

Geometria (11.º ano)  
**Equações de retas e planos**

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução



1. Como a reta  $BC$  pertence ao plano que contém uma das bases do prisma, é perpendicular aos planos que contêm as faces laterais do prisma, em particular ao plano  $ABF$ . Assim, o vetor diretor da reta  $BC$  também é um vetor normal do plano  $ABF$ .

Assim, a equação do plano  $ABF$  é da forma:

$$2x + 3y + 6z + d = 0$$

E como o ponto  $A$  pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo as coordenadas, na equação anterior:

$$2(4) + 3(-4) + 6(-3) + d = 0 \Leftrightarrow 8 - 12 - 18 + d = 0 \Leftrightarrow -22 + d = 0 \Leftrightarrow d = 22$$

E assim, a equação do plano  $ABF$ , é  $2x + 3y + 6z + 22 = 0$ .

Resposta: **Opção A**

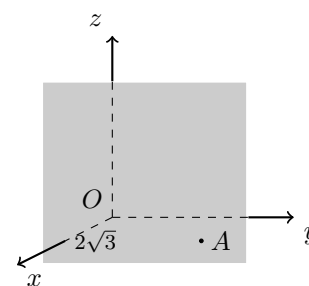
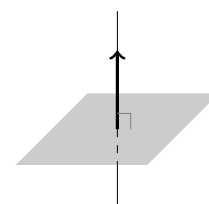
Exame – 2024, 1.ª Fase

2.

- 2.1. Como um vetor diretor da reta que contém o eixo  $Ox$  é  $\vec{u} = (1,0,0)$  e para que um plano seja perpendicular a uma reta, o vetor normal do plano deve ser colinear com o vetor normal da reta, de entre as equações apresentadas, podemos identificar a que representa um plano cujo vetor normal é colinear com o vetor  $\vec{u}$ :

- $z = 0$ , vetor normal:  $\vec{v}_A = (0,0,1)$  e  $(0,0,1) \neq k(1,0,0), \forall k \in \mathbb{R}$
- $y = 6$ , vetor normal:  $\vec{v}_B = (0,6,0)$  e  $(0,6,0) \neq k(1,0,0), \forall k \in \mathbb{R}$
- $x = 2\sqrt{3}$ , vetor normal:  $\vec{v}_C = (2\sqrt{3},0,0)$  e  $(2\sqrt{3},0,0) = 2\sqrt{3}(1,0,0)$
- $x + y + z = 0$ , vetor normal:  $\vec{v}_D = (1,1,1)$  e  $(1,1,1) \neq k(1,0,0), \forall k \in \mathbb{R}$

Resposta: **Opção C**



2.2. Como o ponto  $B$  pertence ao plano medidor do segmento de reta  $[OA]$ , designado por  $M$  o ponto médio de  $[OA]$ , temos que  $[BM]$  é a altura do triângulo  $[OAB]$  relativa à base  $[OA]$ .

Assim temos que:

- $\overline{OA} = \sqrt{(2\sqrt{3}-0)^2 + (6-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4 \times 3 + 36 + 0} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$
- $M = \left( \frac{x_A + x_O}{2}, \frac{y_A + y_O}{2}, \frac{z_A + z_O}{2} \right) = \left( \frac{2\sqrt{3} + 0}{2}, \frac{6 + 0}{2}, \frac{0 + 0}{2} \right) = (\sqrt{3}, 3, 0)$

A equação do plano medidor de  $[OA]$  (ao qual pertence o ponto  $B$ ), é:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = (x-2\sqrt{3})^2 + (y-6)^2 + (z-0)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 - 4x\sqrt{3} + 12 + y^2 - 12y + 36 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 = -4x\sqrt{3} + 12 - 12y + 36 \Leftrightarrow 4x\sqrt{3} + 12y - 48 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x + 3y - 12 = 0$$

Como o ponto  $B$  pertence à reta  $AB$ , então as suas coordenadas são da forma:  $B(\sqrt{3}k, 16 - 5k, 0)$  pelo que podemos determinar o valor de  $k$ , substituindo as coordenadas no plano medidor de  $[OA]$ :

$$\sqrt{3} \times \sqrt{3}k + 3(16 - 5k) - 12 = 0 \Leftrightarrow 3k + 48 - 15k - 12 = 0 \Leftrightarrow 36 = 12k \Leftrightarrow \frac{250}{12} = k \Leftrightarrow k = 3$$

Desta forma temos que:

- $B(\sqrt{3} \times 3, 16 - 5 \times 3, 0) = (3\sqrt{3}, 16 - 15, 0) = (3\sqrt{3}, 1, 0)$
- $\overline{BM} = \sqrt{(3\sqrt{3} - \sqrt{3})^2 + (1 - 3)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 \times 3 + 4} = \sqrt{16} = 4$

E assim, vem que:

$$V_{[OABCDE]} = A_{[OAB]} \times \overline{OD} = \frac{\overline{OA} \times \overline{BM}}{2} \times \overline{OD} = \frac{4\sqrt{3} \times 4}{2} \times 5 = 2\sqrt{3} \times 4 \times 5 = 40\sqrt{3}$$

Exame - 2023, Ép. especial



3. Como o prisma é reto, as arestas laterais são perpendiculares às bases do prisma, pelo que a reta  $EL$  (que contém uma aresta lateral) é perpendicular ao plano  $ABF$  (que contém uma das bases). Assim, observando que o vetor diretor da reta  $EL$  também é um vetor normal do plano  $ABF$ , temos que uma equação deste plano é da forma:

$$3x + 4y + d = 0$$

E como o ponto  $A$  pertence ao plano, substituindo as suas coordenadas na equação anterior, obtemos o valor do parâmetro  $d$ :

$$3(4) + 4(0) + d = 0 \Leftrightarrow 12 + d = 0 \Leftrightarrow d = -12$$

Ou seja, uma equação do plano  $ABF$  é  $3x + 4y - 12 = 0$ .

Como as retas  $EL$  e  $FG$  são paralelas (porque contém arestas laterais de um prisma reto), então o vetor diretor da reta  $EL$  também é um vetor diretor da reta  $FG$ , pelo que, recorrendo ao ponto  $G$ , obtemos uma equação vetorial da reta  $FG$ :

$$(x, y, z) = \left( 12, \frac{13}{2}, 2 \right) + k(3, 4, 0), k \in \mathbb{R}$$

E assim, um ponto genérico desta reta, tem coordenadas:  $\left( 12 + 3k, \frac{13}{2} + 4k, 2 \right)$

Como o ponto  $F$  é a interseção da reta  $FG$  com o plano  $ABF$ , substituindo as coordenadas do ponto genérico da reta  $FG$  na equação do plano  $ABF$ , obtemos o valor de  $k$ , correspondente ao ponto  $F$ :

$$3(12 + 3k) + 4\left(\frac{13}{2} + 4k\right) - 12 = 0 \Leftrightarrow 36 + 9k + 26 + 16k - 12 = 0 \Leftrightarrow 25k = -50 \Leftrightarrow k = -\frac{50}{25} \Leftrightarrow k = -2$$

Desta forma, temos que as coordenadas do ponto  $F$  são:

$$\left( 12 + 3(-2), \frac{13}{2} + 4(-2), 2 \right) = \left( 12 - 6, \frac{13}{2} - 8, 2 \right) = \left( 6, \frac{13}{2} - \frac{16}{2}, 2 \right) = \left( 6, -\frac{3}{2}, 2 \right)$$

Exame – 2023, 2.<sup>a</sup> Fase



4.

- 4.1. Como as retas  $OD$  e  $AC$  são paralelas porque contêm arestas laterais de um prisma reto, os respectivos vetores diretores são colineares. Desta forma, podemos verificar que o vetor  $\begin{pmatrix} 0,2,3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(0,4,3)$ , ou seja, é colinear com um vetor diretor da reta  $AC$ , e por isso é um vetor diretor da reta  $OD$ .

Temos ainda que, uma equação da reta  $OD$  é  $(x,y,z) = (0,0,0) + k \begin{pmatrix} 0,2,3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , pelo que podemos verificar que o ponto de coordenadas  $(0, -4, -3)$  pertence à reta  $OD$  porque

$$(0, -4, -3) = (0,0,0) + (-2) \begin{pmatrix} 0,2,3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Assim,  $(x,y,z) = (0, -4, -3) + k \begin{pmatrix} 0,2,3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $k \in \mathbb{R}$  é uma equação vetorial que define a reta  $OD$ .

Resposta: **Opção B**

- 4.2. Como a base  $[ABC]$  do triângulo está inscrita numa semicircunferência de diâmetro  $[AB]$ , então o triângulo é retângulo em  $C$ , e por isso a reta  $AC$  é perpendicular ao plano  $CBE$ .

Assim, o vetor  $\vec{u} = (0,4,3)$ , vetor diretor da reta  $AC$  é também um vetor normal do plano  $CBE$ , pelo que este pode ser definido por uma equação da forma  $0x + 4y + 3z + d = 0$ ,  $d \in \mathbb{R}$ . Como o ponto  $E$  pertence ao eixo  $Oy$  e  $\overline{OE} = 12,5$ , temos que as suas coordenadas são  $(0; 12,5; 0)$ , pelo que podemos determinar o valor do parâmetro  $d$  na equação do plano  $CBE$ :

$$0 + 4(12,5) + 3(0) + d = 0 \Leftrightarrow 50 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -50$$

Pelo que uma equação do plano  $CBE$  é  $4y + 3z - 50 = 0$ .

Assim, as coordenadas do ponto  $C$ , podem ser determinadas pela interseção da reta  $AC$  com o plano  $CBE$ . Assim, temos que as coordenadas de um ponto da reta  $AC$  são da forma  $(x,y,z) = (10,0,0) + (0,4k,3k) = (10,4k,3k)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , e substituindo as coordenadas na equação do plano, temos:

$$4(4k) + 3(3k) - 50 = 0 \Leftrightarrow 16k + 9k = 50 \Leftrightarrow 25k = 50 \Leftrightarrow k = \frac{50}{25} \Leftrightarrow k = 2$$

Desta forma, substituindo o valor de  $k$  nas coordenadas do ponto da reta  $AC$ ,  $(10,4k,3k)$ , obtemos as coordenadas do ponto  $C$ :

$$(10,4(2),3(2)) = (10,8,6)$$

Exame - 2023, 1.ª Fase



5.

- 5.1. Como o vértice  $A$  pertence ao semieixo positivo  $Ox$  e o vértice  $F$  pertence ao semieixo positivo  $Oy$ , então a base  $[ABCDEF]$  do prisma pertence ao plano  $xOy$ .

Como o prisma hexagonal  $[ABCDEFGH IJKL]$  é reto, a base  $[GHIJKL]$  é paralela ao plano  $xOy$ , ou seja, o plano que contém esta face é definido por uma equação da forma  $z = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$

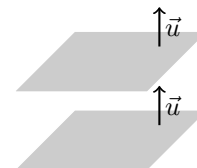
Como o ponto  $M$ , equidistante de ambas as bases tem de cota 2, então a altura do prisma é  $2 \times 2 = 4$ , ou seja, a equação do plano que contém a face  $[GHIJKL]$  é  $z = 4$

Resposta: **Opção B**

- 5.2. Como as bases do prisma são hexágonos regulares, as faces laterais opostas são paralelas, pelo que os planos  $BCJ$  e  $LEF$  são paralelos, ou seja os respetivos vetores normais são colineares.

