

Geometria (11.º ano)

## Produto escalar de vetores

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução



1. Designado por  $d$  a abcissa do ponto  $D$ , ou seja,  $\overline{OD} = d$ , temos que:

- $D(d,0)$
- $C(0, \overline{OC}) = \left(0, \frac{\overline{OA}}{4}\right) = \left(0, \frac{3\overline{OD}}{4}\right) = \left(0, \frac{3d}{4}\right)$
- $E(\overline{CE}, \overline{OC}) = \left(\overline{CB} - \overline{EB}, \frac{3d}{4}\right) = \left(\overline{OA} - \overline{OD}, \frac{3d}{4}\right) = \left(3d - d, \frac{3d}{4}\right) = \left(2d, \frac{3d}{4}\right)$
- $\overrightarrow{DC} = C - D = \left(0, \frac{3d}{4}\right) - (d, 0) = \left(-d, \frac{3d}{4}\right)$
- $\overrightarrow{DE} = E - D = \left(2d, \frac{3d}{4}\right) - (d, 0) = \left(d, \frac{3d}{4}\right)$

Assim, calculando o produto escalar com as coordenadas dos vetores, temos:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = -7 &\Leftrightarrow \left(-d, \frac{3d}{4}\right) \cdot \left(d, \frac{3d}{4}\right) = -7 \Leftrightarrow -d^2 + \frac{9d^2}{16} = -7 \Leftrightarrow -\frac{16d^2}{16} + \frac{9d^2}{16} = -7 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{7d^2}{16} = -7 \Leftrightarrow d^2 = \frac{7 \times 16}{7} \Leftrightarrow d^2 = 16 \Leftrightarrow d = \pm\sqrt{16} \Leftrightarrow d = \pm 4\end{aligned}$$

Como o ponto  $D$  pertence ao semieixo positivo  $Ox$ , então  $d > 0$ , ou seja  $d = 4$ .

E assim, vem que:  $\overline{OA} = 3 \times \overline{OD} = 3 \times d = 3 \times 4 = 12$

Exame – 2023, 2.ª Fase

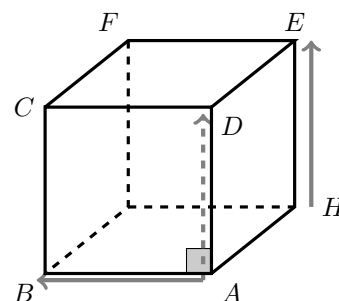
2. Como  $[ABCDEFGH]$  é um cubo, as arestas têm o mesmo comprimento e são todas paralelas ou perpendiculares entre si.

Em particular as arestas  $[AD]$  e  $[HE]$  são paralelas, e  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HE}$

Assim, como as arestas  $[AD]$  e  $[AB]$  são perpendiculares, temos que:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \cos(90^\circ) \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AD}\| = 0 \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AD}\| = 0$$

Resposta: **Opção B**



Exame – 2022, 2.ª Fase

3. Como os pontos  $A$  e  $B$  pertencem ao gráfico de  $f$ , designado por  $a$  a abscissa do ponto  $A$  e por  $B$  a abscissa do ponto  $B$ , temos que as coordenadas destes pontos são  $A(a, a^2)$  e  $B(b, b^2)$ .

Assim, o declive da reta  $r$  (reta  $AB$ ) é dado por:

$$m = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b - a)(b + a)}{(b - a)} = b + a$$

Como o ponto de coordenadas  $(0,1)$  pertence à reta  $r$ , temos que a sua equação é:  $y = (b + a)x + 1$ .

Temos ainda que, como o ponto  $A$  pertence à reta  $r$ , as suas coordenadas verificam a equação da reta:

$$a^2 = (b + a)(a) + 1 \Leftrightarrow a^2 = ab + a^2 + 1 \Leftrightarrow a^2 - a^2 - ab = 1 \Leftrightarrow -ab = 1 \Leftrightarrow ab = -1$$

Determinando as coordenadas dos vetores  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ , temos:

- $\overrightarrow{OA} = A - O = (a, a^2) - (0, 0) = (a, a^2)$
- $\overrightarrow{OB} = B - O = (b, b^2) - (0, 0) = (b, b^2)$

E assim, calculado o produto escalar, temos:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (a, a^2) \cdot (b, b^2) = a \times b + a^2 \times b^2 = ab + (ab)^2 = -1 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0$$

Como  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ , então o ângulo  $AOB$  é reto.

Exame – 2022, 2.ª Fase

4. Como a circunferência tem raio 3, o respetivo perímetro é  $2 \times \pi \times 3 = 6\pi$

Assim, o comprimento do arco  $AB$  é  $2\pi$ , a amplitude do ângulo  $ACB$  é:

$$\frac{A\hat{C}B}{2\pi} = \frac{2\pi}{2\pi \times 3} \Leftrightarrow A\hat{C}B = \frac{2\pi \times 2\pi}{6\pi} \Leftrightarrow A\hat{C}B = \frac{4\pi}{6} \Leftrightarrow A\hat{C}B = \frac{2\pi}{3}$$

Desta forma, como ambos os vetores têm norma 3, recorrendo à fórmula do produto escalar, vem:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \cos(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}) \times \|\overrightarrow{CA}\| \times \|\overrightarrow{CB}\| = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \times 3 \times 3 = -\frac{1}{2} \times 9 = -\frac{9}{2}$$

Exame – 2022, 1.ª Fase



5. Como as coordenadas do ponto  $B$  são  $(0,2,4)$ , o vetor  $\vec{OB}$  tem as mesmas coordenadas, pelo que as coordenadas do vetor  $\vec{BO}$  são:

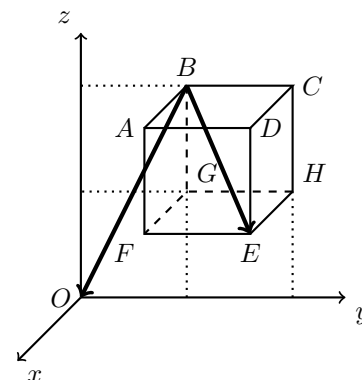
$$\vec{BO} = -\vec{OB} = -(0,2,4) = (0, -2, -4)$$

E a sua norma é:

$$\|\vec{BO}\| = \|\vec{OB}\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

Calculando a norma do vetor  $\vec{BE}$ , temos:

$$\|\vec{BE}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4 + 4} = \sqrt{12}$$



Como o ângulo  $OBE$  é o ângulo formado pelos vetores  $\vec{BO}$  e  $\vec{BE}$ , podemos determinar a sua amplitude a partir do respetivo produto escalar:

$$\cos(\vec{BO} \cdot \vec{BE}) = \frac{\vec{BO} \cdot \vec{BE}}{\|\vec{BO}\| \times \|\vec{BE}\|} = \frac{(0, -2, -4) \cdot (2, 2, -2)}{\sqrt{20} \times \sqrt{12}} = \frac{-4 + 8}{\sqrt{20} \times \sqrt{12}} = \frac{4}{\sqrt{240}}$$

Logo, a amplitude do ângulo  $OBE$ , em graus, arredondado às unidades, é

$$O\hat{B}E = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{240}}\right) \approx 75^\circ$$

Exame – 2020, Ép. especial

6. Calculando as coordenadas do vetor  $\vec{AV}$ , e a sua norma:

$$\vec{AV} = V - A = (3, -1, 2) - (2, 1, 0) = (1, -2, 2)$$

$$\|\vec{AV}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

Calculando as coordenadas do vetor  $\vec{AC}$ , e a sua norma:

$$\vec{AC} = C - A = (0, -1, 2) - (2, 1, 0) = (-2, -2, 2)$$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4 + 4 + 4} = \sqrt{12}$$

Recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos(\vec{AV} \cdot \vec{AC}) = \frac{\vec{AV} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AV}\| \times \|\vec{AC}\|} = \frac{(1, -2, 2) \cdot (-2, -2, 2)}{3\sqrt{12}} = \frac{-2 + 4 + 4}{3\sqrt{12}} = \frac{6}{3\sqrt{12}} = \frac{2}{\sqrt{12}}$$

Logo, a amplitude do ângulo  $VAC$ , em graus, arredondado às unidades, é

$$V\hat{A}C = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{12}}\right) \approx 55^\circ$$

Exame – 2019, 1.ª Fase



7. Como o ponto  $R$  pertence ao semieixo negativo das ordenadas, tem coordenadas da forma  $(0, y_R, 0)$ , com  $y_R \in \mathbb{R}^-$ . Assim, fazendo a substituição na equação da superfície esférica, podemos calcular o valor de  $y_R$ :

$$0^2 + y_R^2 + 0^2 = 3 \Leftrightarrow 0 + y_R^2 + 0 = 3 \Leftrightarrow y_R = \pm\sqrt{3}$$

Como  $y_R \in \mathbb{R}^-$ , as coordenadas do do ponto  $R$  são  $(0, -\sqrt{3}, 0)$ .

