo positivo Oy
 Seja P um ponto com cota diferente de zero e que pertence ao eixo Oz

Justifique, recorrendo ao produto escalar de vetores, que o ângulo APB é agudo.

Exame – 2016, 2ª Fase

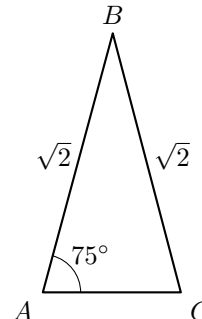
10. Na figura ao lado, está representado um triângulo isósceles $[ABC]$

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{2}$
- $\hat{BAC} = 75^\circ$

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$?

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt{3}$



Exame – 2016, 1ª Fase

11. Os segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$ são lados consecutivos de um hexágono regular de perímetro 12

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$?

- (A) -3 (B) -2 (C) 2 (D) 3

Exame – 2015, Ép. especial

12. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano β definido pela condição $2x - y + z - 4 = 0$

Considere o ponto $A(1,2,3)$

Seja B o ponto de intersecção do plano β com o eixo Ox

Seja C o simétrico do ponto B relativamente ao plano yOz

Determine a amplitude do ângulo BAC

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.



13. Na figura seguinte, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[NOPQRSTU]$ que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

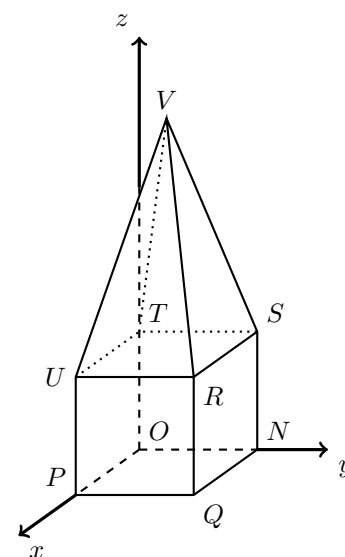
- o vértice P pertence ao eixo Ox
- o vértice N pertence ao eixo Oy
- o vértice T pertence ao eixo Oz
- o vértice R tem coordenadas $(2,2,2)$
- o plano PQV é definido pela equação $6x + z - 12 = 0$

Seja A um ponto pertencente ao plano QRS

Sabe-se que:

- o ponto A tem cota igual ao cubo da abcissa;
- os vetores \vec{OA} e \vec{TQ} são perpendiculares.

Determine a abcissa do ponto A , recorrendo à calculadora gráfica.



Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver a equação, devidamente identificado(s) (sugere-se a utilização da janela de visualização em que $x \in [-4,4]$ e $y \in [-2,7]$);
- apresente a abcissa do ponto A arredondada às centésimas.

Exame – 2015, 2ª Fase

14. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(0,0,2)$ e $B(4,0,0)$

Seja P o ponto pertencente ao plano xOy tal que:

- a sua abcissa é igual à abcissa do ponto B
- a sua ordenada é positiva;
- $B\hat{A}P = \frac{\pi}{3}$

Determine a ordenada do ponto P

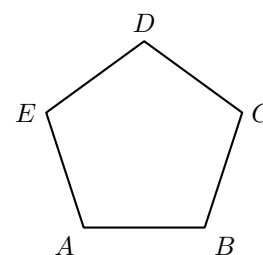
Exame – 2015, 1ª Fase

15. Na figura ao lado, está representado um pentágono regular $[ABCDE]$

Sabe-se que $\overline{AB} = 1$

Mostre que $\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{\|\vec{AD}\|} = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Nota: $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ designa o produto escalar do vetor \vec{AB} pelo vetor \vec{AD}



Exame – 2014, 2ª Fase

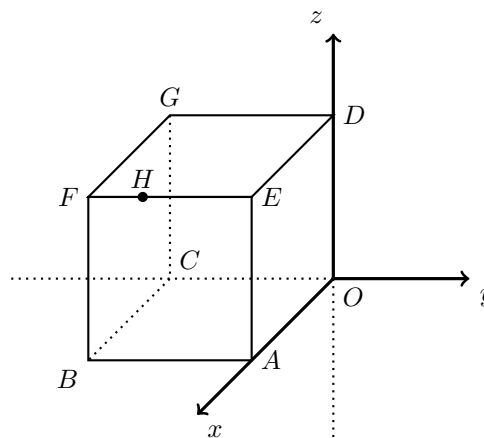


16. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[OABCDEFG]$, de aresta 3

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox
- o ponto C pertence ao semieixo negativo Oy
- o ponto D pertence ao semieixo positivo Oz
- o ponto H tem coordenadas $(3, -2, 3)$

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AHC
 Determine o valor exato de $\sin^2 \alpha$, sem utilizar a calculadora.