Observando a equação que define o plano  $BCJ$  podemos verificar que um vetor normal deste plano (e também do plano  $LEF$  é  $\vec{u} = (3, -\sqrt{3}, 0)$ , pelo que o plano  $LEF$  é da forma

$$3x - \sqrt{3}y + d = 0$$



Como o ponto  $B$  tem ordenada e cota nulas e pertence ao plano  $BCJ$ , determinamos a sua abcissa,  $x_B$ , substituindo as coordenadas conhecidas na equação do plano:

$$3x_B - \sqrt{3} \times 0 - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x_B - 0 = 6 \Leftrightarrow x_B = \frac{6}{3} \Leftrightarrow x_B = 2$$

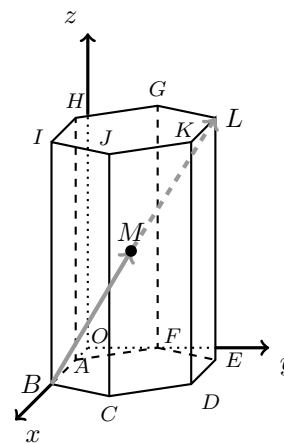
Como o ponto  $M$  é o centro do prisma, também é o ponto médio do segmento  $[BL]$ , e assim, temos que:  $L = M + \overrightarrow{BM}$

Determinando as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{BM}$ , temos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM} &= M - B = \left( \frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2 \right) - (2, 0, 0) = \left( \frac{4}{3} - \frac{6}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2 \right) = \\ &= \left( -\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2 \right) \end{aligned}$$

Pelo que as coordenadas do ponto  $L$  são:

$$L = M + \overrightarrow{BM} = \left( \frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2 \right) + \left( -\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2 \right) = \left( \frac{2}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}, 4 \right)$$



Como o ponto  $L$  pertence ao plano  $LEF$ , substituindo as coordenadas na equação anteriormente identificada, podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ :

$$3 \times \frac{2}{3} - \sqrt{3} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} + d = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{4 \times \sqrt{3}^2}{3} + d = 0 \Leftrightarrow 2 - 4 + d = 0 \Leftrightarrow -2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 2$$

Assim, uma equação do plano uma equação cartesiana do plano  $LEF$ , na forma indicada, é:

$$3x - \sqrt{3}y + 0z + 2 = 0$$



6. Como o ponto  $E$  pertence ao plano  $ADE$ , e o vetor  $\overrightarrow{AB}$  é um vetor normal do plano, as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{AB}$  são:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -1, 2) - (-2, 5, 0) = (1 - (-2), -1 - 5, 2 - 0) = (3, -6, 2)$$

Assim, temos que a equação do plano  $ADE$  pode ser da forma  $3x - 6y + 2z + d = 0$

Para determinar o valor de  $d$ , na equação do anterior, substituímos as coordenadas do ponto  $A$ , porque as estas verificam a equação do plano, porque o ponto pertence ao plano:

$$3(-2) - 6(5) + 2(0) + d = 0 \Leftrightarrow -6 - 30 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 36$$

Pelo que, uma equação cartesiana do plano  $ADE$  é

$$3x - 6y + 2z + 36 = 0$$

As coordenadas de todos os pontos da reta dada, e em particular o ponto de interseção da reta com o plano  $ADE$ , ou seja, o ponto  $E$ , para  $k \in \mathbb{R}$ , são da forma:

$$(x, y, z) = (0, 0, 3) + k(1, -1, -1) = (0 + k, 0 - k, 3 - k) = (k, -k, 3 - k)$$

Como o ponto de interseção da pertence ao plano  $ADE$  podemos determinar o valor de  $k$  substituindo as coordenadas genéricas do ponto, na equação do plano:

$$3(k) - 6(-k) + 2(3 - k) + 36 = 0 \Leftrightarrow 3k + 6k + 6 - 2k + 36 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7k + 42 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-42}{7} \Leftrightarrow k = -6$$

Desta forma temos que as coordenadas do ponto  $E$ , são:

$$(-6, -(-6), 3 - (-6)) = (-6, 6, 9)$$

Exame – 2021, 2.ª Fase



7.

7.1. Como se pretende identificar um plano perpendicular ao plano que contém a base do cone, então os respectivos vetores normais devem ser perpendiculares, pelo que calculamos os produtos escalares entre os vetores normais dos planos definidos em cada uma das hipóteses o vetor normal do plano que contém a base do cone para encontrar um produtos escalares nulos e assim identificar planos perpendiculares:

- $(0,4, -3) \cdot (0,4, -3) = 0 + 4 \times 4 + (-3) \times (-3) = 16 + 9 = 25$
- $(3,4,1) \cdot (0,4, -3) = 3 \times 0 + 4 \times 4 + 1 \times (-3) = 0 + 16 - 3 = 13$
- $(0,3,4) \cdot (0,4, -3) = 0 + 3 \times 4 + 4 \times (-3) = 12 - 12 = 0$
- $(1,3,4) \cdot (0,4, -3) = 1 \times 0 + 3 \times 4 + 4 \times (-3) = 0 + 12 - 12 = 0$

Assim, temos que apenas as equações apresentadas nas opções (C) e (D) representam planos perpendiculares ao plano que contém a base do cone, pelo que resta verificar qual das duas equações é verificada pelas coordenadas do ponto  $(1,2, -1)$ , substituindo as suas coordenadas em cada uma das equações:

- $3(2) + 4(-1) = 18 \Leftrightarrow 6 - 4 = 18 \Leftrightarrow 2 = 18$  (Proposição falsa)
- $1 + 3(2) + 4(-1) = 3 \Leftrightarrow 1 + 6 - 4 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3$  (Proposição verdadeira)

Ou seja a equação  $x + 3y + 4z = 3$  define um plano perpendicular ao plano que contém a base do cone e passa no ponto de coordenadas  $(1,2, -1)$

Resposta: **Opção D**



- 7.2. Como o cone é reto e o ponto  $A$  é a base do centro, temos que a reta  $AV$  é perpendicular ao plano que contém a base do cone, pelo que o vetor normal do plano ( $\vec{u} = (0,4,-3)$ ) também é um vetor diretor da reta  $AV$ .

Como o ponto  $A$  pertence ao plano definido por  $4y - 3z = 16$ , e pertence ao eixo  $Oy$ , ou seja, tem cota nula, temos que a sua ordenada ( $y_A$ ) é:

$$4y_A - 3(0) = 16 \Leftrightarrow 4y_A = 16 \Leftrightarrow y_A = \frac{16}{4} \Leftrightarrow y_A = 4$$

E assim, temos que as coordenadas do ponto  $A$  são  $(0,4,0)$ , e uma equação vetorial da reta  $AV$  é:

$$(x,y,z) = (0,4,0) + \lambda(0,4,-3), \lambda \in \mathbb{R}$$

Pelo que a cota do ponto  $V$ , que pertence ao eixo  $Oz$  e, por isso tem coordenadas  $(0,0,z_V)$ , pode ser calculada por:

$$\begin{cases} 0 = 0 + 0\lambda \\ 0 = 4 + 4\lambda \\ z_V = 0 - 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -4 = 4\lambda \\ z_V = -3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -1 = \lambda \\ z_V = -3(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -1 = \lambda \\ z_V = 3 \end{cases}$$

Desta forma, recorrendo ao teorema de Pitágoras calculamos a altura do cone ( $\overline{AV}$ ):

$$\overline{AV}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OV}^2 \Leftrightarrow \overline{AV}^2 = y_A^2 + z_V^2 \Leftrightarrow \overline{AV}^2 = 4^2 + 3^2 \xrightarrow{\overline{AV} > 0} \overline{AV} = \sqrt{16+9} \Leftrightarrow \overline{AV} = \sqrt{25} \Leftrightarrow \overline{AV} = 5$$

E assim, como o raio da base do cone é 3, o respetivo volume é:

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 5 = \frac{\pi \times 3 \times 3 \times 5}{3} = 15\pi$$

Exame – 2021, 1.ª Fase

8. Como o plano  $\alpha$  é perpendicular à reta  $BE$ , o vetor  $\overrightarrow{BE} = (-1,6,2)$  é um vetor normal do plano, pelo que a equação do plano é da forma:

$$-x + 6y + 2z + d = 0$$

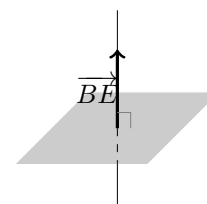
E como o ponto de coordenadas  $(1,0,1)$  pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo as coordenadas, na equação anterior:

$$-1 + 6(0) + 2(1) + d = 0 + d = 0 \Leftrightarrow -1 + 0 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$$

E assim, uma equação do plano  $\alpha$ , é:

$$-x + 6y + 2z - 1 = 0 \Leftrightarrow x - 6y - 2z + 1 = 0$$

Resposta: **Opção C**



Exame – 2021, Ép. especial





9. Como  $[PQRS]$  é um trapézio de bases  $[PQ]$  e  $[RS]$ , as retas  $PQ$  e  $RS$  são paralelas. Assim, o plano perpendicular à reta  $RS$  também é perpendicular à reta  $PQ$ , pelo que o vetor  $\overrightarrow{PQ}$  é um vetor normal do plano pretendido.

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-2, 1, 1) - (1, -1, 2) = (-2 - 1, 1 - (-1), 1 - 2) = (-3, 2, -1)$$

Logo a equação do plano é da forma:

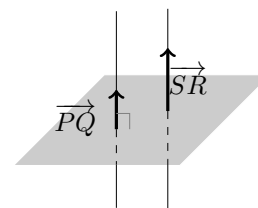
$$-3x + 2y - z + d = 0$$

E como o ponto  $P$  pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo as coordenadas, na equação anterior:

$$-3(1) + 2(-1) - (2) + d = 0 \Leftrightarrow -3 - 2 - 2 + d = 0 \Leftrightarrow -7 + d = 0 \Leftrightarrow d = 7$$

E assim, a equação do plano perpendicular à reta  $RS$  e que contém o ponto  $P$ , é:

$$-3x + 2y - z + 7 = 0$$



Exame – 2021, 2.ª Fase

10.

- 10.1. Como se pretende identificar uma reta perpendicular à reta  $EF$ , e os respetivos vetores diretores são perpendiculares, calculamos os produtos escalares entre os vetores diretores das retas de cada uma das hipóteses o vetor diretor da reta  $EF$  para encontrar um produtos escalares nulos e assim identificar direções perpendiculares à reta  $EF$ :

- $(-3, -2, 2) \cdot (2, -3, 0) = -3 \times 2 + (-2) \times (-3) + 2 \times 0 = -6 + 6 + 0 = 0$
- $(-3, -2, 2) \cdot (0, 3, -3) = -3 \times 0 + (-2) \times 3 + 2 \times (-3) = 0 - 6 - 6 = -12$
- $(-3, -2, 2) \cdot (0, 3, 3) = -3 \times 0 + (-2) \times 3 + 2 \times 3 = 0 - 6 + 6 = 0$
- $(-3, -2, 2) \cdot (2, 0, -3) = -3 \times 2 + (-2) \times 0 + 2 \times (-3) = -6 + 0 - 6 = -12$

Assim, temos que apenas as retas cujas equações são apresentadas nas opções (A) e (C) são perpendiculares à reta  $EF$ , pelo que resta verificar a qual das duas retas pertence o ponto  $E$ , substituindo as suas coordenadas em cada uma das equações:

$$\begin{aligned} \bullet (7, 2, 15) = (7, -3, 3) + k(2, -3, 0) &\Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7 + 2k \\ 2 = -3 - 3k \\ 15 = 3 + 0 \end{cases} \quad (\text{condição impossível}) \\ \bullet (7, 2, 15) = (7, -10, 3) + k(0, 3, 3) &\Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7 + 0 \\ 2 = -10 + 3k \\ 15 = 3 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7 \\ 12 = 3k \\ 12 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7 \\ 4 = k \\ 4 = k \end{cases} \end{aligned}$$

Ou seja,  $(7, 2, 15) = (7, -10, 3) + 4(0, 3, 3)$ , pelo que o ponto  $E$  pertence à reta definida pela equação  $(x, y, z) = (7, -10, 3) + k(0, 3, 3), k \in \mathbb{R}$

Resposta: **Opção C**



- 10.2. Como as diagonais de faces opostas de começamos por determinar a equação do plano  $ABG$ , para determinar a ordenada do ponto  $B$ :

Como  $[ABCDEFGH]$  é um paralelepípedo retângulo e a reta  $EF$  é perpendicular ao plano  $ABG$ , então o vetor diretor da reta ( $\vec{u} = (-3, -2, 2)$ ), é também um vetor normal do plano, pelo que a equação do plano  $ABG$  é da forma:

$$-3x - 2y + 2z + d = 0$$

Como são conhecidas as coordenadas do ponto  $G$   $((6, 10, 13))$ , podemos determinar o valor de  $d$ , substituindo as coordenadas na equação anterior:

$$-3(6) - 2(10) + 2(13) + d = 0 \Leftrightarrow -18 - 20 + 26 + d = 0 \Leftrightarrow d = 12$$