Assim temos que, como  $O$  é a origem do referencial  $\vec{OR} = (0, -\sqrt{3}, 0)$  e  $\vec{OP} = (1, 1, 1)$ , pelo que:

- $\|\vec{OR}\| = \sqrt{0^2 + (-\sqrt{3})^2 + 0^2} = \sqrt{0 + 3 + 0} = \sqrt{3}$
- $\|\vec{OP}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$

Logo, recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos(\vec{OR}\vec{OP}) = \frac{\vec{OR} \cdot \vec{OP}}{\|\vec{OR}\| \times \|\vec{OP}\|} = \frac{(0, -\sqrt{3}, 0) \cdot (1, 1, 1)}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{0 - \sqrt{3} + 0}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Logo, a amplitude do ângulo  $ROP$ , em graus, arredondado às unidades, é:

$$R\hat{O}P = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 125^\circ$$

Exame – 2018, Ép. especial

8. Como a superfície esférica tem de equação

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 10 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - (-1))^2 = 10$$

As coordenadas do centro são  $C(1, 2, -1)$ , pelo que as coordenadas do ponto  $A$  são  $(1, 2, 1)$

Assim temos que, como  $O$  é a origem do referencial  $\vec{OA} = (1, 2, 1)$  e  $\vec{OC} = (1, 2, -1)$ , pelo que:

- $\|\vec{OA}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$
- $\|\vec{OC}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$

E assim, recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos(\vec{OA}\vec{OC}) = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OC}}{\|\vec{OA}\| \times \|\vec{OC}\|} = \frac{(1, 2, 1) \cdot (1, 2, -1)}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{1 + 4 - 1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Logo, a amplitude do ângulo  $AOC$ , em graus, arredondado às unidades, é:

$$A\hat{O}C = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48^\circ$$

Exame – 2018, 2.ª Fase



9. Como os segmentos de reta  $[QP]$  e  $[QR]$  são lados consecutivos de um hexágono regular de lado 4, então temos que:

$$\|\vec{QP}\| = \|\vec{QR}\| = 4$$

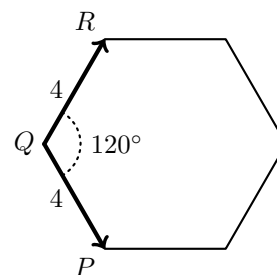
Como os hexágonos regulares podem ser decompostos em seis triângulos equiláteros, cada ângulo interno do hexágono regular tem o dobro da amplitude dos ângulos internos de um triângulo equilátero, ou seja,

$$\widehat{B\hat{A}C} = 2 \times 60 = 120^\circ$$

Assim, vem que:

$$\vec{QP} \cdot \vec{QR} = \cos(\widehat{PQR}) \times \|\vec{QP}\| \times \|\vec{QR}\| = \cos(120^\circ) \times 4 \times 4 = -\cos(60^\circ) \times 16 = -\frac{1}{2} \times 16 = -\frac{16}{2} = -8$$

Exame – 2018, 1.ª Fase



10. Como para qualquer ponto  $P$  da circunferência de diâmetro  $[RS]$  o ângulo  $RPQ$  é reto, então para qualquer ponto  $P$  da circunferência, temos que:

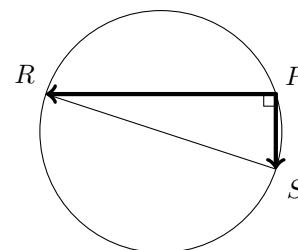
$$\vec{PR} \cdot \vec{PS} = 0$$

Temos ainda que:

- para qualquer ponto  $P$  no interior da circunferência o ângulo  $RPQ$  é obtuso, vem que  $\vec{PR} \cdot \vec{PS} > 0$
- para qualquer ponto  $P$  no exterior da circunferência o ângulo  $RPQ$  é agudo, vem que  $\vec{PR} \cdot \vec{PS} < 0$

Desta forma, o conjunto  $A$  dos pontos  $P$  tais que  $\vec{PR} \cdot \vec{PS} = 0$ , é a circunferência de diâmetro  $[RS]$

Resposta: **Opção D**



Exame – 2017, Ép. especial

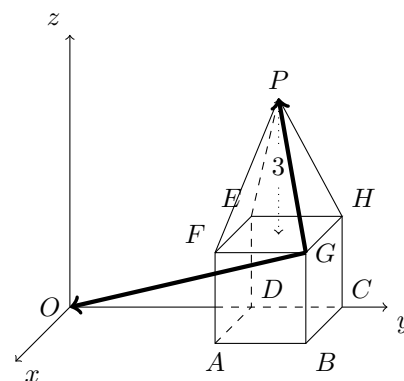


11. Como a base do cubo é um quadrado de lado 2 ( $\overline{AD} = 2$ ), temos que a área da base é:

$$A_{[EFGH]} = \overline{AD}^2 = 2^2 = 4$$

Como o volume da pirâmide é 4, então calculando a altura  $h$  da pirâmide, temos:

$$\begin{aligned} V_{[ABCDEFGHP]} &= \frac{1}{3} \times A_{[EFGH]} \times h \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4 &= \frac{1}{3} \times 4 \times h \Leftrightarrow \frac{4 \times 3}{4} = h \Leftrightarrow h = 3 \end{aligned}$$



Como a cota do ponto  $P$  é superior a 2 e a aresta do cubo é 2, então a cota do ponto  $P$  é

$$z_P = 2 + h = 2 + 3 = 5$$

Como a projeção do ponto  $P$  no plano  $xOy$  é o centro do quadrado  $[ABCD]$ , temos que a abcissa é  $x_P = 1$  e a ordenada é  $y_P = 5$ , pelo que as coordenadas do ponto  $P$  são  $(1,5,5)$

Como as coordenadas do ponto  $G$  são  $(2,6,2)$ , podemos calcular as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{GP}$ , e a sua norma:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GP} &= P - G = (1,5,5) - (2,6,2) = (-1, -1, 3) \\ \|\overrightarrow{GP}\| &= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11} \end{aligned}$$

Como  $O$  é a origem do referencial, podemos calcular as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{GO}$ , e a sua norma:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GO} &= O - G = (0,0,0) - (2,6,2) = (-2, -6, -2) \\ \|\overrightarrow{GO}\| &= \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 36 + 4} = \sqrt{44} \end{aligned}$$

Recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos(\widehat{GPO}) = \frac{\overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{GO}}{\|\overrightarrow{GP}\| \times \|\overrightarrow{GO}\|} = \frac{(-1, -1, 3) \cdot (-2, -6, -2)}{\sqrt{11} \times \sqrt{44}} = \frac{2 + 6 - 6}{\sqrt{11} \times 44} = \frac{2}{\sqrt{484}}$$

Logo, a amplitude do ângulo  $OGP$ , em graus, arredondado às unidades, é

$$O\hat{G}P = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{484}}\right) \approx 85^\circ$$

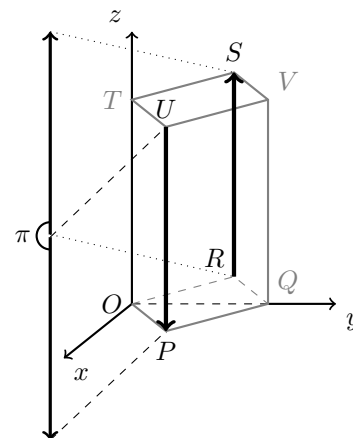


12. Como as arestas  $[UP]$  e  $[RS]$  são arestas laterais do prisma, logo são paralelas, e ambas têm comprimento igual a 3

Assim, como os vetores  $\vec{UP}$  e  $\vec{RS}$  têm a mesma direção e sentidos contrários, pelo que o ângulo por eles formado tem amplitude de  $\pi$  radianos.