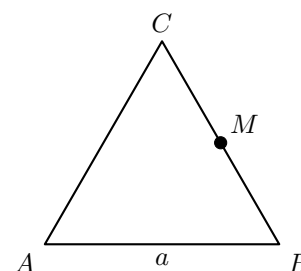


Exame – 2014, 1ª Fase

17. Na figura ao lado, está representado um triângulo equilátero $[ABC]$
 Seja a o comprimento de cada um dos lados do triângulo.
 Seja M o ponto médio do lado $[BC]$

Mostre que $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = \frac{3a^2}{4}$

Nota: $\vec{AB} \cdot \vec{AM}$ designa o produto escalar do vetor \vec{AB} pelo vetor \vec{AM}



Teste Intermédio 11º ano – 11.03.2014

18. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere um ponto P que tem ordenada igual a -4 e cota igual a 1
 Considere também o vetor \vec{u} de coordenadas $(2, 3, 6)$

Sabe-se que os vetores \vec{OP} e \vec{u} são perpendiculares.

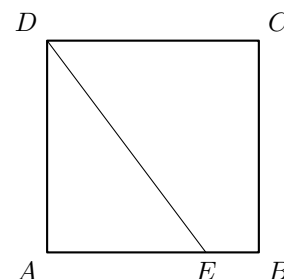
Qual é a abcissa do ponto P ?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Teste Intermédio 11º ano – 06.03.2013

19. Na figura ao lado, está representado um quadrado $[ABCD]$ de lado igual a 4
 Admita que o ponto E pertence ao segmento $[AB]$ e que o triângulo $[ADE]$ tem área igual a 6

Determine o valor exato de $\vec{ED} \cdot \vec{DC}$, sem recorrer à calculadora.



Teste Intermédio 11º ano – 06.03.2013



20. No referencial o.n. xOy da figura ao lado, estão representados o quadrado $[OABC]$ e o retângulo $[OPQR]$

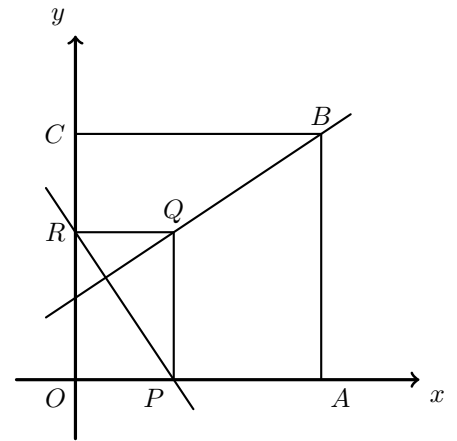
Os pontos A e P pertencem ao semieixo positivo Ox e os pontos C e R pertencem ao semieixo positivo Oy

O ponto Q pertence ao interior do quadrado $[OABC]$

Sabe-se que:

- $\overline{OA} = a$
- $\overline{OP} = b$
- $\overline{RC} = b$

Prove que as retas QB e RP são perpendiculares.



Teste Intermédio 11º ano – 09.02.2012

21. De um triângulo isósceles $[ABC]$ sabe-se que:

- os lados iguais são $[AB]$ e $[AC]$, tendo cada um deles 8 unidades de comprimento;
- cada um dos dois ângulos iguais tem 30° de amplitude.

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$?