Assim temos que a equação do plano  $ABG$  é  $-3x - 2y + 2z + 12 = 0$  e como o ponto  $B$  pertence ao eixo  $Oy$  tem abcissa e cota nulas, pelo que a sua ordenada pode ser obtida a partir da equação do plano  $ABG$ :

$$-3(0) - 2y + 2(0) + 12 = 0 \Leftrightarrow -2y + 12 = 0 \Leftrightarrow 12 = 2y \Leftrightarrow \frac{12}{2} = y \Leftrightarrow 6 = y$$

Como as arestas paralelas de faces opostas de um paralelepípedo retângulo são congruentes, podemos calcular a medida do raio da superfície esférica:

$$r = \overline{BD} = \overline{GE} = \sqrt{(7-6)^2 + (2-10)^2 + (15-13)^2} = \sqrt{1^2 + (-8)^2 + 2^2} = \sqrt{1+64+4} = \sqrt{69}$$

Assim, temos que a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto  $B(0, 6, 0)$  e que passa no ponto  $D$ , é:

$$(x-0)^2 + (y-6)^2 + (z-0)^2 = (\sqrt{69})^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-6)^2 + z^2 = 69$$

Exame - 2021, 1.ª Fase



11. Determinando as coordenadas do ponto  $E$ , temos:

$$E = B + \overrightarrow{BE} = (0,2,4) + (2,2,-2) = (2,4,2)$$

Como a reta  $OE$  é perpendicular ao plano  $\alpha$ , um vetor diretor da reta também é um vetor normal do plano, ou seja, o vetor  $\overrightarrow{OE}$  (que tem as mesmas coordenadas que o ponto  $E$ ), é um vetor normal do plano  $\alpha$ , e assim a sua equação é da forma:

$$2x + 4y + 2z + d = 0$$

Como a aresta  $[BG]$  é paralela ao eixo  $Oz$  e a medida da aresta do cubo é 2, temos que as coordenadas do ponto  $G$  são  $(0,2,2)$ , e como o ponto  $G$  pertence ao plano  $\alpha$ , podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo as coordenadas, na equação anterior:

$$2(0) + 4(2) + 2(2) + d = 0 \Leftrightarrow 0 + 8 + 4 + d = 0 \Leftrightarrow 12 + d = 0 \Leftrightarrow d = -12$$

E assim, uma equação do plano  $\alpha$ , é:

$$2x + 4y + 2z - 12 = 0 \Leftrightarrow x + 2y + z - 6 = 0$$

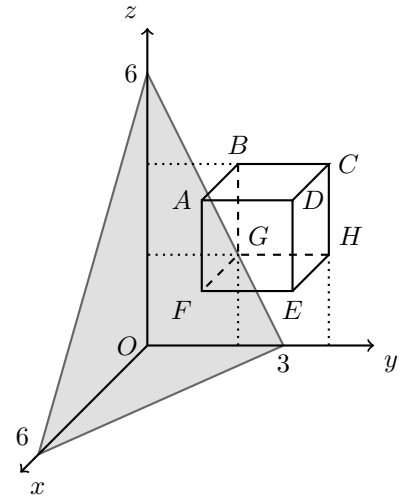
Desta forma podemos determinar as coordenadas dos pontos do plano que interseccionam os eixos coordenados:

- Ponto P ( $y = 0 \wedge z = 0$ ):  $x + 2(0) + (0) - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6$
- Ponto Q ( $x = 0 \wedge z = 0$ ):  $0 + 2y + (0) - 6 = 0 \Leftrightarrow 2y = 6 \Leftrightarrow y = 3$
- Ponto R ( $y = 0 \wedge z = 0$ ):  $0 + 2(0) + z - 6 = 0 \Leftrightarrow z = 6$

Desta forma a pirâmide  $[OPQR]$  pode ser entendida como uma pirâmide cuja base é um triângulo retângulo cujos catetos medem 6 e 3 unidades e cuja altura é 6, ou seja:

$$V_{[OPQR]} = \frac{1}{3} \times A_{[OPQ]} \times \overline{OR} = \frac{1}{3} \times \frac{\overline{OP} \times \overline{OQ}}{2} \times \overline{OR} = \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 6}{2} \times 6 = 3 \times 6 = 18$$

Exame – 2020, Ép. especial



12. Como o plano  $EFG$  é perpendicular à reta  $AE$ , o vetor diretor da reta ( $\vec{v} = (3, -6, 2)$ ) é um vetor normal do plano, assim a equação do plano é da forma:

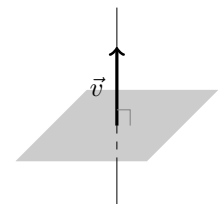
$$3x - 6y + 2z + d = 0$$

E como o ponto  $G$  pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo as coordenadas, na equação anterior:

$$3(5) - 6(3) + 2(6) + d = 0 \Leftrightarrow 15 - 18 + 12 + d = 0 \Leftrightarrow 9 + d = 0 \Leftrightarrow d = -9$$

E assim, uma equação do plano  $EFG$ , é:

$$3x - 6y + 2z - 9 = 0$$



Exame – 2020, 2.ª Fase

13.

13.1. Determinando as coordenadas dos pontos  $A$  e  $B$ , com recurso à equação que define o plano  $ABC$ , temos:



- Como o ponto  $A$  pertence ao eixo  $Ox$ , tem ordenada e cota nulas, e assim, a sua abcissa é:

$$3x + 4(0) + 4(0) - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x + 0 + 0 = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{3} \Leftrightarrow x = 4$$

- Como o ponto  $B$  pertence ao eixo  $Oy$ , tem abcissa e cota nulas, e assim, a sua ordenada é:

$$3(0) + 4y + 4(0) - 12 = 0 \Leftrightarrow 0 + 4y + 0 = 12 \Leftrightarrow y = \frac{12}{4} \Leftrightarrow y = 3$$

Assim, as coordenadas dos pontos  $A$  e  $B$  são, respetivamente,  $(4,0,0)$  e  $(0,3,0)$  e a distância  $\overline{AB}$ , ou seja, a altura do cilindro, é:

$$\overline{AB} = \sqrt{(0-4)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Como o volume do cilindro ( $V_C$ ) é igual a  $10\pi$  podemos determinar  $\overline{BC}$ , ou seja, a medida do raio da base do cilindro:

$$V_C = \pi \times \overline{BC}^2 \times \overline{AB} \Leftrightarrow 10\pi = \pi \times \overline{BC}^2 \times 5 \Leftrightarrow \frac{10\pi}{5\pi} = \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 2 \underset{\overline{BC} > 0}{\Leftrightarrow} \overline{BC} = \sqrt{2}$$

- 13.2. Designado por  $Q$  o ponto do plano  $ABC$  que se encontra mais próximo do ponto  $P$ , então a reta  $PQ$  é perpendicular ao plano  $ABC$ , pelo que o vetor normal do plano  $ABC$  ( $\vec{v} = (3,4,4)$ ) é também um vetor diretor da reta  $PQ$ . Assim, temos que uma equação vetorial da reta  $PQ$ , é:

$$(x,y,z) = P + \lambda \vec{v}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x,y,z) = (3,5,6) + \lambda(3,4,4), \lambda \in \mathbb{R}$$

Assim, as coordenadas de todos os pontos da reta  $PQ$ , e em particular o ponto do ponto  $Q$ , para  $\lambda \in \mathbb{R}$ , são da forma:

$$(x,y,z) = (3,5,6) + \lambda(3,4,4) = (3 + 3\lambda, 5 + 4\lambda, 6 + 4\lambda)$$

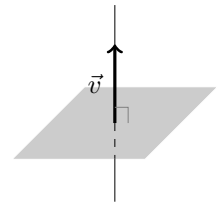
Como o ponto  $Q$  pertence ao plano  $ABC$  podemos determinar o valor de  $\lambda$  substituindo as coordenadas genéricas do ponto, na equação do plano:

$$3(3 + 3\lambda) + 4(5 + 4\lambda) + 4(6 + 4\lambda) - 12 = 0 \Leftrightarrow 9 + 9\lambda + 20 + 16\lambda + 24 + 16\lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 41\lambda = 12 - 9 - 20 - 24 \Leftrightarrow 41\lambda = -41 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{41}{41} \Leftrightarrow \lambda = -1$$

Desta forma temos que as coordenadas do ponto  $Q$  são:

$$(3 + 3(-1), 5 + 4(-1), 6 + 4(-1)) = (3 - 3, 5 - 4, 6 - 4) = (0, 1, 2)$$



14.

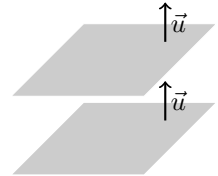
- 14.1. Substituindo o valor da ordenada do ponto  $A$ ,  $y_A = 4$  na equação da reta  $r$ , podemos calcular o valor de  $k$ , e depois, o valor da cota do ponto de interseção:

$$\begin{cases} x = 1 + 0k \\ y = 2 + k \\ z = 1 + 5k \end{cases} \xrightarrow{y=4} \begin{cases} x = 1 \\ 4 = 2 + k \\ z = 1 + 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2 = k \\ z = 1 + 5 \times 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = 2 \\ z = 1 + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = 2 \\ z = 11 \end{cases}$$

Ou seja, as coordenadas do ponto  $A$  são  $(1,4,11)$

Observando a equação do plano  $\alpha$  podemos verificar que  $\vec{u} = (2,3, -1)$  é um vetor normal do plano  $\alpha$ , e também de todos os planos paralelos ao plano  $\alpha$ , cujas equações são da forma:

$$2x + 3y - z + d = 0$$



Como as coordenadas do ponto  $A$  são  $(1,4,11)$ , e este pertence ao plano pretendido, podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

$$2(1) + 3(4) - 11 + d = 0 \Leftrightarrow 2 + 12 - 11 + d = 0 \Leftrightarrow 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$$

Logo, uma equação do plano que é paralelo ao plano  $\alpha$  e que passa pelo ponto  $A$  é:

$$2x + 3y - z - 3 = 0$$

- 14.2. As coordenadas de todos os pontos da reta  $r$ , e em particular o ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $\alpha$ , para  $k \in \mathbb{R}$ , são da forma:

$$(x,y,z) = (1,2,1) + k(0,1,5) = (1 + 0 \times k, 2 + 1 \times k, 1 + 5 \times k) = (1, 2 + k, 1 + 5k)$$

Como o ponto de interseção da pertence ao plano  $\alpha$  podemos determinar o valor de  $k$  substituindo as coordenadas genéricas do ponto, na equação do plano:

$$\begin{aligned} 2(1) + 3(2 + k) - (1 + 5k) - 9 = 0 &\Leftrightarrow 2 + 6 + 3k - 1 - 5k - 9 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 + 6 + 3k - 1 - 5k - 9 = 0 &\Leftrightarrow -2k - 2 = 0 \Leftrightarrow -2k = 2 \Leftrightarrow k = \frac{2}{-2} \Leftrightarrow k = -1 \end{aligned}$$

Desta forma temos que as coordenadas do ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $\alpha$ , ou seja as coordenadas do ponto  $P$ , são:

$$(1, 2 + (-1), 1 + 5(-1)) = (1, 1, -4)$$

Exame – 2019, Ép. especial



15.