Desta forma, o valor do produto escalar  $\vec{UP} \cdot \vec{RS}$  é:

$$\begin{aligned}\vec{UP} \cdot \vec{RS} &= \|\vec{UP}\| \times \|\vec{RS}\| \times \cos(\vec{UP} \wedge \vec{RS}) = \\ &= 3 \times 3 \times \cos \pi = 9 \times (-1) = -9\end{aligned}$$



Exame – 2017, 1.ª Fase

13. Como o ponto  $P$  pertence à aresta  $[BG]$ , pela observação da figura, verificamos que tem abcissa e ordenada iguais aos pontos  $B$  e  $G$ , pelo que as suas coordenadas são:

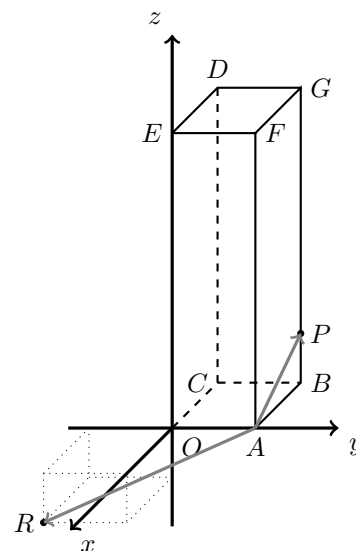
$$P(-2,2,1)$$

Como o ponto  $R$  é simétrico do ponto  $P$  relativamente à origem, tem as três coordenadas simétricas, ou seja, tem as suas coordenadas são:

$$R(2, -2, -1)$$

Podemos determinar a amplitude do ângulo  $RAP$  através do produto escalar dos vetores  $\vec{AP}$  e  $\vec{AR}$ , pelo que, determinando as coordenadas destes vetores e as respetivas normas, temos:

- $\vec{AP} = P - A = (-2, 2, 1) - (0, 2, 0) = (-2, 0, 1)$   
 $\|\vec{AP}\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$
- $\vec{AR} = R - A = (2, -2, -1) - (0, 2, 0) = (2, -4, -1)$   
 $\|\vec{AR}\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 16 + 1} = \sqrt{21}$



Recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos(\vec{AP} \wedge \vec{AR}) = \frac{\vec{AP} \cdot \vec{AR}}{\|\vec{AP}\| \times \|\vec{AR}\|} = \frac{(-2, 0, 1) \cdot (2, -4, -1)}{\sqrt{5} \times \sqrt{21}} = \frac{-4 + 0 - 1}{\sqrt{5} \times \sqrt{21}} = \frac{-5}{\sqrt{105}} = -\frac{5}{\sqrt{105}}$$

Logo, a amplitude do ângulo  $RAP$ , em graus, arredondado às unidades, é

$$R\hat{A}P = \cos^{-1}\left(-\frac{5}{\sqrt{105}}\right) \approx 119^\circ$$

Exame – 2016, Ép. especial



14. Como o ponto  $A$  pertence ao semieixo positivo  $Ox$ , tem ordenada e cota nulas, ou seja as suas coordenadas são:  $A(x_A, 0, 0)$ ,  $x_A \in \mathbb{R}^+$   
 Analogamente, como o ponto  $B$  pertence ao semieixo positivo  $Oy$ , que tem abcissa e cota nulas e as coordenadas são  $B(0, y_B, 0)$ ,  $y_B \in \mathbb{R}^+$   
 Da mesma forma, como o ponto  $P$  pertence ao eixo  $Oz$ , e tem abcissa e ordenadas nulas e ainda cota não nula, as coordenadas são  $P(0, 0, z_P)$ ,  $z_P \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Como um ângulo é agudo se o produto escalar dos vetores que formam esse ângulo for positivo, então o ângulo  $APB$  é agudo se

$$\vec{PA} \cdot \vec{PB} > 0$$

Determinando as coordenadas dos vetores  $\vec{PA}$  e  $\vec{PB}$ , temos:

- $\vec{PA} = A - P = (x_A, 0, 0) - (0, 0, z_P) = (x_A, 0, -z_P)$
- $\vec{PB} = B - P = (0, y_B, 0) - (0, 0, z_P) = (0, y_B, -z_P)$

Logo, o produto escalar dos dois vetores, expressos nas suas coordenadas, é:

$$\vec{PA} \cdot \vec{PB} = (x_A, 0, -z_P) \cdot (0, y_B, -z_P) = x_A \times 0 + 0 \times y_B + (-z_P) \times (-z_P) = 0 + 0 + z_P^2 = z_P^2$$

Como  $z_P$  é um número real, então  $z_P^2 > 0$

Como  $z_P^2 = \vec{PA} \cdot \vec{PB}$ , então  $\vec{PA} \cdot \vec{PB} > 0$ , logo o ângulo  $APB$  é agudo.

Exame – 2016, 2.ª Fase

15. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ , e o triângulo é isósceles ( $\hat{BAC} = \hat{ACB}$ ), podemos determinar a amplitude do ângulo  $CBA$ , ou seja, a amplitude do ângulo formado pelos vetores  $\vec{BA}$  e  $\vec{BC}$ :

$$\hat{CBA} = 180 - 2 \times 75 = 180 - 150 = 30^\circ$$

Desta forma, o valor do produto escalar  $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$  é:

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \|\vec{BA}\| \times \|\vec{BC}\| \times \cos(\hat{BAC}) = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \cos 30^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2016, 1.ª Fase



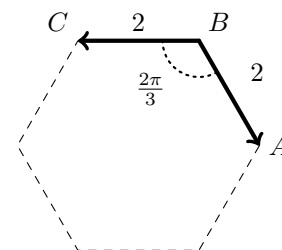


16. Como os segmentos de reta  $[AB]$  e  $[BC]$  são lados consecutivos de um hexágono regular de perímetro 12, temos que

$$\|\vec{BA}\| = \|\vec{BC}\| = \frac{12}{6} = 2$$

Como os hexágonos regulares podem ser decompostos em seis triângulos equiláteros, cada ângulo interno do hexágono regular tem o dobro da amplitude dos ângulos internos de um triângulo equilátero, ou seja,

$$\widehat{BAC} = 2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$



Assim, vem que:

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \cos(\widehat{BAC}) \times \|\vec{BA}\| \times \|\vec{BC}\| = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \times 2 \times 2 = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \times 4 = -\frac{1}{2} \times 4 = -\frac{4}{2} = -2$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2015, Ép. especial

17. Como o ponto  $B$  pertence ao eixo  $Ox$ , tem ordenada e cota nulas, pelo que, podemos determinar a sua abcissa, recorrendo à equação do plano  $\beta$ :

$$2x - y + z - 4 = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0 \Rightarrow 2x - 0 + 0 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

E assim temos as coordenadas do ponto  $B$ ,  $B(2,0,0)$  e podemos calcular as coordenadas do vetor  $\vec{AB}$ , e a sua norma:

$$\vec{AB} = B - A = (2,0,0) - (1,2,3) = (1, -2, -3)$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

Como o ponto  $C$  é o simétrico do ponto  $B$  relativamente ao plano  $yOz$ , tem as mesmas ordenada e cota, e abcissa simétrica, ou seja, as coordenadas do ponto  $C$  são  $C(-2,0,0)$  e podemos calcular as coordenadas do vetor  $\vec{AC}$ , e a sua norma:

$$\vec{AC} = C - A = (-2,0,0) - (1,2,3) = (-3, -2, -3)$$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 4 + 9} = \sqrt{22}$$

Recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\|} = \frac{(1, -2, -3) \cdot (-3, -2, -3)}{\sqrt{14} \times \sqrt{22}} = \frac{-3 + 4 + 9}{\sqrt{14} \times \sqrt{22}} = \frac{10}{\sqrt{308}}$$