- (A) $-32\sqrt{3}$ (B) -32 (C) 64 (D) $64\sqrt{3}$

Teste Intermédio 11º ano – 27.01.2011

22. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[VNOPQURST]$, que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

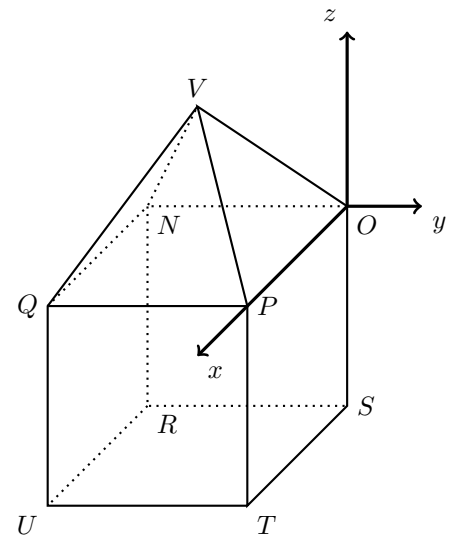
Sabe-se que:

- a base da pirâmide coincide com a face superior do cubo e está contida no plano xOy
- o ponto P pertence ao eixo Ox
- o ponto U tem coordenadas $(4, -4, -4)$

Considere um ponto A , com a mesma abcissa e com a mesma ordenada do ponto U

Sabe-se que $\overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{OA} = 8$

Determine a cota do ponto A



Teste Intermédio 11º ano – 27.01.2011

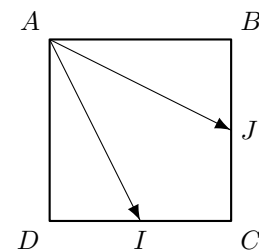
23. Na figura ao lado, está representado o quadrado $[ABCD]$

Sabe-se que:

- o ponto I é o ponto médio do lado $[DC]$
- o ponto J é o ponto médio do lado $[BC]$

Prove que $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \|\overrightarrow{AB}\|^2$

Sugestão: comece por exprimir cada um dos vectores \overrightarrow{AI} e \overrightarrow{AJ} como soma de dois vectores.



Teste Intermédio 11º ano – 27.01.2011



24. Seja $[AB]$ um diâmetro de uma esfera de centro C e raio 4

Qual é o valor do produto escalar $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$?

- (A) 16 (B) -16 (C) $4\sqrt{2}$ (D) $-4\sqrt{2}$

Teste Intermédio 11º ano – 06.05.2010
Teste Intermédio 11º ano – 07.05.2009 (adaptado)

25. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. xOy , a circunferência de equação

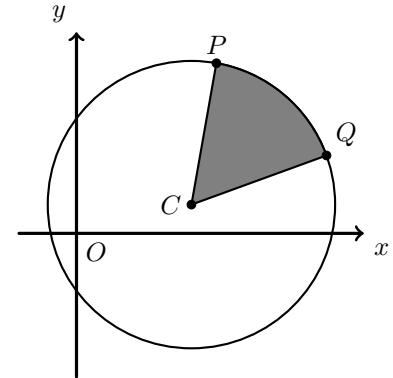
$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

O ponto C é o centro da circunferência.

P e Q são dois pontos da circunferência.

A área da região sombreada é $\frac{25\pi}{6}$

Determine o valor do produto escalar $\vec{CP} \cdot \vec{CQ}$



Teste Intermédio 11º ano – 27.01.2010

26. Na figura seguinte, está representada uma circunferência de centro O e raio r

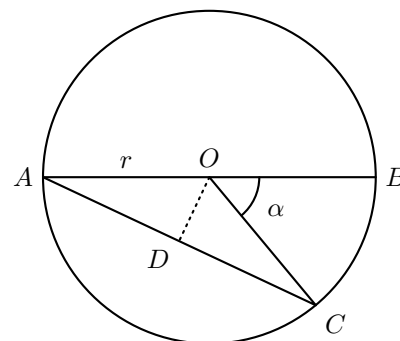
Sabe-se que:

- $[AB]$ é um diâmetro da circunferência
- o ponto C pertence à circunferência
- α é a amplitude do ângulo COB
- $[OD]$ é perpendicular a $[AC]$

Prove que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4r^2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Sugestão: Percorra as seguintes etapas:

- Justifique que o triângulo $[OAC]$ é isósceles
- Justifique que $\overline{AC} = 2\overline{AD}$
- Justifique que a amplitude do ângulo CAB é $\frac{\alpha}{2}$
- Escreva \overline{AD} , em função de $\frac{\alpha}{2}$ e de r
- Conclua que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4r^2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$