- 15.1. Como  $[ABCDEFGH]$  é um paralelepípedo e os pontos  $A$ ,  $B$  e  $G$  pertencem ao plano  $xOy$  (porque têm todos cota nula), então a reta  $CB$  é paralela ao eixo  $Oz$ , e o ponto  $B$  tem abscissa e ordenada, respetivamente iguais às do ponto  $C$  e cota nula (porque pertence ao eixo  $Oy$ , ou seja, as coordenadas do ponto  $B$  são  $(0,3,0)$ )

Como o ponto  $A$  pertence ao eixo  $Ox$  tem ordenada e cota nulas, e como pertence ao plano  $ABC$ , podemos determinar a sua abscissa substituindo o valor da ordenada na equação do plano:

$$3x + 4(0) - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x + 0 = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{3} \Leftrightarrow x = 4$$

Assim, temos que as coordenadas do ponto  $A$  são  $(4,0,0)$ , e, calculando a distância entre dois pontos, temos que o volume do paralelepípedo, é:

$$\begin{aligned} V_{[ABCDEFGH]} &= \overline{AB} \times \overline{BG} \times \overline{BC} = \\ &= \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2 + (0-0)^2} \times \sqrt{(0-6)^2 + (3-11)^2 + (0-0)^2} \times \sqrt{(0-0)^2 + (3-3)^2 + (0-6)^2} = \\ &= \sqrt{16+9} \times \sqrt{36+64} \times \sqrt{36} = \sqrt{25} \times \sqrt{100} \times 6 = 5 \times 10 \times 6 = 300 \end{aligned}$$

- 15.2. Como a reta  $r$  é perpendicular ao plano  $ABC$ , vetor normal do plano ( $\vec{v} = (3,4,0)$ ) é um vetor diretor da reta, e assim, considerando as coordenadas do ponto  $P$ , temos que uma equação vetorial da reta  $r$  é:

$$(x,y,z) = (1, -4,3) + \lambda(3,4,0), \lambda \in \mathbb{R}$$

Assim, as coordenadas de todos os pontos da reta  $r$ , e em particular o ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $ABC$ , para  $\lambda \in \mathbb{R}$ , são da forma:

$$(x,y,z) = (1, -4,3) + \lambda(3,4,0) = (1 + 3\lambda, -4 + 4\lambda, 3 + 0 \times \lambda) = (1 + 3\lambda, -4 + 4\lambda, 3)$$

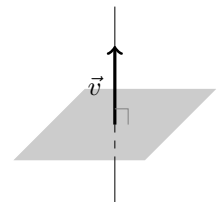
Como o ponto de interseção pertence ao plano  $ABC$  podemos determinar o valor de  $\lambda$  substituindo as coordenadas genéricas do ponto, na equação do plano:

$$3(1 + 3\lambda) + 4(-4 + 4\lambda) - 12 = 0 \Leftrightarrow 3 + 9\lambda - 16 + 16\lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow 25\lambda = -3 + 16 + 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25\lambda = 25 \Leftrightarrow \lambda = \frac{25}{25} \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Desta forma temos que as coordenadas do ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $ABC$  são:

$$(1 + 3 \times 1 - 4 + 4 \times 1, 3) = (1 + 3, -4 + 4, 3) = (4,0,3)$$



16. Como a pirâmide é quadrangular regular, considerando  $M$  o ponto centro da base, ou seja o ponto médio do segmento  $[AC]$ , temos que o vetor  $\overrightarrow{MV}$  é perpendicular ao plano que contém a base, ou seja, é um vetor normal do plano que contém a base da pirâmide.

Determinando as coordenadas do ponto  $M$ , temos:

$$\left( \frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}, \frac{z_A + z_C}{2} \right) = \left( \frac{2+0}{2}, \frac{1+(-1)}{2}, \frac{0+2}{2} \right) = (1,0,1)$$

Calculando as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{MV}$ , temos:

$$\overrightarrow{MV} = V - M = (3, -1, 2) - (1, 0, 1) = (2, -1, 1)$$

Desta forma, a equação do plano é da forma:

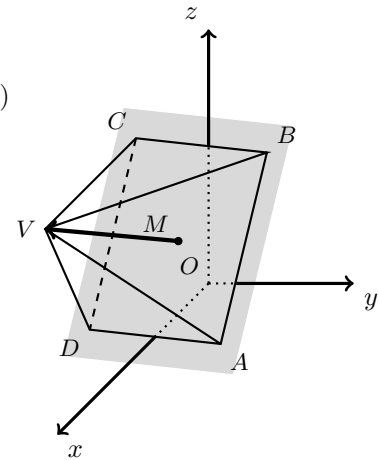
$$2x - y + z + d = 0$$

E como o ponto  $A$  pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo as coordenadas, na equação anterior:

$$2(2) - 1 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow 4 - 1 + d = 0 \Leftrightarrow 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$$

E assim, a equação do plano é:

$$2x - y + z - 3 = 0$$



Exame – 2019, 1.ª Fase

17. Como o ponto  $P$  tem abcissa 1 ( $x_P = 1$ ), e ordenada 3 ( $y_P = 3$ ), substituindo estas coordenadas na equação da superfície esférica, calculamos a cota ( $z_P$ ):

$$\begin{aligned} (x_P - 1)^2 + (y_P - 2)^2 + (z_P + 1)^2 = 10 &\Leftrightarrow (1 - 1)^2 + (3 - 2)^2 + (z_P + 1)^2 = 10 \Leftrightarrow 0^2 + 1^2 + (z_P + 1)^2 = 10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (z_P + 1)^2 = 10 - 1 \Leftrightarrow z_P + 1 = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow z_P + 1 = -1 \pm 3 \Leftrightarrow z_P = -4 \vee z_P = 2 \end{aligned}$$

Como a cota do ponto  $P$  é negativa, as coordenadas do ponto  $P$  são  $(1, 3, -4)$

Como o plano é perpendicular à reta  $r$ , vetor diretor da reta ( $\vec{v} = (4, 1, -2)$ ) é um vetor normal do plano, e assim a equação do plano é da forma:

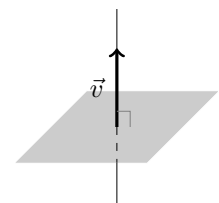
$$4x + y - 2z + d = 0$$

E como o ponto  $P$  pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo as coordenadas, na equação anterior:

$$4(1) + 3 - 2(-4) + d = 0 \Leftrightarrow 4 + 3 + 8 + d = 0 \Leftrightarrow 15 + d = 0 \Leftrightarrow d = -15$$

E assim, uma equação do plano que passa no ponto  $P$  e é perpendicular à reta  $r$ , é:

$$4x + y - 2z - 15 = 0$$



Exame – 2018, 2.ª Fase



18. Como o plano  $PQR$  tem equação  $2x + 3y - z - 15 = 0$ , um vetor normal do plano é  $\vec{u} = (2, 3, -1)$ . Como o prisma é regular então as arestas laterais são perpendiculares ao plano das bases, ou seja, a reta  $PS$  é perpendicular ao plano  $PQR$ , e assim, o vetor normal do plano da base é também um vetor diretor da reta  $PS$ , pelo que, considerando as coordenadas do ponto  $S(14, 5, 0)$ , temos que uma equação vetorial da reta  $PS$  é:

$$(x, y, z) = (14, 5, 0) + \lambda(2, 3, -1), \lambda \in \mathbb{R}$$

Assim, as coordenadas de todos os pontos da reta  $PS$ , e em particular o ponto  $P$ , para  $\lambda \in \mathbb{R}$ , são da forma:

$$(x, y, z) = P + \lambda\vec{u} = (14, 5, 0) + \lambda(2, 3, -1) = (14 + 2\lambda, 5 + 3\lambda, -\lambda)$$

Como o ponto  $P$  pertence ao plano  $PQR$  podemos determinar o valor de  $\lambda$  substituindo as coordenadas genéricas do ponto, na equação do plano:

$$2(14 + 2\lambda) + 3(5 + 3\lambda) - (-\lambda) - 15 = 0 \Leftrightarrow 28 + 4\lambda + 15 + 9\lambda + \lambda - 15 = 0 \Leftrightarrow 28 + 14\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14\lambda = -28 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-28}{14} \Leftrightarrow \lambda = -2$$

Desta forma temos que as coordenadas do ponto  $P$  são:

$$(14 + 2(-2), 5 + 3(-2), -(-2)) = (14 - 4, 5 - 6, 2) = (10, -1, 2)$$

Assim, calculado a distância entre os pontos  $P$  e  $S$ , temos:

$$\overline{PS} = \sqrt{(14 - 10)^2 + (5 - (-1))^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{4^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 36 + 4} = \sqrt{56}$$

Assim, calculando a área lateral, ou seja, das 6 faces laterais, e arredondando o resultado às décimas, temos:

$$A_{\text{lateral}} = 6 \times \overline{PQ} \times \overline{PS} = 6 \times 4 \times \sqrt{56} = 24\sqrt{56} \approx 179,6$$

Exame – 2018, 1.ª Fase

19. Como a base inferior do cilindro está contida no plano  $xOy$  então os centros das duas bases têm abscissas e ordenadas iguais. Como a cota do centro  $A$  é zero e a altura é 3, então as coordenadas do ponto  $C$  são  $(1, 2, 3)$

Assim, calculando as coordenadas do vetor  $\vec{BC}$ , temos:

$$\vec{BC} = C - B = (1, 2, 3) - (1, 3, 0) = (0, -1, 3)$$

E assim, uma equação vetorial da reta com a direção do vetor  $\vec{BC}$  e que contenha o ponto  $B$ , ou seja, a reta  $BC$ , é:

$$(x, y, z) = (1, 3, 0) + k(0, -1, 3), k \in \mathbb{R}$$

O ponto de interseção da reta  $BC$  com o plano  $xOz$  é o ponto da reta  $BC$  que tem ordenada nula, como todos os restantes pontos do plano  $xOz$ .

Assim, substituindo  $y = 0$  na equação da reta, podemos calcular de  $k$ , e depois, o valor da cota do ponto de interseção:

$$\begin{cases} x = 1 + 0k \\ y = 3 - k \\ z = 0 + 3k \end{cases} \underset{y=0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 1 \\ 0 = 3 - k \\ z = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = 3 \\ z = 3 \times 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = 3 \\ z = 9 \end{cases}$$

Ou seja as coordenadas do ponto de interseção da reta  $BC$  com o plano  $xOz$  são  $(1, 0, 9)$

Exame – 2017, Ép. especial





20. Sabemos que:

- ponto  $A$  pertence ao plano  $xOy$ , pelo que tem cota nula ( $z_A = 0$ )
- a aresta  $[DA]$  pertence ao plano  $xOy$  e é perpendicular ao eixo  $Oy$ , pelo que a ordenada do ponto  $A$  é igual à ordenada do ponto  $D$  ( $y_A = y_D = 4$ )

Assim, substituindo os valores da ordenada e da cota do ponto  $A$  na equação do plano  $ACG$ , podemos calcular o valor da abcissa ( $x_A$ ):

$$x_A + y_A - z_A - 6 = 0 \Leftrightarrow x_A + 4 + 0 - 6 = 0 \Leftrightarrow x_A - 2 = 0 \Leftrightarrow x_A = 2$$

Exame – 2017, 2.ª Fase

21. Como o ponto  $Q$  pertence ao eixo  $Oy$  tem abcissa e cota nulas, e como pertence ao plano  $PQV$  de equação  $x + y = 2$ , substituindo o valor da abcissa podemos calcular o valor da ordenada:

$$0 + y_Q = 2 \Leftrightarrow y_Q = 2$$

Assim, verificando que o ponto  $T$  tem coordenadas  $(0,0,3)$ , calculamos as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{TQ}$ :

$$\overrightarrow{TQ} = Q - T = (0,2,0) - (0,0,3) = (0,2, -3)$$

Assim, considerando  $\overrightarrow{TQ}$  é um vetor diretor da reta  $TQ$  e que o ponto  $Q$  pertence à reta, temos que uma equação vetorial da reta é:

$$(x,y,z) = (0,2,0) + \lambda(0,2, -3), \lambda \in \mathbb{R}$$

Exame – 2017, 1.ª Fase

22.

22.1. Como o plano  $OFB$  é definido pela equação  $3x + 3y - z = 0$ , então o vetor  $\vec{v} = (3,3, -1)$  é um vetor normal do plano  $OFB$ , e também de todos os planos paralelos a este plano.

Como a reta  $AF$  é paralela ao eixo  $Oz$ , então as abcissas e ordenadas dos pontos  $A$  e  $F$  são iguais, pelo que as coordenadas do ponto  $F$  são da forma  $F(0,2,z_F)$ , e como o ponto  $F$  pertence ao plano  $OFB$ , podemos determinar a sua cota, recorrendo à equação do plano:

$$3(0) + 3(2) - z_F = 0 \Leftrightarrow 0 + 6 = z_F \Leftrightarrow 6 = z_F$$

Como o ponto  $D$  tem a mesma cota do ponto  $F$  e a base do prisma é um quadrado paralelo ao plano  $xOy$ , pela observação da figura, temos que  $x_D = -y_F$  e as coordenadas do ponto  $D$  são  $D(-2,0,6)$ . Finalmente, como o plano paralelo ao plano  $OFB$  que contém o ponto  $D$  tem uma equação da forma  $3x + 3y - z + d = 0$ , substituindo as coordenadas do ponto  $D$ , podemos determinar o valor de  $d$ :

$$3(-2) + 3(0) - 6 + d = 0 \Leftrightarrow -6 + 0 - 6 + d = 0 \Leftrightarrow d = 12$$

E assim, a equação do plano é:

$$3x + 3y - z + 12 = 0$$

22.2. Como o ponto  $B$  tem a mesma cota do ponto  $A$  e a base do prisma é um quadrado contido no plano  $xOy$ , pela observação da figura, temos que  $x_B = -y_A$  e as coordenadas do ponto  $B$  são  $D(-2,2,0)$ . Desta forma, um vetor diretor da reta  $OB$  é

$$\overrightarrow{OB} = B - O = (-2,2,0) - (0,0,0) = (-2,2,0)$$

E uma equação vetorial da reta  $OB$  é:

$$(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(-2,2,0), \lambda \in \mathbb{R}$$

Exame – 2016, Ép. especial

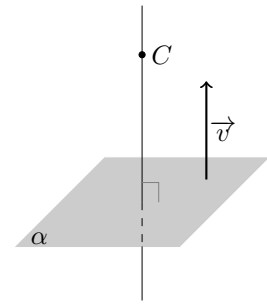


23. Como um vetor normal de um plano define uma direção perpendicular ao plano, um destes vetores é também um vetor diretor de qualquer reta perpendicular ao plano.