Logo, a amplitude do ângulo  $BAC$ , em graus, arredondado às unidades, é

$$\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{308}}\right) \approx 55^\circ$$

Exame – 2015, Ép. especial



18. Como o plano  $QRS$  é o plano de equação  $y = 2$ , as coordenadas dos pontos deste plano, em particular o ponto  $A$ , tem de coordenadas  $A(a,2,c)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}$

Como a cota do ponto  $A$  é o cubo da abscissa ( $c = a^3$ ), temos que as coordenadas do ponto são  $A(a,2,a^3)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

Como  $O$  é a origem do referencial, as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{OA}$ , coincidem com as do ponto  $A$ , ou seja

$$\overrightarrow{OA} = (a, 2, a^3), a \in \mathbb{R}$$

Calculando as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{TQ}$ , recorrendo às coordenadas dos pontos  $T(0,0,2)$  e  $Q(2,2,0)$ , temos que

$$\overrightarrow{TQ} = Q - T = (2, 2, 0) - (0, 0, 2) = (2, 2, -2)$$

Como os vetores  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{TQ}$  são perpendiculares, o seu produto escalar é nulo:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{TQ} = 0 \Leftrightarrow (a, 2, a^3) \cdot (2, 2, -2) = 0 \Leftrightarrow$$

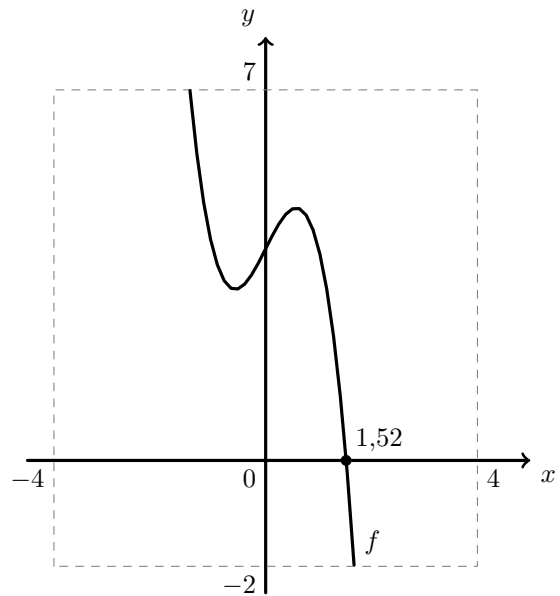
$$\Leftrightarrow 2a + 2 \times 2 - 2a^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2a^3 + 2a + 4 = 0, a \in \mathbb{R}$$

Desta forma, visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função  $f(x) = -2x^3 + 2x + 4$ , na janela de visualização sugerida, (reproduzido na figura ao lado), podemos observar o zero da função.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados dos zeros de uma função, obtemos um valor aproximado da solução da equação, ou seja, a abscissa do ponto  $A$ , cujo valor numérico, aproximado às centésimas, é

$$a \approx 1,52$$



Exame – 2015, 2.ª Fase



19. Como o ponto  $B$  tem de coordenadas  $B(4,0,0)$ , então de acordo com as indicações do enunciado, as coordenadas do ponto  $P$ , são  $(4,b,0)$ ,  $b \in \mathbb{R}^+$  (abscissa 4 porque tem abscissa igual ao ponto  $B$ , e cota zero porque pertence ao eixo  $xOy$ ).

Pelo que,

$$\bullet \vec{AB} = B - A = (4,0,0) - (0,0,2) = (4,0,-2) \text{ e}$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 0 + 4} = \sqrt{20}$$

$$\bullet \vec{AP} = P - A = (4,b,0) - (0,0,2) = (4,b,-2), b \in \mathbb{R}^+ \text{ e}$$

$$\|\vec{AP}\| = \sqrt{4^2 + b^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + b^2 + 4} = \sqrt{20 + b^2}, b \in \mathbb{R}^+$$

$$\bullet \vec{AB} \cdot \vec{AP} = (4,0,-2) \cdot (4,b,-2) = 4 \times 4 + 0 \times b + (-2) \times (-2) = 16 + 0 + 4 = 20$$

Temos ainda que o ângulo  $BAP$  é o ângulo formado pelos vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{AP}$  e que

$$\cos(\vec{AB} \cdot \vec{AP}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Assim, recorrendo à definição de produto escalar, vem que:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AP} = \cos(\vec{AB} \cdot \vec{AP}) \times \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AP}\| \Leftrightarrow 20 = \frac{1}{2} \times \sqrt{20} \times \sqrt{20 + b^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{40}{\sqrt{20}} = \sqrt{20 + b^2} \Rightarrow \left(\frac{40}{\sqrt{20}}\right)^2 = (\sqrt{20 + b^2})^2 \Leftrightarrow \frac{1600}{20} = 20 + b^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 80 = 20 + b^2 \Leftrightarrow 80 - 20 = b^2 \Leftrightarrow \pm\sqrt{60} = b$$

Logo, como a ordenada do ponto  $P$  é positiva, temos que

$$b = \sqrt{60}$$

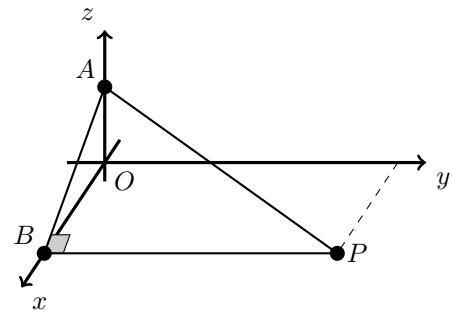
\*\*\* Outra resolução: \*\*\*

Como o ponto  $P$  pertence ao plano  $xOy$  e tem a mesma abscissa, a reta  $BP$  é paralela ao eixo  $Oy$ , e perpendicular ao plano  $xOz$ , pelo que é ortogonal (ou perpendicular a todas as retas contidas no plano, em particular é perpendicular à reta  $AB$

Assim, o ângulo  $ABP$  é reto, e o triângulo  $[ABP]$  é retângulo em  $B$

Como  $\hat{BAP} = \frac{\pi}{3}$ , recorrendo à definição de tangente de um ângulo, temos que

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}}$$



Como,  $\overline{AB} = 2\sqrt{5}$  (ver cálculos no item anterior), e  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ , temos que

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{\overline{BP}}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow 2\sqrt{5} \times \sqrt{3} = \overline{BP} \Leftrightarrow 2\sqrt{15} = \overline{BP}$$

Logo, como o ponto  $P$  tem ordenada positiva (e a mesma abscissa que o ponto  $B$  e pertence ao plano  $xOy$ ), temos que as coordenadas do ponto  $P$  são  $(4, y_P, 0)$  e

$$y_P = 2\sqrt{15}$$



20. Como o ponto  $A$ , pertence ao eixo  $Ox$  e o cubo tem aresta 3, temos que  $A(3,0,0)$  e podemos calcular as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{HA}$ , e a sua norma:

$$\overrightarrow{HA} = A - H = (3,0,0) - (3, -2,3) = (0, -(-2), -3) = (0,2, -3)$$

$$\|\overrightarrow{HA}\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Da mesma forma, como o ponto  $C$ , pertence ao eixo  $Oy$  e o cubo tem aresta 3, temos que  $C(0, -3,0)$  e podemos calcular as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{HC}$ , e a sua norma:

$$\overrightarrow{HC} = C - H = (0, -3,0) - (3, -2,3) = (-3, -3+2, -3) = (-3, -1, -3)$$

$$\|\overrightarrow{HC}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+1+9} = \sqrt{19}$$

Podemos ainda calcular o produto escalar  $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC}$ :

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = (0,2, -3) \cdot (-3, -1, -3) = 0 \times (-3) + 2 \times (-1) + (-3) \times (-3) = 0 - 2 + 9 = 7$$

E assim, temos que  $\alpha$  é o ângulo formado pelos vetores  $\overrightarrow{HA}$  e  $\overrightarrow{HC}$ , pelo que, recorrendo à fórmula do produto escalar, vem que:

$$\cos(\alpha) = \cos(\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC}) = \frac{\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC}}{\|\overrightarrow{HA}\| \times \|\overrightarrow{HC}\|} = \frac{7}{\sqrt{13} \times \sqrt{19}} = \frac{7}{\sqrt{247}}$$