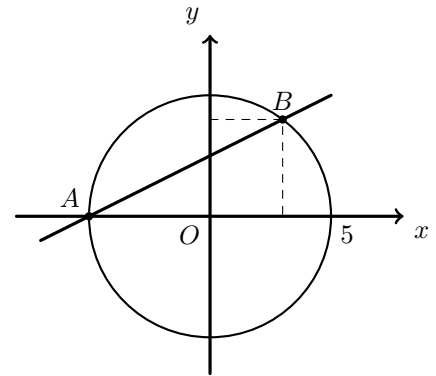
Teste Intermédio 11º ano – 29.01.2009



27. Na figura ao lado estão representadas, em referencial o.n. xOy , uma reta AB e uma circunferência com centro na origem e raio igual a 5

Os pontos A e B pertencem à circunferência.
 O ponto A também pertence ao eixo das abcissas.
 O ponto B tem coordenadas $(3,4)$

Seja C o ponto de coordenadas $(-3,16)$
 Verifique que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B



Teste Intermédio 11º ano – 24.01.2008

28. Na figura ao lado está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cubo $[OPQRSTUVWXYZ]$ de aresta 5

O vértice O do cubo coincide com a origem do referencial.

Os vértices P , R e S do cubo pertencem aos semieixos positivos Ox , Oy e Oz , respetivamente.

O triângulo escaleno $[MNQ]$ é a secção produzida no cubo pelo plano α de equação

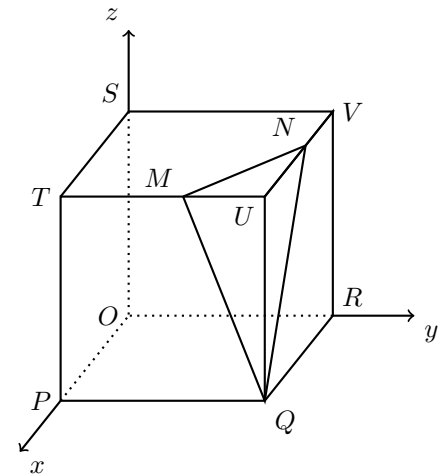
$$10x + 15y + 6z = 125$$

Seja β a amplitude, em **graus**, do ângulo MQN . Determine β

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Sugestão: comece por determinar as coordenadas dos pontos M e N



Teste Intermédio 11º ano – 24.01.2008

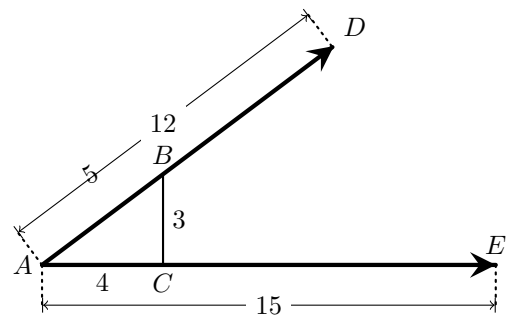
29. Na figura ao lado estão representados dois vetores, \vec{AD} e \vec{AE} , de normas 12 e 15, respetivamente.

No segmento de reta $[AD]$ está assinalado um ponto B
 No segmento de reta $[AE]$ está assinalado um ponto C

O triângulo é retângulo $[ABC]$ e os seus lados têm 3, 4 e 5 unidades de comprimento.

Indique o valor do produto escalar $\vec{AD} \cdot \vec{AE}$

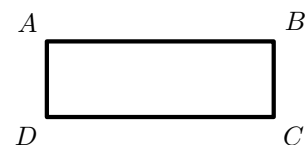
- (A) 108 (B) 128 (C) 134 (D) 144



Teste Intermédio 11º ano – 10.05.2007

30. Na figura ao lado está representado um retângulo $[ABCD]$

Mostre que o produto escalar $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ é igual a \overline{AB}^2



Teste Intermédio 11º ano – 19.05.2006



31. Na figura ao lado estão representados, em referencial o. n. $Oxyz$, um prisma e uma pirâmide quadrangulares regulares, com a mesma altura.

A base do prisma, que coincide com a base da pirâmide, está contida no plano xOy .