Assim, como  $\vec{v} = (3,2,4)$  é um vetor normal do plano  $\alpha$ , também é um vetor diretor da reta perpendicular ao plano  $\alpha$  e que contém o ponto  $C(2,1,4)$

Assim, uma equação vetorial da reta, é:

$$(x,y,z) = (2,1,4) + \lambda(3,2,4), \lambda \in \mathbb{R}$$



Exame – 2016, 2.ª Fase

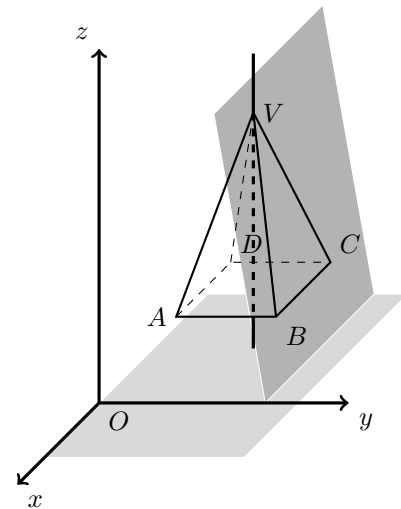
24. As coordenadas do ponto  $V$  podem ser determinadas pela interseção do plano  $BCV$  e da reta perpendicular à base da pirâmide que contém a projeção vertical do ponto  $V$  no plano  $xOy$ . Esta reta pode ser definida como a interseção dos planos medidores dos segmentos  $[AB]$  e  $[BC]$ :

$$x = -2 \wedge y = 2$$

E assim, fazendo a substituição na equação do plano  $BCV$ , calculamos a cota do ponto  $V$ :

$$3(2) + z = 10 \Leftrightarrow z = 10 - 6 \Leftrightarrow z = 4$$

Ou seja, as coordenadas do ponto  $V$  são  $(-2,2,4)$



Exame – 2016, 1.ª Fase

25. Como a reta  $OP$  é perpendicular ao plano  $\beta$ , qualquer vetor com a direção da reta (e em particular o  $\overrightarrow{OP}$ ) e o vetor normal do plano  $\vec{u}$  são colineares.

Temos que  $\vec{u} = (2, -1, 1)$  e  $\overrightarrow{OP} = P - O = (-2, 1, 3a) - (0, 0, 0) = (-2, 1, 3a)$

Como os vetores são colineares, temos que  $\overrightarrow{OP} = \lambda \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}$

$$(-2, 1, 3a) = \lambda(2, -1, 1) \Leftrightarrow -2 = 2\lambda \wedge 1 = -\lambda \wedge 3a = \lambda \Leftrightarrow -1\lambda \wedge -1 = \lambda \wedge a = \frac{\lambda}{3}$$

Logo, temos que:

$$a = \frac{-1}{3} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$$

Exame – 2015, Ép. especial



26.

- 26.1. Como a pirâmide que integra o sólido é regular, a projeção ortogonal do vértice  $V$  no plano da base coincide com o centro geométrico da base,  $V$  pertence ao plano de equação  $x = 1$  e  $y = 1$ , ou seja tem de coordenadas  $(1,1,k)$ ,  $k \in \mathbb{R}$

Como o ponto  $V$  também pertence ao plano de equação  $6x + z - 12 = 0$ , podemos calcular a cota do ponto fazendo a substituição  $x = 1$ , na equação deste plano:

$$6(1) + z - 12 = 0 \Leftrightarrow 6 + z = 12 \Leftrightarrow z = 12 - 6 \Leftrightarrow z = 6$$

Assim, temos que as coordenadas do ponto  $V$  são  $(1,1,6)$

- 26.2. Como se pretende escrever uma equação de um plano perpendicular à reta  $OR$ , o vetor  $\overrightarrow{OR}$  é um vetor normal do plano. Como  $O$  é a origem do referencial, as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{OR}$ , coincidem com as do ponto  $R$ , ou seja

$$\overrightarrow{OR} = (2,2,2)$$

Assim, temos que a equação do plano pretendido pode ser da forma  $2x + 2y + 2z + d = 0$

Como o ponto  $P$  pertence ao eixo  $Ox$  e o cubo tem aresta 2, temos que as suas coordenadas são  $P(2,0,0)$ . Para determinar o valor de  $d$ , na equação do anterior, substituímos as coordenadas do ponto  $P$ , porque as estas verificam a equação do plano, porque o ponto pertence ao plano:

$$2(2) + 2(0) + 2(0) + d = 0 \Leftrightarrow 4 + 0 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -4$$

Pelo que, uma equação cartesiana do plano que passa no ponto  $P$  e é perpendicular à reta  $OR$  é

$$2x + 2y + 2z - 4 = 0$$

Ou, simplificando,  $x + y + z - 2 = 0$

Exame – 2015, 2.ª Fase

27. Pela observação da equação do plano  $\alpha$ , temos que um vetor normal é  $\vec{u} = (1, -2, 1)$

Assim, um plano paralelo ao plano  $\alpha$ , pode ser definido à custa de um qualquer vetor colinear com  $\vec{u}$ , e em particular, à custa do mesmo vetor, pelo que uma equação de um plano paralelo a  $\alpha$  é

$$x - 2y + z + d = 0, (d \in \mathbb{R})$$

Como se pretende que o plano contenha o ponto  $A(0,0,2)$ , substituindo as coordenadas do ponto  $A$  na expressão anterior, vem

$$0 - 2(0) + 2 + d = 0 \Leftrightarrow 2 = d \Leftrightarrow d = -2$$

pelo que uma equação do plano que passa no ponto  $A$  e é paralelo ao plano  $\alpha$ , é

$$x - 2y + z - 2 = 0$$

Exame – 2015, 1.ª Fase



28. Os planos definidos pelas equações das opções (C) e (D) não contêm o ponto  $A$ , porque substituindo as coordenadas do ponto nas equações, obtemos proposições falsas:

$$(C) 2(1) - 3(0) + (3) = 0 \Leftrightarrow 2 - 0 + 3 = 0 \Leftrightarrow 5 = 0 \text{ e } (D) 3(1) + 2(0) = 0 \Leftrightarrow 3 + 0 = 0 \Leftrightarrow 3 = 0$$

O plano definido pela equação da opção (A) não é perpendicular ao plano  $\alpha$ , porque os respectivos vetores normais  $\vec{v}_\alpha = (3,2,0)$  e  $\vec{v}_A = (3,2,0)$  são colineares, ou seja, os planos são paralelos e não perpendiculares.

O plano definido pela equação da opção (B) é perpendicular ao plano  $\alpha$ , porque os respectivos vetores normais  $\vec{v}_\alpha = (3,2,0)$  e  $\vec{v}_B = (2, -3, -1)$  têm um produto escalar nulo, ou seja são perpendiculares, assim, como os planos:

$$\vec{v}_\alpha \cdot \vec{v}_B = (3,2,0) \cdot (2, -3, -1) = 3 \times 2 + 2(-3) + 0(-1) = 6 - 6 + 0 = 0$$

e este plano contém o ponto  $A$ , porque com a substituição das coordenadas deste ponto, obtemos uma proposição verdadeira:

$$2(1) - 3(0) - 3 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 - 0 - 3 + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Resposta: **Opção B**

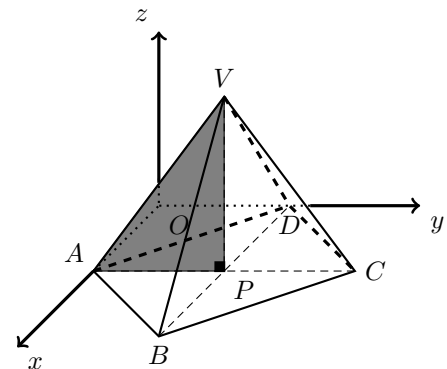
Exame – 2014, 2.<sup>a</sup> Fase

29.

- 29.1. Como o vértice  $V$  tem abscissa e ordenada iguais a 6, então  $\overline{AP} = 6$  e a base da pirâmide pertence ao plano  $xOy$  e é perpendicular à altura da pirâmide, então a cota é a medida do outro cateto do triângulo  $[APV]$ , retângulo em  $P$ , cuja hipotenusa mede 10 ( $\overline{AV} = 10$ )

Assim, calculando a cota do vértice  $V$  ( $z_V = \overline{PV}$ ), temos:

$$\begin{aligned} \overline{PV}^2 + \overline{AP}^2 &= \overline{AV}^2 \Leftrightarrow \overline{PV}^2 + 6^2 = 10^2 \Leftrightarrow \overline{PV}^2 = 100 - 36 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{PV}^2 &= 64 \Leftrightarrow \overline{PV} = \pm\sqrt{64} \underset{\overline{PV} > 0}{\Rightarrow} \overline{PV} = 8 \end{aligned}$$



- 29.2. O ponto  $B$  tem de coordenadas  $(12,6,0)$  e o ponto  $V$ ,  $(6,6,8)$ , pelo que as coordenadas do ponto  $M$  são:

$$\left( \frac{12+6}{2}, \frac{6+6}{2}, \frac{8+0}{2} \right) = \left( \frac{18}{2}, \frac{12}{2}, \frac{8}{2} \right) = (9,6,4)$$

Como o ponto  $C$  tem coordenadas  $(6,12,0)$ , calculando as coordenadas do vetor  $\vec{CM}$ , temos:

$$\vec{CM} = M - C = (9,6,4) - (6,12,0) = (3, -6,4)$$

E assim, uma equação vetorial da reta com a direção do vetor  $\vec{CM}$  e que contenha o ponto  $C$ , ou seja, a reta  $CM$ , é:

$$(x,y,z) = (6,12,0) + k(3, -6,4), k \in \mathbb{R}$$



29.3. Como o ponto  $D$  tem coordenadas  $(0,6,0)$ , calculando as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{DV}$ , temos:

$$\overrightarrow{DV} = V - D = (6,6,8) - (0,6,0) = (6,0,8)$$

E assim, uma equação cartesiana do plano que é perpendicular à aresta  $[DV]$ , é da forma

$$6x + 0y + 8z + d = 0 \Leftrightarrow 6x + 8z + d = 0$$

Desta forma, podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo as coordenadas do ponto  $P$ , ou seja, as coordenadas  $(6,6,0)$  na equação anterior, garantindo que a equação representa um plano que contém o ponto  $P$ :

$$6(6) + 8(0) + d = 0 \Leftrightarrow 36 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -36$$

Logo, uma equação cartesiana do plano que passa no ponto  $P$  e que é perpendicular à aresta  $[DV]$ , é:

$$6x + 8z - 36 = 0 \Leftrightarrow 6x + 8z = 36$$

Teste Intermédio 12.º ano – 30.04.2014

30. Como dois planos paralelos admitem o mesmo vetor normal, temos que qualquer plano definido por uma equação da forma  $x + y + 2z = d$ ,  $d \in \mathbb{R}$  é paralelo ao plano  $ABC$

Desta forma, podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo as coordenadas do ponto  $D$  na equação anterior, garantindo que a equação representa um plano que contém o ponto  $D$ :

$$1 + 2 + 2 \times 3 = d \Leftrightarrow 3 + 6 = d \Leftrightarrow d = 9$$

Logo, uma equação cartesiana do plano que passa no ponto  $D$  e que é paralelo ao plano  $ABC$ , é:

$$x + y + 2z = 9$$

Teste Intermédio 11.º ano – 11.03.2014

31.