Pela fórmula fundamental da Trigonometria, temos que

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

Logo temos que o valor exato de  $\text{sen}^2 \alpha$  é

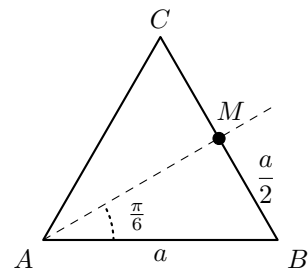
$$\text{sen}^2 \alpha = 1 - \left(\frac{7}{\sqrt{247}}\right)^2 = 1 - \frac{7^2}{247} = \frac{247}{247} - \frac{49}{247} = \frac{198}{247}$$

Exame - 2014, 1.ª Fase

21. Como  $M$  é o ponto médio do lado  $[BC]$ , e o triângulo é equilátero, temos que  $\overline{BM} = \frac{a}{2}$ , e como o triângulo  $[ABM]$  é retângulo em  $M$ , podemos determinar  $\overline{AM}$ :

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{AM}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Leftrightarrow \overline{AM}^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AM}^2 = \frac{4a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \overline{AM}^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow \overline{AM} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$



Como as alturas de um triângulo equilátero bisetam os ângulos internos do triângulo, temos que  $\widehat{BAM} = \frac{\pi}{6}$

Assim, vem que:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AM}\| \times \cos(\widehat{BAM}) = a \times \frac{\sqrt{3}a}{2} \times \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3})^2 a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

Teste Intermédio 11.º ano - 11.03.2014



22. Como as coordenadas do ponto  $P$  são  $(x_P, -4, 1)$ , as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{OP}$ , são:

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (x_P, -4, 1) - (0, 0, 0) = (x_P, -4, 1)$$

Como os  $\overrightarrow{OP}$  e  $\vec{u}$  são perpendiculares, então o respetivo produto escalar é nulo, pelo que podemos calcular a abcissa do ponto  $P$ :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \vec{u} = 0 &\Leftrightarrow (x_P, -4, 1) \cdot (2, 3, 6) = 0 \Leftrightarrow 2x_P - 4 \times 3 + 1 \times 6 = 0 \Leftrightarrow 2x_P - 12 + 6 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x_P - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x_P = 6 \Leftrightarrow x_P = \frac{6}{2} \Leftrightarrow x_P = 3 \end{aligned}$$

Resposta: **Opção C**

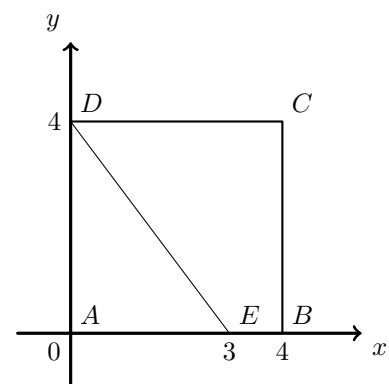
Teste Intermédio 11.º ano – 06.03.2013

23. Como o quadrado tem lado 4 ( $\overline{AD} = 4$ ) e o triângulo  $[ADE]$  tem área 6, podemos determinar a valor de  $\overline{AE}$ :

$$A = 6 \Leftrightarrow \frac{\overline{AE} \times \overline{AD}}{2} = 6 \Leftrightarrow \frac{\overline{AE} \times 4}{2} = 6 \Leftrightarrow \overline{AE} = \frac{6 \times 2}{4} \Leftrightarrow \overline{AE} = 3$$

Assim, considerando o quadrado (e o triângulo) num referencial o.n.  $xOy$ , em que a origem coincide com o ponto  $A$  e em que os lados estão sobre os eixos coordenados - como na figura ao lado - podemos identificar as coordenadas dos pontos  $C$ ,  $D$  e  $E$ , e calcular as coordenadas dos vetores  $\overrightarrow{ED}$  e  $\overrightarrow{DC}$ :

- $C(4,4)$
- $D(0,4)$
- $E(3,0)$
- $\overrightarrow{ED} = D - E = (0,4) - (3,0) = (-3,4)$
- $\overrightarrow{DC} = C - D = (4,4) - (0,4) = (4,0)$



Assim, temos que:

$$\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{DC} = (-3,4) \cdot (4,0) = -3 \times 4 + 4 \times 0 = -12 + 0 = -12$$

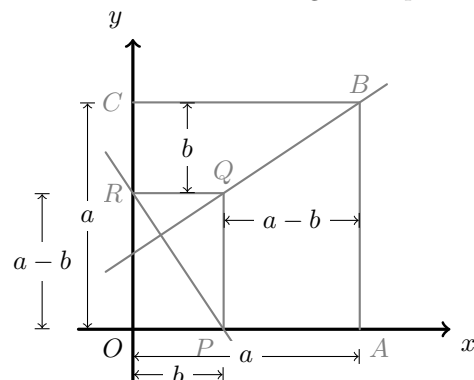
Teste Intermédio 11.º ano – 06.03.2013

24. De acordo com os comprimentos indicados, podemos escrever as coordenadas dos seguintes pontos:

- $P(b,0)$
- $R(0,a-b)$
- $B(a,a)$
- $Q(b,a-b)$

Determinando as coordenadas dos vetores  $\overrightarrow{PR}$  e  $\overrightarrow{QB}$ , temos:

- $\overrightarrow{QB} = B - Q = (a,a) - (b,a-b) = (a-b, a - (a-b)) = (a-b, a - a + b) = (a-b, b)$
- $\overrightarrow{RP} = P - R = (b,0) - (0,a-b) = (b, -a+b)$



Calculando o valor do produto escalar, temos:

$$\overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{RP} = (a-b, b) \cdot (b, -a+b) = (a-b) \times b + b \times (-a+b) = ab - b^2 + (-ab) + b^2 = b^2 - b^2 + ab - ab = 0$$

E assim podemos concluir que, como  $\overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{RP} = 0$ , então os vetores  $\overrightarrow{QB}$  e  $\overrightarrow{RP}$  têm direções perpendiculares, ou seja, as retas  $QB$  e  $RP$  são perpendiculares.

Teste Intermédio 11.º ano – 09.02.2012

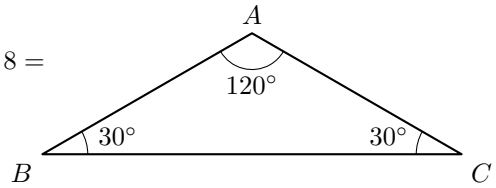


25. Como os ângulos iguais (opostos aos lados iguais) tem  $30^\circ$  de amplitude, temos que:

$$C\hat{A}B + A\hat{B}C + B\hat{C}A = 180 \Leftrightarrow C\hat{A}B + 30 + 30 = 180 \Leftrightarrow C\hat{A}B = 180 - 60 \Leftrightarrow C\hat{A}B = 120^\circ$$

Assim, vem que:

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= \cos(\widehat{BAC}) \times \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| = \cos(90^\circ + 30^\circ) \times 8 \times 8 = \\ &= -\sin(30^\circ) \times 64 = -\frac{1}{2} \times 64 = -\frac{64}{2} = -32 \end{aligned}$$



Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2011

26. Verificando que o ponto  $T$  pertence ao plano  $xOz$ , e designado por  $z_A$  a cota do ponto  $A$ , podemos escrever as coordenadas dos pontos  $O$ ,  $T$  e  $A$ , e dos vetores  $\vec{OT}$  e  $\vec{OA}$ :

- $O(0,0,0)$
- $T(4,0,-4)$
- $A(4,-4,z_A)$
- $\vec{OT} = T - O = (4,0,-4) - (0,0,0) = (4,0,-4)$
- $\vec{OA} = A - O = (4,-4,z_A) - (0,0,0) = (4,-4,z_A)$