O vértice P pertence ao eixo Ox .

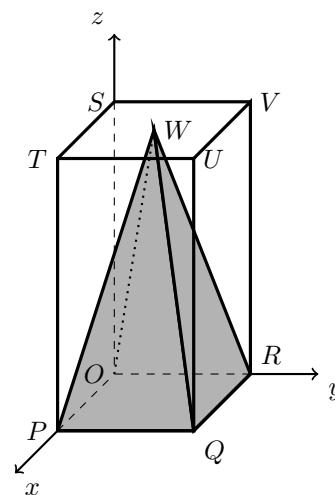
O vértice R pertence ao eixo Oy .

O vértice S pertence ao eixo Oz .

O vértice U tem coordenadas $(2,2,4)$.

Calcule a amplitude do ângulo WQV . Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.



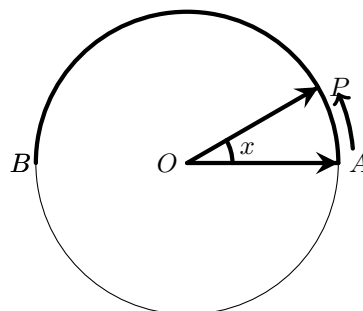
Exame – 2001, Ép. especial (cód. 135)

32. Na figura seguinte está representada uma circunferência de centro O e raio 1. Os pontos A e B são extremos de um diâmetro da circunferência.

Considere que um ponto P , partindo de A , se desloca sobre o arco AB , terminando o seu percurso em B .

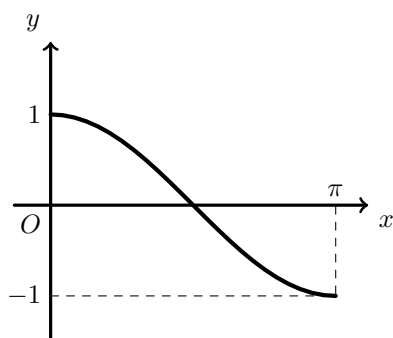
Para cada posição do ponto P , seja x a amplitude, em radianos, do ângulo AOP .

Seja f a função que, a cada valor de $x \in [0, \pi]$, faz corresponder o valor do produto escalar $\vec{OA} \cdot \vec{OP}$.

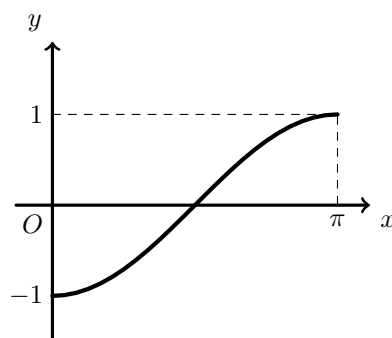


Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função f ?

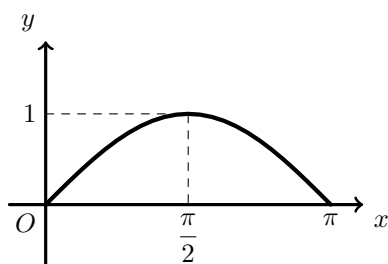
(A)



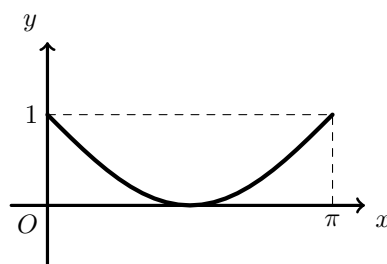
(B)



(C)



(D)



Exame – 2001, Prova para militares (cód. 435)

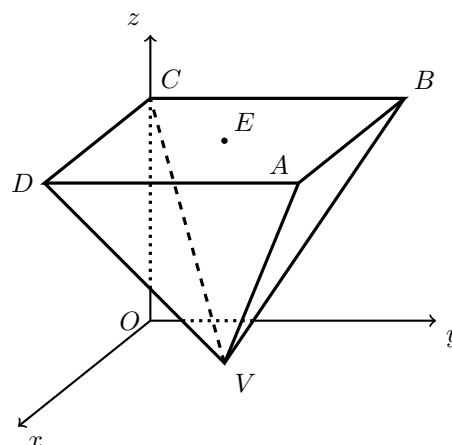


33. Considere um vetor \vec{AB} tal que $\|\vec{AB}\| = 1$
 Qual é o valor do produto escalar $\vec{AB} \cdot \vec{BA}$?
- (A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) 2