31.1. Como o plano  $FGH$  contém as arestas  $[FG]$  e  $[GH]$  do cubo, que são perpendiculares à aresta  $[FA]$ , então o vetor  $\overrightarrow{FA}$  é um vetor normal do plano  $FGH$ , e assim, uma equação cartesiana do plano que é perpendicular à aresta  $[FA]$ , é da forma

$$2x + 3y + 6z + d = 0$$

Desta forma, podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo as coordenadas do ponto  $F$ , na equação anterior, porque o plano  $FGH$  contém o ponto  $F$ :

$$2(1) + 3(3) + 6(-4) + d = 0 \Leftrightarrow 2 + 9 - 24 + d = 0 \Leftrightarrow d = 24 - 11 \Leftrightarrow d = 13$$

Logo, uma equação cartesiana do plano  $FGH$  é:

$$2x + 3y + 6z + 13 = 0$$



- 31.2. Como o plano  $HCD$  é perpendicular à reta  $EF$ , o vetor  $\vec{u} = (6, 2, -3)$ , vetor normal do plano é um vetor diretor da reta, ou seja, a reta  $EF$  é definida pela equação vetorial  $(x, y, z) = F + k\vec{u}, k \in \mathbb{R}$ . Assim, todos os pontos da reta  $EF$ , e em particular o ponto  $E$ , para  $k \in \mathbb{R}$ , são da forma:

$$(x, y, z) = F + k\vec{u} = (1, 3, -4) + k(6, 2, -3) = (1 + 6k, 3 + 2k, -4 - 3k)$$

Como todos os pontos do plano  $HCD$ , e em particular o ponto  $E$ , verificam a equação  $6x + 2y - 3z + 25 = 0$ , podemos calcular o valor de  $k$  relativo à forma genérica dos pontos da reta  $EF$ :

$$\begin{aligned} 6(1 + 6k) + 2(3 + 2k) - 3(-4 - 3k) + 25 &= 0 \Leftrightarrow 6 + 36k + 6 + 4k + 12 + 9k + 25 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 36k + 4k + 9k &= -25 - 12 - 6 - 6 \Leftrightarrow 49k = -49 \Leftrightarrow k = -\frac{49}{49} \Leftrightarrow k = -1 \end{aligned}$$

E assim, considerando  $k = -1$  na forma genérica dos pontos da reta  $EF$ , obtemos as coordenadas do ponto  $E$ :

$$E = F - \vec{u} = (1, 3, -4) - (6, 2, -3) = (-5, 1, -1)$$

Teste Intermédio 11.º ano – 06.03.2013

32. Como um vetor normal do plano  $\beta$  tem a direção perpendicular ao plano, e o vetor diretor da reta  $s$  tem a direção da reta, então se a reta  $s$  é paralela ao plano  $\beta$ , o vetor normal do plano e o vetor diretor da reta devem ser perpendiculares, ou seja, o produto escalar deve ser nulo.

Assim, identificando as coordenadas do vetor diretor da reta  $s$ ,  $\vec{u} = (1, 1, -1)$ , e do vetor normal do plano  $\beta$ ,  $\vec{v} = (3, 3, a)$ , temos que o valor de  $a$ , para o qual a reta  $s$  é paralela ao plano  $\beta$ , é:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (1, 1, -1) \cdot (3, 3, a) = 0 \Leftrightarrow 1 \times 3 + 1 \times 3 + (-1) \times a = 0 \Leftrightarrow 3 + 3 - a = 0 \Leftrightarrow 6 = a$$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 11.º ano – 09.02.2012

33. Como o plano que contém a base é perpendicular à altura, temos que o plano  $ABC$  é perpendicular à reta  $FE$ , ou seja, o vetor  $\vec{FE}$  é um vetor normal do plano  $ABC$

Assim, o plano  $ABC$  é definido por uma equação da forma

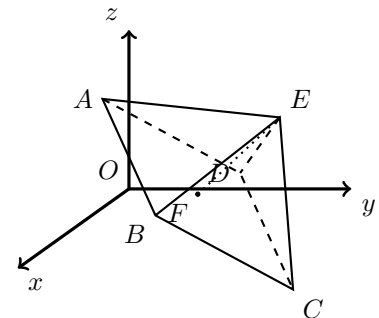
$$-x + 2y + 2z + d = 0$$

E podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo as coordenadas do ponto  $F$ , na equação anterior, porque o plano  $ABC$  contém o ponto  $F$ :

$$-(-2) + 2(1) + 2(-1) + d = 0 \Leftrightarrow 2 + 2 - 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$$

Desta forma, temos que o plano  $ABC$  pode ser definido pela equação

$$-x + 2y + 2z - 2 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 2z + 2 = 0$$



Teste Intermédio 11.º ano – 09.02.2012



34.

- 34.1. Qualquer plano paralelo ao plano  $QTV$  pode ser definido pelo mesmo vetor normal, pelo que a equação cartesiana que o define é da forma:

$$5x + 2y + 2z = d$$

Como o plano deve conter a origem do referencial, podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo as coordenadas da origem, na equação anterior:

$$5(0) + 2(0) + 2(0) = d \Leftrightarrow 0 = d$$

E assim a equação que define o plano paralelo ao plano  $QTV$  e passa na origem do referencial é:

$$5x + 2y + 2z = 0$$

- 34.2. Como a projeção vertical do vértice  $V$  sobre a base da pirâmide é o ponto de coordenadas  $(2, -2, 0)$ , a altura do prisma é a cota do vértice  $V$ , e pode ser calculada substituindo a abcissa e a ordenada na equação do plano  $QTV$ :

$$5(2) + 2(-2) + 2z = 12 \Leftrightarrow 10 - 4 + 2z = 12 \Leftrightarrow 2z = 12 - 10 + 4 \Leftrightarrow z = \frac{6}{2} \Leftrightarrow z = 3$$

Desta forma o volume do poliedro  $[VNOPQRST]$ , pode ser calculado como a soma do volume de um cubo de lado 4, e uma pirâmide quadrangular cujo lado da base é 4 e a altura é 3:

$$V_{[VNOPQRST]} = x_V^3 + \frac{1}{3} \times x_U^2 \times z_V = 4^3 + \frac{4^2 \times 3}{3} = 64 + 16 = 80$$

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2011

35. Como o ponto  $A$  pertence ao eixo  $Ox$ , tem ordenada e cota nulas, pelo que a abcissa pode ser calculada substituindo estas coordenadas na equação do plano  $ABC$ :

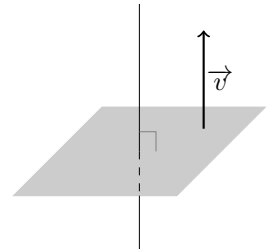
$$6x + 3(0) + 4(0) = 12 \Leftrightarrow 6x + 0 + 0 = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{6} \Leftrightarrow x = 2$$

Desta forma as coordenadas do ponto  $A$  são  $(2, 0, 0)$  e como a reta  $r$  é perpendicular ao plano  $ABC$ , então o vetor normal do plano,  $\vec{v} = (6, 3, 4)$ , é também o vetor diretor da reta.

E assim, uma equação vetorial da reta  $r$  é:

$$(x, y, z) = A + k \cdot \vec{v}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y, z) = (2, 0, 0) + k(6, 3, 4), k \in \mathbb{R}$$

Teste Intermédio 11.º ano – 06.05.2010



36.

- 36.1. Como o ponto  $A$  pertence ao eixo  $Ox$ , tem ordenada e cota nulas, pelo que a abcissa pode ser calculada substituindo estas coordenadas na equação do plano  $ADV$ :

$$6x + 18(0) - 5(0) = 24 \Leftrightarrow 6x + 0 - 0 = 24 \Leftrightarrow x = \frac{24}{6} \Leftrightarrow x = 4$$

Desta forma as coordenadas do ponto  $A$  são  $(4, 0, 0)$  e assim podemos calcular a medida do lado da base da pirâmide:

$$\overline{AB} = \sqrt{(5-4)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{1+9+0} = \sqrt{10}$$

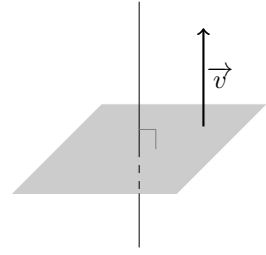
Como o ponto  $V$  tem cota 6 que é a altura da pirâmide, então o volume é:

$$V_{[ABCDV]} = \frac{1}{3} \times \overline{AB}^2 \times z_V = \frac{(\sqrt{10})^2 \times 6}{3} = 10 \times 2 = 20$$



- 36.2. Como a reta  $r$  é perpendicular ao plano  $ADV$ , então o vetor normal do plano,  $\vec{v} = (6, 18, -5)$ , é também o vetor diretor da reta, e como a reta contém o ponto  $S(-1, -15, 5)$ , então uma condição vetorial da reta  $r$  é:

$$(x, y, z) = (-1, -15, 5) + \lambda(6, 18, -5), \lambda \in \mathbb{R}$$



Verificando se existe um valor de  $\lambda$  que seja compatível com as coordenadas do ponto  $B$ , temos que:

$$\begin{cases} 5 = -1 + 6\lambda \\ 3 = -15 + 18\lambda \\ 0 = 5 - 5\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5+1}{6} = \lambda \\ \frac{3+15}{18} = \lambda \\ 5\lambda = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{6} = \lambda \\ \frac{18}{18} = \lambda \\ \lambda = \frac{5}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda \\ 1 = \lambda \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Logo, podemos concluir que as coordenadas do ponto  $B$  satisfazem a condição da reta  $r$ , ou seja, o ponto  $B$  pertence à reta  $r$

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2010

37.

- 37.1. Como a base do prisma é um quadrado em que um dos vértices coincide com a origem e os vértices adjacentes estão sobre os semieixos positivos  $Ox$  e  $Oy$ , então a abcissa e a ordenada do ponto  $P$  são iguais.

Designado por  $a$ , a abcissa do ponto  $P$ , temos que a área da base do prisma é:

$$A = a \times a = a^2$$

A altura do prisma é a cota do ponto  $P$ , que pode ser determinada substituindo na equação do plano  $ABC$  a abcissa e a ordenada por  $a$ :

$$a + 2a + 3z_P = 9 \Leftrightarrow 3a + 3z_P = 9 \Leftrightarrow z_P = \frac{9 - 3a}{3} \Leftrightarrow z_P = 3 - a$$

Desta forma o volume do prisma é dado por:

$$V = A \times z_P = a^2 \times (3 - a) = 3a^2 - a^3$$

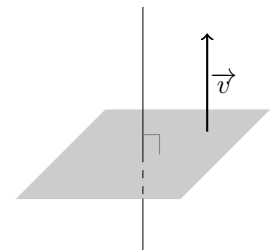
- 37.2. Como o ponto  $A$  pertence ao eixo  $Ox$ , tem ordenada e cota nulas, pelo que a abcissa pode ser calculada substituindo estas coordenadas na equação do plano  $ABC$ :

$$x + 2(0) + 3(0) = 9 \Leftrightarrow x + 0 + 0 = 9 \Leftrightarrow x = 9$$

Desta forma as coordenadas do ponto  $A$  são  $(9, 0, 0)$  e como a reta  $r$  é perpendicular ao plano  $ABC$ , então o vetor normal do plano,  $\vec{v} = (1, 2, 3)$ , é também o vetor diretor da reta.

E assim, uma equação vetorial da reta  $r$  é:

$$(x, y, z) = A + \lambda \cdot \vec{v}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y, z) = (9, 0, 0) + \lambda(1, 2, 3), \lambda \in \mathbb{R}$$



Teste Intermédio 11.º ano – 07.05.2009





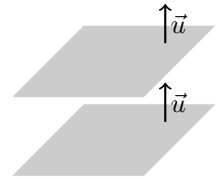
38.

- 38.1. Como o plano  $\gamma$  é paralelo ao plano  $\alpha$ , o vetor normal do plano  $\alpha$ ,  $\vec{u} = (1, 2, -2)$  também é um vetor normal do plano  $\gamma$ , pelo que este plano é definido por uma equação da forma:

$$x + 2y - 2z = d$$

Como as coordenadas do ponto  $V$  são  $(1, 2, 6)$ , e o ponto  $V$  pertence ao plano  $\gamma$ , podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

$$1 + 2(2) - 2(6) = d \Leftrightarrow 1 + 4 - 12 = d \Leftrightarrow d = -7$$



E assim, uma equação que define o plano paralelo ao plano  $QTV$  e passa na origem do referencial é:

$$x + 2y - 2z = -7$$

- 38.2. Se os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são perpendiculares, então os respectivos vetores normais também são perpendiculares.