Assim, determinando o valor de  $z_A$ , temos que:

$$\begin{aligned} \vec{OT} \cdot \vec{OA} = 8 &\Leftrightarrow (4,0,-4) \cdot (4,-4,z_A) = 8 \Leftrightarrow 4 \times 4 + 0 \times (-4) - 4 \times z_A = 8 \Leftrightarrow 16 + 0 - 4z_A = 8 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -4z_A = 8 - 16 \Leftrightarrow -4z_A = -8 \Leftrightarrow z_A = \frac{8}{4} \Leftrightarrow z_A = 2 \end{aligned}$$

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2011

27.

$$\begin{aligned} \vec{AI} \cdot \vec{AJ} &\stackrel{(1)}{=} (\vec{AD} + \vec{DI}) \cdot (\vec{AB} + \vec{BJ}) = \vec{AD} \cdot \vec{AB} + \vec{AD} \cdot \vec{BJ} + \vec{DI} \cdot \vec{AB} + \vec{DI} \cdot \vec{BJ} \stackrel{(2)}{=} \\ &= 0 + \vec{AD} \cdot \vec{BJ} + \vec{DI} \cdot \vec{AB} + 0 \stackrel{(3)}{=} \vec{AD} \cdot \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB} \cdot \vec{AB} = \\ &= \|\vec{AD}\| \times \frac{1}{2}\|\vec{AD}\| \times \cos(0) + \|\vec{AB}\| \times \frac{1}{2}\|\vec{AB}\| \times \cos(0) = \frac{1}{2}\|\vec{AD}\|^2 + \frac{1}{2}\|\vec{AB}\|^2 \stackrel{(4)}{=} \\ &= \frac{1}{2}\|\vec{AB}\|^2 + \frac{1}{2}\|\vec{AB}\|^2 = \frac{2}{2}\|\vec{AB}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2 \end{aligned}$$

- (1)  $\vec{AI} = \vec{AD} + \vec{DI}$  e  $\vec{AJ} = \vec{AB} + \vec{BJ}$
- (2) o produto escalar de vetores perpendiculares é nulo e  $\vec{AD} \perp \vec{AB}$  e  $\vec{DI} \perp \vec{BJ}$
- (3)  $\vec{DI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$  e  $\vec{BJ} = \frac{1}{2}\vec{AD}$
- (4) Como  $[ABCD]$  é um quadrado, temos que  $\vec{AB} = \vec{AD}$ , ou seja,  $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AD}\|$

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2011



28. Como  $[AB]$  um diâmetro de uma esfera de centro  $C$ , temos que:

- $\widehat{ACB} = 180^\circ$
- $[CA]$  e  $[CB]$  são raios da esfera

Assim, temos que:

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = \cos(\widehat{ACB}) \times \|\vec{CA}\| \times \|\vec{CB}\| = \cos(180^\circ) \times 4 \times 4 = -1 \times 16 = -16$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 11.º ano – 06.05.2010  
Teste Intermédio 11.º ano – 07.05.2009 (adaptado)

29. Como a área do setor circular é dada por  $A = \frac{\alpha r^2}{2}$ , e o raio da circunferência é 5, podemos determinar a amplitude do ângulo  $\alpha$ , ou seja, do ângulo  $QCP$ :

$$A = \frac{\alpha r^2}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha \times 5^2}{2} = \frac{25\pi}{6} \Leftrightarrow \alpha = \frac{25\pi \times 2}{6 \times 25} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

E assim, temos que:

$$\vec{CP} \cdot \vec{CQ} = \|\vec{CP}\| \times \|\vec{CQ}\| \times \cos(\widehat{PCQ}) = 5 \times 5 \times \cos \frac{\pi}{3} = 25 \times \frac{1}{2} = \frac{25}{2}$$

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2010

30. Percorrendo as etapas da sugestão, temos:

- O triângulo  $[OAC]$  é isósceles, por que os lados  $[OA]$  e  $[OC]$  são ambos raios da circunferência.
- Como  $[OD]$  é perpendicular a  $[AC]$ , então  $[OD]$  é altura do triângulo  $[OAC]$  relativamente à base  $[AC]$ , e como o triângulo é isósceles, a altura relativamente ao lado diferente ( $[AC]$ ) é um eixo de simetria, pelo que  $\overline{AC} = 2\overline{AD}$
- Como o ângulo  $\widehat{CAB}$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $AB$ , tem metade da amplitude do arco. E como a amplitude do arco que é igual à amplitude do ângulo ao centro respetivo, que tem amplitude  $\alpha$ , temos que:

$$\widehat{CAB} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{\widehat{COB}}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

- Como  $[OD]$  é perpendicular a  $[AC]$ , então o triângulo  $[ODA]$  é retângulo e o lado  $[AD]$  é o cateto adjacente ao ângulo  $\widehat{CAB}$  (de amplitude  $\frac{\alpha}{2}$ ) e o lado  $[OA]$  é a hipotenusa (de comprimento  $r$ ), pelo que, pela definição de cosseno, vem que:

$$\cos(\widehat{CAB}) = \frac{\overline{AD}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\overline{AD}}{r} \Leftrightarrow \overline{AD} = r \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

- Como  $[AB]$  é um diâmetro da circunferência,  $\overline{AB} = 2r$ , e como  $\overline{AC} = 2\overline{AD}$ , vem que:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC}) = 2r \times 2 \left(r \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \times \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 4r^2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Teste Intermédio 11.º ano – 29.01.2009



31. Para que o triângulo  $[ABC]$  seja retângulo em  $B$ , então as retas  $AB$  e  $BC$  devem ser perpendiculares ou seja:

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0$$

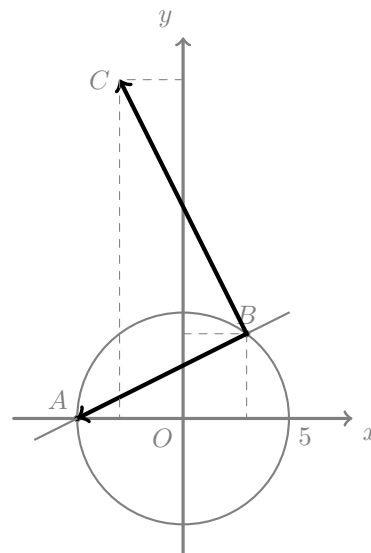
Calculado as coordenadas dos vetores  $\vec{BA}$  e  $\vec{BC}$ , temos:

- $\vec{BA} = A - B = (-5, 0) - (3, 4) = (-8, -4)$
- $\vec{BC} = C - B = (-3, 16) - (3, 4) = (-6, 12)$

Assim, o produto escalar é:

$$\begin{aligned} \vec{BA} \cdot \vec{BC} &= (-8, -4) \cdot (-6, 12) = -8 \times (-6) + (-4) \times 12 = \\ &= 48 - 48 = 0 \end{aligned}$$

Ou seja, as retas  $BA$  e  $BC$  são perpendiculares pelo que o triângulo  $[ABC]$  é retângulo em  $B$



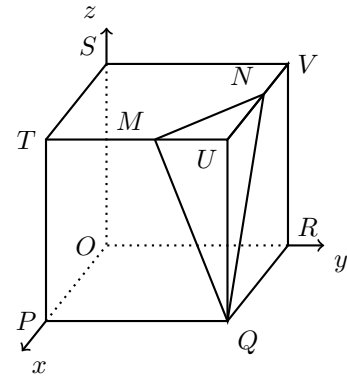
Teste Intermédio 11.º ano – 24.01.2008





32. Como a medida da aresta do cubo é 5, e as faces são paralelas aos eixos coordenados, e como a face plano  $[OPQR]$  pertence ao eixo  $xOy$ , então podemos identificar as coordenadas do ponto  $Q$  e calcular as coordenadas dos pontos  $M$  e  $N$ , e calcular as coordenadas dos vetores  $\overrightarrow{QM}$  e  $\overrightarrow{QN}$  e ainda as respectivas normas:

Como o ponto  $Q$  pertence aos planos de equações  $x = 5$ ,  $y = 5$  e  $z = 0$ , então temos que  $Q(5,5,0)$



- Como o ponto  $M$  pertence aos planos de equações  $x = 5$ ,  $z = 5$  e  $10x + 15y + 6z = 125$ , podemos calcular o valor da ordenada  $y_M$ :

$$10 \times 5 + 15y_M + 6 \times 5 = 125 \Leftrightarrow 15y_M = 125 - 50 - 30 \Leftrightarrow 15y_M = 45 \Leftrightarrow y_M = \frac{45}{15} \Leftrightarrow y_M = 3$$