Exame – 2001, Prova Modelo (cód. 135)
 Exame – 2000, 2ª Fase (cód. 135)

34. Na figura ao lado está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular.

- A base da pirâmide é paralela ao plano xOy
- O ponto A tem coordenadas $(8,8,7)$
- O ponto B pertence ao plano yOz
- O ponto C pertence ao eixo Oz
- O ponto D pertence ao plano xOz
- O ponto E é o centro da base da pirâmide
- O vértice V da pirâmide pertence ao plano xOy



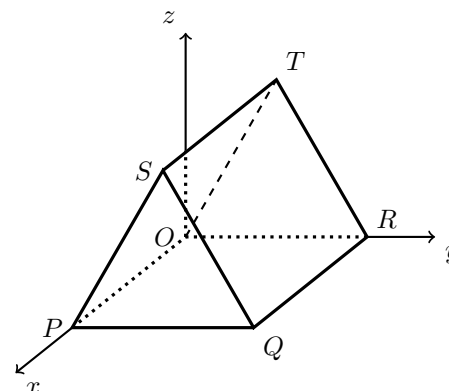
Determine a amplitude do ângulo DVB
 Apresente o resultado em graus, com aproximação à décima de grau.

Exame – 2000, Ép. Especial (setembro) (cód. 135)
 Exame – 1999, Prova de reserva (cód. 135)

35. Na figura ao lado está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, um prisma triangular regular.

Sabe-se que:

- O vértice O coincide com a origem do referencial
- O vértice P pertence ao semieixo positivo Ox
- O vértice R pertence ao semieixo positivo Oy
- O segmento $[QR]$ tem comprimento 6



Indique, justificando, o valor do produto escalar $\vec{TS} \cdot \vec{TR}$

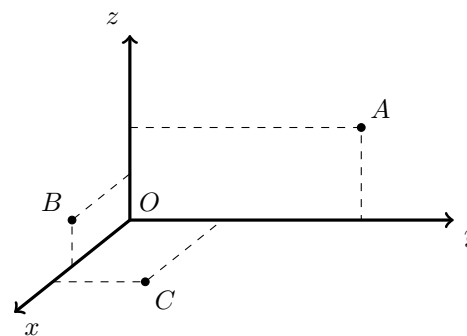
Exame – 2000, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 135)

36. Na figura seguinte estão representados três pontos, em referencial o.n. $Oxyz$

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(0,5,2)$
- o ponto B pertence ao plano $(3,0,1)$
- o ponto C pertence ao plano $(4,2,0)$

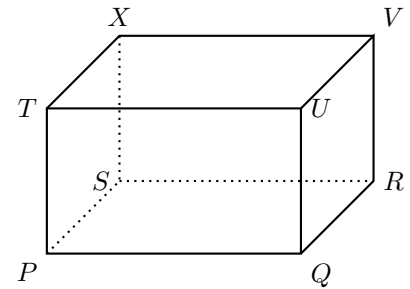
Mostre que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C



Exame – 1999, 2ª fase (cód. 135)



37. Na figura ao lado está representado um paralelepípedo retângulo $[PQRSTUVX]$



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $\vec{TP} \cdot \vec{QU} = 0$ (B) $\vec{UQ} \cdot \vec{TX} = 0$
 (C) $\vec{PQ} \cdot \vec{TU} = 0$ (D) $\vec{PQ} \cdot \vec{PV} = 0$

Exame – 1999, 1ª Fase - 2ª Chamada (cód. 135)

38. De dois vetores \vec{p} e \vec{q} sabe-se que têm ambos norma igual a 3 e que $\vec{p} \cdot \vec{q} = -9$ ($\vec{p} \cdot \vec{q}$ designa o produto escalar de \vec{p} por \vec{q}).

Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira.