Assim, identificando os dois vetores normais  $\vec{u} = (1, 2, -2)$  e  $\vec{v} = (2, -1, 1)$  e calculando o produto escalar, temos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 2, -2) \cdot (2, -1, 1) = 1 \times 2 + 2 \times (-1) + (-2) \times 1 = 2 - 2 - 2 = -2$$

Desta forma, como  $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$ , podemos concluir que os planos  $\alpha$  e  $\beta$  não são perpendiculares.

Teste Intermédio 11.º ano – 29.01.2009

39. Como  $x = 1$ , a abcissa de  $A$  é  $x$  e o vértice  $A$  tem sempre abcissa igual à ordenada, então as coordenadas do ponto  $A$  são  $(1, 1, 0)$

Como a pirâmide é regular e o vértice está sobre o eixo  $Oz$ , então o ponto  $B$  é simétrico do ponto  $A$  relativamente ao plano  $yOz$ , ou seja, as coordenadas do ponto  $B$  são  $(-1, 1, 0)$

Como o ponto  $E$  pertence ao semieixo positivo  $Oz$ , tem abcissa e ordenada nulas e a cota  $c$  verifica a condição  $x + c = 6$ , ou seja,  $1 + c = 6 \Leftrightarrow c = 5$ , pelo que as coordenadas do ponto  $E$  são  $(0, 0, 5)$

Para determinar uma equação do plano  $ABE$ , vamos determinar as coordenadas de dois vetores, não colineares, do plano  $ABE$ :

$$\vec{AB} = B - A = (-1, 1, 0) - (1, 1, 0) = (-2, 0, 0)$$

$$\vec{AE} = E - A = (0, 0, 5) - (1, 1, 0) = (-1, -1, 5)$$

Podemos agora determinar as coordenadas de um vetor perpendicular aos dois vetores do plano ( $\vec{u} = (a, b, c)$ ), que é um vetor normal do plano  $ABE$ :

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (-2, 0, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-1, -1, 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 0 \\ -a - b + 5c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 5c = b \end{cases}$$

Assim temos que qualquer vetor normal ao plano  $ABE$  é da forma  $\vec{u} = (0, 5c, c)$ ,  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  Ou seja, concretizando um valor para  $c$ , por exemplo,  $c = 1$ , vem  $\vec{u} = (0, 5, 1)$ , pelo que a equação do plano  $ABE$  é da forma:

$$5y + z = d$$

E recorrendo às coordenadas do ponto  $A$  que pertence ao plano  $ABE$ , podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

$$5(1) + 0 = d \Leftrightarrow d = 5$$

E assim, uma equação do plano  $ABE$  é  $5y + z = 5$

Teste Intermédio 11.º ano – 06.05.2008



40. Identificando os vetores normais do plano  $\alpha$  ( $\vec{u} = (1, 1, -1)$ ) e do plano  $\beta$  ( $\vec{v} = (2, 2, -2)$ ) e observando que  $\vec{v} = 2\vec{u}$ , ou seja, que os vetores normais dos dois planos são colineares, podemos afirmar que os planos são paralelos.

Assim, se os planos forem estritamente paralelos, não têm qualquer ponto em comum, e por isso, a intersecção dos planos  $\alpha$  e  $\beta$  é o conjunto vazio; ou, em alternativa, se tiverem, pelo menos um ponto m comum, os planos são coincidentes e a sua intersecção é um plano.

Considerando, por exemplo o ponto de coordenadas  $(1, 0, 0)$ , podemos verificar que pertence ao plano  $\alpha$ , porque  $1 + 0 - 0 = 1$ , mas não pertence ao plano  $\beta$  porque  $2(1) + 2(0) - 2(0) \neq 1$ , e assim, o que nos permite afirmar que os dois planos são estritamente paralelos e, por isso, a intersecção dos planos  $\alpha$  e  $\beta$  é o conjunto vazio.

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 11.º ano – 24.01.2008

41. De acordo com a sugestão, começamos por determinar a equação do plano  $\alpha$ . Como o plano é perpendicular à reta, então o vetor diretor da reta,  $\vec{v} = (1, 0, 2)$ , é também o vetor normal do plano, pelo que a equação do plano  $\alpha$  é da forma:

$$x + 2z = d$$

E recorrendo às coordenadas do ponto  $P(0, 4, 3)$  que pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

$$0 + 2(3) = d \Leftrightarrow d = 6$$

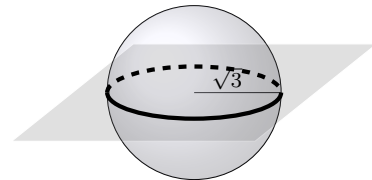
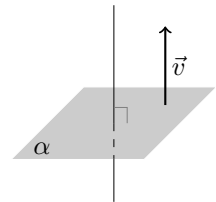
E assim, uma equação do plano  $\alpha$  é  $x + 2z = 6$

Ainda de acordo com a sugestão, podemos verificar que o centro da esfera pertence ao plano  $\alpha$ , porque as suas coordenadas  $(-2, 1, 4)$  verificam a equação do plano  $-2 + 2(4) = 6$

Como o centro da esfera pertence ao plano  $\alpha$ , a intersecção da esfera com o plano é um círculo de raio igual ao da esfera.

Observando a equação da esfera podemos verificar que o raio da esfera (e do círculo) é  $\sqrt{3}$ , pelo que a área da secção é:

$$A_o = \pi r^2 \Leftrightarrow \pi \times (\sqrt{3})^2 = 3\pi$$



Teste Intermédio 11.º ano – 10.05.2007



42. Como a base  $[EFGH]$  do paralelepípedo está contida no plano  $xOy$  e a aresta  $[GF]$  está contida no eixo  $Oy$ , então a aresta  $[GH]$  é perpendicular ao eixo  $Oy$  e assim as coordenadas do ponto  $G$  são  $(0, -2, 0)$

Para determinar uma equação do plano  $AGH$ , vamos determinar as coordenadas de dois vetores, não colineares, do plano  $AGH$ :

$$\overrightarrow{GH} = H - G = (1, -2, 0) - (0, -2, 0) = (1 - 0, -2 - (-2), 0 - 0) = (1, 0, 0)$$

$$\overrightarrow{GA} = A - G = (1, 1, 1) - (0, -2, 0) = (1 - 0, 1 - (-2), 1 - 0) = (1, 3, 1)$$

Podemos agora determinar as coordenadas de um vetor perpendicular aos dois vetores do plano  $(\vec{u} = (a, b, c))$ , que é um vetor normal do plano  $AGH$ :

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 0, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, 3, 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -3b \end{cases}$$

Assim temos que qualquer vetor normal ao plano  $AGH$  é da forma  $\vec{u} = (0, b, -3b)$ ,  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  Ou seja, concretizando um valor para  $b$ , por exemplo,  $b = 1$ , vem  $\vec{u} = (0, 1, -3)$ , pelo que a equação do plano  $AGH$  é da forma:

$$y - 3z + d = 0$$

E recorrendo às coordenadas do ponto  $G$  que pertence ao plano  $AGH$ , podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

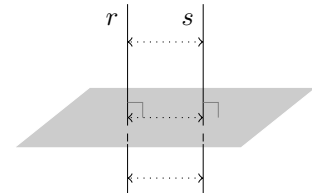
$$-2 - 3(0) + d = 0 \Leftrightarrow d = 2$$

E assim, uma equação do plano  $AGH$  é  $y - 3z + 2 = 0$

Exame – 2001, Prova de reserva (cód. 135)

43. Como as duas retas são perpendiculares ao mesmo plano, são paralelas entre si, e portanto, coplanares, não concorrentes e não perpendiculares.

Resposta: **Opção C**



Exame – 2001, Ép. especial (cód. 135)

44. Observando as opções apresentadas, podemos excluir as opções (B) e (D), porque os vetores normais de cada um dos planos apresentados não é colinear com o vetor normal do plano  $\alpha$

Como o ponto  $(0, 1, 2)$  pertence ao plano  $\beta$ , substituindo as coordenadas do ponto em cada uma das restantes opções, podemos verificar que uma equação deste plano é a opção (C), porque  $-0 - 2(1) + 2 = 0$  e não a opção (A) porque  $0 + 2(1) - 2 \neq 1$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2001, 2.ª fase (cód. 135)



45. Como três dos vértices do cubo estão sobre os eixos coordenados, pela observação da figura podemos concluir que a face  $[OEF G]$  pertence ao plano  $xOy$

Como o ponto  $H$  é o centro da face  $[OGFE]$ , o vértice  $O$  é a origem do referencial e as arestas  $[OE]$  e  $[OG]$  pertencem aos eixos  $Ox$  e  $Oy$ , respectivamente, então a abscissa e a ordenada do ponto  $H$  são iguais e o seu valor numérico é igual a metade do comprimento da aresta do cubo  $\left(\frac{\overline{OE}}{2}\right)$ .

Assim, temos que as coordenadas do ponto  $H$  são  $\left(\frac{\overline{OE}}{2}, \frac{\overline{OE}}{2}, 0\right)$ , e, substituindo na equação do plano temos:

$$\frac{\overline{OE}}{2} + \frac{\overline{OE}}{2} = 10 \Leftrightarrow 2 \times \frac{\overline{OE}}{2} = 10 \Leftrightarrow \overline{OE} = 10$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

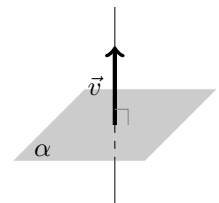
46.

- 46.1. Como a altura da pirâmide é perpendicular à base, então a reta dada é perpendicular ao plano da base, pelo que o vetor diretor da reta,  $\vec{v} = (6, -8, 0)$ , é também um vetor normal do plano, e assim a equação do plano é da forma:

$$6x - 8y = d$$

E como a origem pertence ao plano da base, podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo as coordenadas, na equação anterior:

$$6(0) - 8(0) = d \Leftrightarrow d = 0$$



Logo, escrevendo e simplificando uma equação do plano que contém a base da pirâmide, temos:

$$6x - 8y = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y = 0$$

- 46.2. O ponto de coordenadas  $(4,3,5)$  pertence à reta que contém a altura porque as suas coordenadas verificam a equação vetorial da reta, para  $k = \frac{1}{2}$ :

$$(4,3,5) = (7, -1,5) + k(6, -8, 0) \Leftrightarrow (4,3,5) = (7 + 6k, -1 - 8k, 5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 7 + 6k \\ 3 = -1 - 8k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 7 = 6k \\ 3 + 1 = -8k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-3}{6} = k \\ \frac{4}{-8} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} = k \\ -\frac{1}{2} = k \end{cases}$$

Cumulativamente o ponto de coordenadas  $(4,3,5)$  também pertence ao plano que contém a base, porque as suas coordenadas verificam a equação do plano:

$$3(4) - 4(3) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

E assim temos que o ponto de coordenadas  $(4,3,5)$  pertence à reta que contém a altura da pirâmide e também à base, pelo que é o centro da base, porque a pirâmide é regular.

Exame – 2001, Prova Modelo (cód. 135)

Exame – 2000, 2.ª Fase (cód. 135)



47.

- 47.1. Como a reta  $OT$  é perpendicular ao plano  $ABC$ , o vetor normal do plano ( $\vec{v} = (2,3,1)$ ) é também um vetor diretor da reta.