Ou seja,  $M(5,3,5)$

- Como o ponto  $N$  pertence aos planos de equações  $y = 5$ ,  $z = 5$  e  $10x + 15y + 6z = 125$ , podemos calcular o valor da abcissa  $x_N$ :

$$10x_N + 15 \times 5 + 6 \times 5 = 125 \Leftrightarrow 10x_N = 125 - 75 - 30 \Leftrightarrow 10x_N = 20 \Leftrightarrow x_N = \frac{20}{10} \Leftrightarrow x_N = 2$$

Ou seja,  $N(2,5,5)$

- $\overrightarrow{QM} = M - Q = (5,3,5) - (5,5,0) = (0, -2, 5)$
- $\|\overrightarrow{QM}\| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{0 + 4 + 25} = \sqrt{29}$
- $\overrightarrow{QN} = N - Q = (2,5,5) - (5,5,0) = (-3, 0, 5)$
- $\|\overrightarrow{QN}\| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 0 + 25} = \sqrt{34}$

Finalmente, recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos \beta = \cos(\overrightarrow{QM}, \overrightarrow{QN}) = \frac{\overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{QN}}{\|\overrightarrow{QM}\| \times \|\overrightarrow{QN}\|} = \frac{(0, -2, 5) \cdot (-3, 0, 5)}{\sqrt{29} \times \sqrt{34}} = \frac{0 + 0 + 25}{\sqrt{29} \times \sqrt{34}} = \frac{25}{\sqrt{986}}$$

Logo, o valor de  $\beta$  em graus, arredondado às unidades, é:

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{25}{\sqrt{986}}\right) \approx 37^\circ$$

Teste Intermédio 11.º ano – 24.01.2008

33. Como o triângulo  $[ABC]$  é retângulo, o lado maior ( $[AB]$ ) é a hipotenusa e o lado  $[AC]$  é o cateto adjacente ao ângulo  $CAB$  (ou ao ângulo  $EAD$ ), pelo que, pela definição de cosseno, vem que:

$$\cos(C\hat{A}B) = \frac{\overline{AD}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos(C\hat{A}B) = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \cos(E\hat{A}D) = \frac{4}{5}$$

E assim, vem que:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = \|\overrightarrow{AD}\| \times \|\overrightarrow{AE}\| \times \cos(\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AE}) = 12 \times 15 \times \frac{4}{5} = 144$$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 11.º ano – 10.05.2007



34. Como  $[ABCD]$  é um retângulo,  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$  e  $\vec{AB} \perp \vec{BC}$ , e assim vem que:

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= \vec{AB} \cdot (\vec{AB} + \vec{BC}) = \vec{AB} \cdot \vec{AB} + \vec{AB} \cdot \vec{BC} = \\ &= \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AB}\| \times \cos(\vec{AB} \wedge \vec{AB}) + \|\vec{AB}\| \times \|\vec{BC}\| \times \cos(\vec{AB} \wedge \vec{BC}) = \\ &= \overline{AB} \times \overline{AB} \times \cos(0^\circ) + \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos(90^\circ) = \overline{AB}^2 \times 1 + \overline{AB} \times \overline{BC} \times 0 = \overline{AB}^2 + 0 = \overline{AB}^2 \end{aligned}$$

Teste Intermédio 11.º ano – 19.05.2006

35. Identificando as coordenadas dos pontos  $W$ ,  $Q$  e  $V$ , temos que:

- o ponto  $W$  pertence ao plano  $z = 4$  e tem abcissa e ordenada igual a metade das respectivas coordenadas do ponto  $U$  porque é o centro do quadrado  $[STUV]$ :

$$W\left(\frac{x_U}{2}, \frac{y_U}{2}, 4\right), \text{ ou seja, } W(1,1,4)$$

- o ponto  $Q$  pertence ao plano  $z = 0$  e tem abcissa e ordenada iguais às do ponto  $U$ :

$$Q(x_U, y_U, 0), \text{ ou seja, } Q(2,2,0)$$

- o ponto  $V$  pertence ao plano  $y = 0$  e tem ordenada e cota iguais às do ponto  $U$ :

$$V(0, y_U, z_U), \text{ ou seja, } V(0,2,4)$$

Calculando as coordenadas e as normas dos vetores  $\vec{QW}$  e  $\vec{QV}$  temos:

- $\vec{QW} = W - Q = (1,1,4) - (2,2,0) = (-1, -1, 4)$
- $\|\vec{QW}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18}$
- $\vec{QV} = V - Q = (0,2,4) - (2,2,0) = (-2,0,4)$
- $\|\vec{QV}\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{4+0+16} = \sqrt{20}$

Finalmente, recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos(W\hat{Q}V) = \cos(\vec{QW} \cdot \vec{QV}) = \frac{\vec{QW} \cdot \vec{QV}}{\|\vec{QW}\| \times \|\vec{QV}\|} = \frac{(-1, -1, 4) \cdot (-2, 0, 4)}{\sqrt{18} \times \sqrt{20}} = \frac{2 + 0 + 16}{\sqrt{18} \times \sqrt{20}} = \frac{18}{\sqrt{360}}$$

Logo, o valor do ângulo  $WQV$  em graus, arredondado às unidades, é:

$$W\hat{Q}V = \cos^{-1}\left(\frac{18}{\sqrt{360}}\right) \approx 18^\circ$$

Exame – 2001, Ép. especial (cód. 135)

36. Analisando as alternativas apresentadas, temos que:

- Como o produto escalar é nulo quando os vetores têm direções perpendiculares, então se  $x = \frac{\pi}{2}$ , então  $\vec{OA} \cdot \vec{OP} = 0$ , ou seja,  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , pelo que o gráfico da opção (C) não pode ser o da função  $f$
- Como o produto escalar é positivo quando os vetores definem entre si um ângulo agudo, então se  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , então  $\vec{OA} \cdot \vec{OP} > 0$ , pelo que o gráfico da opção (B) não pode ser o da função  $f$
- Como o produto escalar é negativo quando os vetores definem entre si um ângulo obtuso, então se  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ , então  $\vec{OA} \cdot \vec{OP} < 0$ , pelo que o gráfico da opção (D) não pode ser o da função  $f$

Assim, de entre as opções apresentadas, o único gráfico que pode ser o da função  $f$ , é o gráfico da opção (A)

Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, Prova para militares (cód. 435)



37. Como os vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{BA}$  têm a mesma direção e sentidos contrários, o ângulo formado pelos vetores é de  $180^\circ$ .

Como ambos os vetores têm norma 1, recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\vec{AB} \cdot \vec{BA} = \cos(\widehat{AB\hat{BA}}) \times \|\vec{AB}\| \times \|\vec{BA}\| = \cos(180^\circ) \times 1 \times 1 = -1 \times 1 \times 1 = -1$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2001, Prova Modelo (cód. 135)  
Exame – 2000, 2.ª Fase (cód. 135)

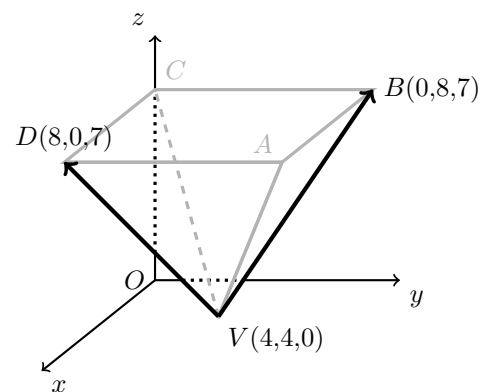
38. Como o ponto  $A$  tem coordenadas  $(8,8,7)$ , o ponto  $D$  pertence ao plano  $xOz$  e que a base da pirâmide é paralela ao plano  $xOy$ , então as coordenadas do ponto  $D$  são  $(8,0,7)$

Da mesma forma, como o ponto  $B$  pertence ao plano  $yOz$  e que a base da pirâmide é paralela ao plano  $xOy$ , então as coordenadas do ponto  $B$  são  $(0,8,7)$