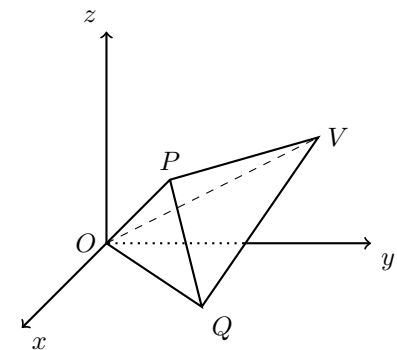
- (A) $\vec{p} + \vec{q} = \vec{0}$ (B) $\vec{p} - \vec{q} = \vec{0}$ (C) $\vec{p} \perp \vec{q}$ (D) O ângulo dos vetores \vec{p} e \vec{q} é agudo

Exame – 1998, Prova para militares (cód. 135)

39. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide triangular não regular $[OPQV]$

Tem-se que:

- O vértice O da pirâmide é a origem do referencial
- O vértice V tem coordenadas $(0,4,2)$
- O ponto P tem coordenadas $(2,2,2)$
- O ponto Q tem coordenadas $(3,3,0)$
- Uma equação do plano OPQ é $x - y = 0$
- Uma equação do plano PQV é $x + y + z = 6$
- Uma equação do plano OPV é $x + y - 2z = 0$

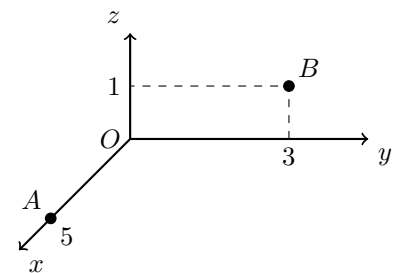


Mostre que o ângulo OPQ é reto.

Exame – 1998, Prova de reserva (cód. 135)

40. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(5,0,0)$ e $B(0,3,1)$

Determine as coordenadas de um ponto C , pertencente ao eixo Oz e de cota positiva, de tal modo que o triângulo $[ABC]$ seja retângulo em C



Exame – 1998, 2ª fase (cód. 135)

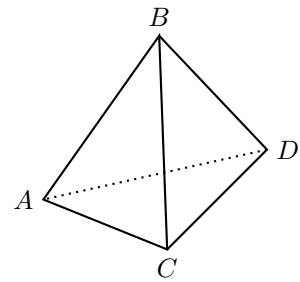


41. Na figura ao lado está representado um tetraedro regular (sólido geométrico com quatro faces, que são todas **triângulos equiláteros**).

- A, B, C e D são os vértices do tetraedro
- $\overline{AB} = 6$

O valor do produto escalar $\vec{BC} \cdot \vec{BD}$ é

- (A) 18 (B) $18\sqrt{2}$ (C) 36 (D) $36\sqrt{2}$



Exame – 1998, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 135)

42. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, um cilindro de revolução como o representado na figura ao lado.

A base inferior do cilindro tem centro na origem O do referencial e está contida no plano xOy

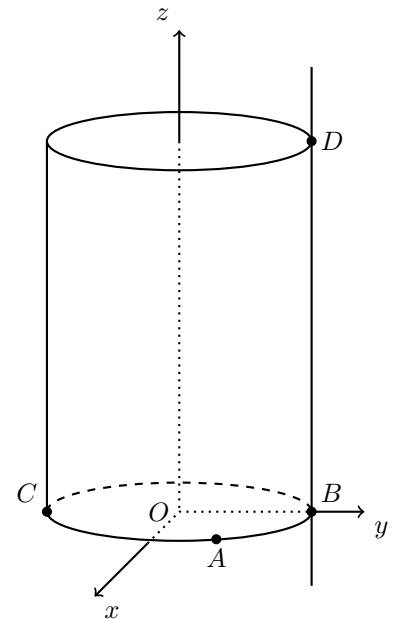
$[BC]$ é um diâmetro da base inferior, contido no eixo Oy .
O ponto C tem coordenadas $(0, -5, 0)$

O ponto A pertence à circunferência que limita a base inferior do cilindro e tem coordenadas $(4, 3, 0)$

A reta r passa no ponto B e é paralela ao eixo Oz

O ponto D pertence à reta r e à circunferência que limita a base superior do cilindro.

Justifique que a reta AC é perpendicular à reta AB



Exame – 1997, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 135)