Como a o vértice  $V$  da pirâmide pertence ao plano  $xOy$  tem cota nula como a pirâmide é regular as restantes coordenadas são metade das coordenadas respetivas do ponto  $A$ , então as coordenadas do vértice  $V$  são  $(4,4,0)$

Assim, calculando as coordenadas e as normas dos vetores  $\vec{VD}$  e  $\vec{VB}$  temos:

- $\vec{VD} = D - V = (8,0,7) - (4,4,0) = (4, -4, 7)$
- $\|\vec{VD}\| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 7^2} = \sqrt{16 + 16 + 49} = \sqrt{81} = 9$
- $\vec{VB} = B - V = (0,8,7) - (4,4,0) = (-4,4,7)$
- $\|\vec{VB}\| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{16 + 16 + 49} = \sqrt{81} = 9$



Finalmente, recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos(\widehat{DVB}) = \cos(\widehat{VDVB}) = \frac{\vec{VD} \cdot \vec{VB}}{\|\vec{VD}\| \times \|\vec{VB}\|} = \frac{(4, -4, 7) \cdot (-4, 4, 7)}{9 \times 9} = \frac{-16 - 16 + 49}{81} = \frac{17}{81}$$

Logo, o valor do ângulo  $DVB$  em graus, com aproximação à décima de grau, é:

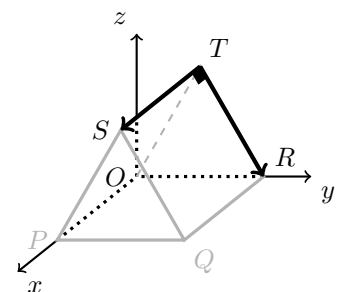
$$DVB = \cos^{-1}\left(\frac{17}{81}\right) \approx 77,9^\circ$$

Exame – 2000, Ép. Especial (setembro) (cód. 135)  
Exame – 1999, Prova de reserva (cód. 135)

39. Como o prisma é regular, as faces laterais são retângulos, pelo que ângulo formado pelos vetores  $\vec{TS}$  e  $\vec{TR}$  é um ângulo reto, ou seja têm direções perpendiculares.

Como os vetores têm direções perpendiculares, então:

$$\vec{TS} \cdot \vec{TR} = 0$$



Exame – 2000, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)



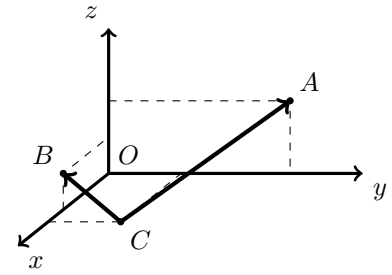
40. Determinando as coordenadas dos vetores  $\overrightarrow{CA}$  e  $\overrightarrow{CB}$  temos:

- $\overrightarrow{CA} = A - C = (0,5,2) - (4,2,0) = (-4,3,2)$
- $\overrightarrow{CB} = B - C = (3,0,1) - (4,2,0) = (-1, -2,1)$

Calculando o valor do produto escalar, temos:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (-4,3,2) \cdot (-1,-2,1) = -4 \times (-1) + 3 \times (-2) + 2 \times 1 = 4 - 6 + 2 = 0$$

E assim podemos concluir que como  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ , então o ângulo  $ACB$  é reto, ou seja, que o triângulo  $[ABC]$  é retângulo em  $C$

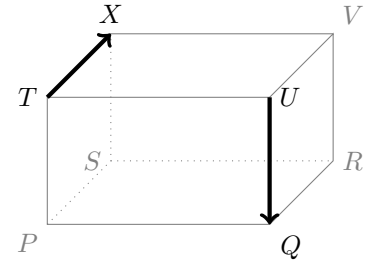


Exame - 1999, 2.ª fase (cód. 135)

41. O produto escalar de dois vetores é nulo se os dois vetores tiverem direções perpendiculares.

De entre as opções apresentadas, apenas os vetores  $\overrightarrow{UQ}$  e  $\overrightarrow{TX}$  representam vetores com direções perpendiculares.

Resposta: **Opção B**



Exame - 1999, 1.ª Fase - 2.ª Chamada (cód. 135)

42. Temos que:

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = -9 \Leftrightarrow \cos(\vec{p} \wedge \vec{q}) \times \|\vec{p}\| \times \|\vec{q}\| = -9 \Leftrightarrow \cos(\vec{p} \wedge \vec{q}) \times 3 \times 3 = -9 \Leftrightarrow \cos(\vec{p} \wedge \vec{q}) = -\frac{9}{9} \Leftrightarrow \cos(\vec{p} \wedge \vec{q}) = -1$$

Logo temos que  $\vec{p} \wedge \vec{q} = 180^\circ$  e como  $\|\vec{p}\| = \|\vec{q}\|$ , então os vetores são simétricos, ou seja:

$$\vec{p} = -\vec{q} \Leftrightarrow \vec{p} + \vec{q} = 0$$

Resposta: **Opção A**

Exame - 1998, Prova para militares (cód. 135)

43. Determinando as coordenadas dos vetores  $\overrightarrow{PO}$  e  $\overrightarrow{PQ}$  temos:

- $\overrightarrow{PO} = O - P = (0,0,0) - (2,2,2) = (-2, -2, -2)$
- $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (3,3,0) - (2,2,2) = (1,1, -2)$

Calculando o valor do produto escalar, temos:

$$\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PQ} = (-2, -2, -2) \cdot (1,1, -2) = -2 \times 1 + (-2) \times 1 + (-2) \times (-2) = -2 - 2 + 4 = 0$$

E assim podemos concluir que como  $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$ , então o ângulo  $OPQ$  é reto.

Exame - 1998, Prova de reserva (cód. 135)



44. Como o ponto  $C$  deve pertencer ao eixo  $Oz$ , e com cota positiva, as suas coordenadas são da forma  $(0,0,k), k \in \mathbb{R}^+$

Calculando as coordenadas dos vetores  $\overrightarrow{CA}$  e  $\overrightarrow{CB}$ , vem que:

- $\overrightarrow{CA} = A - C = (5,0,0) - (0,0,k) = (5,0,-k)$
- $\overrightarrow{CB} = B - C = (0,3,1) - (0,0,k) = (0,3,1-k)$

Como o triângulo  $[ABC]$  deve ser retângulo em  $C$ ,  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ , e assim temos que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 &\Leftrightarrow (5,0,-k) \cdot (0,3,1-k) = 0 \Leftrightarrow 5 \times 0 + 0 \times 3 + (-k) \times (1-k) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -k(1-k) = 0 \Leftrightarrow -k = 0 \vee 1-k = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee 1 = k \end{aligned}$$

Como o ponto  $C$  deve ter cota positiva, temos que  $k = 1$  e assim as coordenadas do ponto  $C$  são  $(0,0,1)$

Exame – 1998, 2.ª fase (cód. 135)

45. Como as faces do tetraedro são triângulos equiláteros, os ângulos internos têm  $\frac{\pi}{3}$  radianos de amplitude.

Como o tetraedro é regular, todas a medida de todas as arestas é igual, e assim, vem que:

$$\|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{BD}\| = \overline{AB} = 6$$

E assim, calculando o valor do produto escalar, vem:

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = \|\overrightarrow{BC}\| \times \|\overrightarrow{BD}\| \times \cos\left(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}\right) = 6 \times 6 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 36 \times \frac{1}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 1998, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

46. Determinando as coordenadas dos vetores  $\overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{AB}$  temos:

- $\overrightarrow{AC} = C - A = (0, -5,0) - (4,3,0) = (-4, -8,0)$
- $\overrightarrow{AB} = B - A = (0,5,0) - (4,3,0) = (-4,2,0)$

Calculando o valor do produto escalar, temos:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = (-4, -8,0) \cdot (-4,2,0) = -4 \times (-4) + (-8) \times 2 + 0 \times 0 = 16 - 16 + 0 = 0$$

E assim podemos concluir que como  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ , então os vetores  $\overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{AB}$  têm direções perpendiculares, ou seja, as retas  $AC$  e  $AB$  são perpendiculares.

Exame – 1997, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