Como a reta contém a origem do referencial, podemos definir a reta  $OT$  pela condição:

$$(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(2,3,1), \lambda \in \mathbb{R}$$

Como o ponto  $R$  tem ordenada 6, e o plano  $RQT$  é paralelo ao plano  $xOz$ , então o plano  $RQT$  é definido pela equação  $y = 6$ , pelo que a ordenada do ponto  $T$  é 6

Assim, substituindo o valor da ordenada na condição anterior, podemos calcular o valor de  $\lambda$  associado ao ponto  $T$ , e depois as restantes coordenadas do ponto:

$$\begin{cases} x = 0 + 2\lambda \\ y = 0 + 3\lambda \\ z = 0 + \lambda \end{cases} \stackrel{y=6}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 2\lambda \\ 6 = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \times 2 \\ \frac{6}{3} = \lambda \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 2 = \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

Logo, o ponto  $T$  tem coordenadas  $(4,6,2)$

- 47.2. Como o plano deve ser paralelo ao plano  $ABC$ , o vetor normal do plano  $ABC$  ( $\vec{v} = (2,3,1)$ ) é também um vetor normal deste plano, pelo que a sua equação é da forma:

$$2x + 3y + z = d$$

Como o ponto  $Q$  pertence ao plano  $xOy$ , tem cota nula, e as restantes coordenadas iguais ao ponto  $T$ , ou seja, o ponto  $Q$  tem coordenadas  $(4,6,0)$ , e assim podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

$$2(4) + 3(6) + 0 = d \Leftrightarrow 8 + 18 = d \Leftrightarrow d = 26$$

E assim, uma equação do plano que é paralelo ao plano  $ABC$  e que contém o ponto  $Q$ , é:

$$2x + 3y + z = 26$$

Exame – 2000, Prova 2 para Militares (cód. 135)

48. Escrevendo a condição dada na forma equivalente

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5^2 \wedge x - y + 0z = 0$$

Podemos observar que a condição define o conjunto de pontos na interseção da superfície esférica de centro no ponto de coordenadas  $(1,1,1)$  e raio 5, com o plano que contém a origem e tem como vetor normal o vetor  $\vec{v} = (1, -1, 0)$

Podemos ainda observar que o centro da circunferência pertence ao plano, porque a abcissa e a ordenada são iguais, pelo que a interseção da superfície esférica com o plano é uma circunferência de raio 5.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2000, Prova para Militares (cód. 135)

Exame – 2000, Ép. Especial (cód. 135)



49. O vértice do cone é o ponto da reta  $r$  que está sobre o eixo  $Ox$ , ou seja o ponto da reta  $r$  com ordenada e cota nulas.

A partir da equação vetorial da reta, podemos determinar o valor de  $k$  associado à ordenada nula, e depois, o valor correspondente da abscissa:

$$(x, y, z) = (0, 3, 0) + k(3, -1, 0), k \in \mathbb{R}$$

$$y = 3 + k(-1) \Leftrightarrow y = 3 - k \underset{y=0}{\Rightarrow} 0 = 3 - k \Leftrightarrow k = 3$$

$$x = 0 + k(3) \Leftrightarrow x = 3k \underset{k=3}{\Rightarrow} x = 3 \times 3 \Leftrightarrow x = 9$$

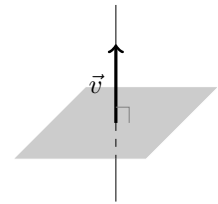
Como todos os pontos da reta  $r$  têm cota nula ( $z = 0 + 0k$ ), então o vértice do cone é o ponto de coordenadas  $(9, 0, 0)$

Como o plano é perpendicular à reta  $r$ , vetor diretor da reta ( $\vec{v} = (3, -1, 0)$ ) é um vetor normal do plano, e assim a equação do plano é da forma:

$$3x - y = d$$

E como o vértice do cone pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo as coordenadas, na equação anterior:

$$3(9) - (0) = d \Leftrightarrow d = 27$$



E assim, uma equação do plano que contém o vértice do cone e é perpendicular à reta  $r$ , é  $3x - y = 27$

Exame – 2000, Ép. Especial (cód. 135)  
Exame – 2000, Prova para Militares (cód. 135)



50. Como o ponto  $B$  pertence ao eixo  $yOz$  então tem abcissa nula; como a base da pirâmide é paralela ao plano  $xOy$ , o ponto  $B$  tem cota igual ao ponto  $A$  e como o ponto  $D$  pertence ao plano  $xOz$  então o ponto  $B$  tem também ordenada igual ao ponto  $A$ , ou seja, as coordenadas do ponto  $B$  são  $(0,8,7)$   
Da mesma forma, nas condições do enunciado podemos verificar que o ponto  $V$  tem coordenadas  $(4,4,0)$

Como o plano  $\alpha$  é paralelo ao plano  $AVB$ , então um vetor normal do plano  $AVB$  também é vetor normal do plano  $\alpha$ , pelo que, para determinar um vetor normal do plano  $\alpha$ , vamos determinar as coordenadas de dois vetores, não colineares, do plano  $AVB$ :

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (8,8,7) - (0,8,7) = (8,0,0)$$

$$\overrightarrow{VA} = A - V = (8,8,7) - (4,4,0) = (4,4,7)$$

Podemos agora determinar as coordenadas de um vetor perpendicular aos dois vetores do plano ( $\vec{v} = (a,b,c)$ ), que é um vetor normal do plano  $\alpha$ :

$$\begin{cases} (a,b,c) \cdot (8,0,0) = 0 \\ (a,b,c) \cdot (4,4,7) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = 0 \\ 4a + 4b + 7c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 7c = -4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -\frac{4}{7}b \end{cases}$$

Assim temos que qualquer vetor normal ao plano  $\alpha$  é da forma  $\vec{v} = \left(0, b, -\frac{4}{7}b\right)$ ,  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Ou seja, concretizando um valor para  $b$ , por exemplo,  $b = 7$ , vem  $\vec{v} = (0,7,-4)$

Desta forma, temos que uma equação do plano  $\alpha$  é da forma

$$7y - 4z = d$$

E recorrendo às coordenadas do ponto  $E(4,4,7)$  (que pertence ao plano  $\alpha$ ), podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

$$7(4) - 4(7) = d \Leftrightarrow 28 - 28 = d \Leftrightarrow d = 0$$

Pelo que uma equação do plano  $\alpha$ , é  $7y - 4z = 0$

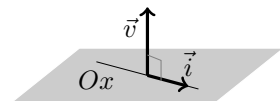
Assim, para mostrar que o eixo  $Ox$  pertence ao plano temos que verificar que:

- o vetor diretor do eixo  $Ox$  ( $\vec{i} = (1,0,0)$ ) é perpendicular ao vetor normal do plano  $\alpha$ , o que é observado porque o produto escalar dos dois vetores é nulo:

$$\vec{v} \cdot \vec{i} = (0,7,-4) \cdot (1,0,0) = 0 + 0 + 0 = 0$$

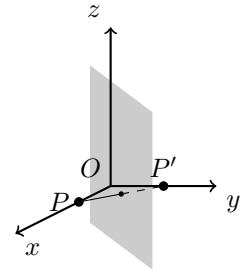
- um ponto do eixo  $Ox$ , por exemplo a origem, também pertence ao plano  $\alpha$ , o que é observado porque ao substituir as coordenadas do ponto na equação do plano  $\alpha$ , obtemos uma proposição verdadeira:

$$7(0) - 4(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$



51. Observando a equação do plano ( $x = y$ ) podemos verificar que contém todos os pontos com abcissa igual à ordenada, incluindo a origem e todos os pontos do eixo  $Oz$  (que têm abcissa e ordenadas nulas, portanto iguais), ou seja, que é o plano bissetor do primeiro octante que contém o eixo  $Oz$

Assim, o simétrico de qualquer ponto do eixo  $Ox$ , como o ponto  $P$ , relativamente a este plano bissetor é um ponto do eixo  $Oy$ , com ordenada igual à abcissa do ponto simétrico, ou seja o simétrico do ponto  $P(1,0,0)$  é o ponto  $P'(0,1,0)$

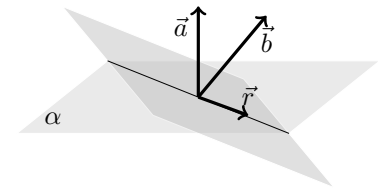


Resposta: **Opção D**

Exame – 2000, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

52. Como a reta pertence ao plano  $\alpha$ , então o vetor diretor da reta,  $\vec{r}$ , é perpendicular ao vetor normal deste plano, o vetor  $\vec{a}$

Como a reta pertence ao plano  $\beta$ , então o vetor diretor da reta,  $\vec{r}$ , é perpendicular ao vetor normal deste plano, o vetor  $\vec{b}$



Resposta: **Opção D**

Exame – 2000, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

53. Como a reta  $r$  é a intersecção dos dois planos, se um ponto pertencer à reta  $r$ , então pertence também aos dois planos, ou seja, as suas coordenadas verificam as equações dos dois planos.

Assim, designado por  $\alpha$  o plano de equação  $x - y + 3z = 1$  e por  $\beta$  o plano de equação  $x + y - 7z = 7$  e analisando as opções apresentadas, podemos verificar que:

- o ponto  $(5,5,0)$  não pertence ao plano  $\alpha$ , porque  $5 - 5 + 3(5) \neq 1$ , logo não pertence à reta  $r$
- o ponto  $(1,0,0)$  não pertence ao plano  $\beta$ , porque  $1 + 0 - 7(0) \neq 7$ , logo não pertence à reta  $r$
- o ponto  $(0,0,-1)$  não pertence ao plano  $\alpha$ , porque  $0 - 0 + 3(-1) \neq 1$ , logo não pertence à reta  $r$
- o ponto  $(4,3,0)$  pertence ao plano  $\alpha$ , porque  $4 - 3 + 3(0) = 1$ , e também pertence ao plano  $\beta$ , porque  $3 + 4 - 7(0) = 7$ ; logo este ponto pertence à reta  $r$

Resposta: **Opção D**

Exame – 1999, Prova para Militares (cód. 135)





54. Como se o projétil seguir uma trajetória retilínea, o alvo é atingido, então os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são colineares, pelo que não definem um plano.

Para determinar uma equação do plano  $ABO$ , vamos determinar as coordenadas de dois vetores, não colineares, do plano  $ABO$ :

$$\overrightarrow{OA} = A - O = (2,3,10) - (0,0,0) = (2,3,10)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (10,13,25) - (2,3,10) = (8,10,15)$$

Podemos agora determinar as coordenadas de um vetor perpendicular aos dois vetores do plano ( $\vec{u} = (a,b,c)$ ), que é um vetor normal do plano  $ABE$ :

$$\begin{cases} (a,b,c) \cdot (2,3,10) = 0 \\ (a,b,c) \cdot (8,10,15) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b + 10c = 0 \\ 8a + 10b + 15c = 0 \end{cases}$$

Considerando, sem perda de generalidade, que  $c = 1$ , temos:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2a + 3b + 10 = 0 \\ 8a + 10b + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -3b - 10 \\ 8a + 10b + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = -12b - 40 \\ 8a + 10b + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = -12b - 40 \\ -12b - 40 + 10b + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = -12b - 40 \\ -2b - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = -6 \times 2b - 40 \\ -25 = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = -6(-25) - 40 \\ -\frac{25}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = 150 - 40 \\ -\frac{25}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{110}{8} \\ -\frac{25}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{55}{4} \\ -\frac{25}{2} = b \end{cases} \end{aligned}$$

Assim temos que um vetor normal ao plano  $ABO$  é  $\vec{u} = \left(\frac{55}{4}, -\frac{25}{2}, 1\right)$ , e também o vetor  $4\vec{u} = (55, -50, 4)$  pelo que a equação do plano  $ABO$  é da forma:

$$55x - 50y + 4z = d$$

E recorrendo às coordenadas do ponto  $O$  que pertence ao plano  $ABO$ , podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

$$-5(0) + 0 = d \Leftrightarrow d = 0$$

E assim, uma equação do plano  $ABO$ , é  $55x - 50y + 4z = 0$

Finalmente podemos provar que o ponto  $C$  pertence ao plano  $ABO$ , substituindo as coordenadas do ponto na equação do plano e verificando que se obtém uma proposição verdadeira:

$$55 \times 98 - 50 \times 123 + 4 \times 190 = 0 \Leftrightarrow 5390 - 6150 + 760 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Para averiguar se o plano  $ABO$  é perpendicular ao plano  $xOy$ , calculamos o produto escalar dos respetivos vetores normais ( $4\vec{u} = (55, -50, 4)$  e  $\vec{v} = (0,0,1)$ ):

$$(55, -50, 4) \cdot (0,0,1) = 55 \times 0 - 50 \times 0 + 4 \times 1 = 0 - 0 + 4 = 4$$

Como o produto escalar dos vetores normais dos planos não é nulo, os planos não são perpendiculares.



55. Como  $[AE]$  é uma aresta do cubo, perpendicular à face  $[ABCD]$ , temos que o vetor  $\overrightarrow{AE}$  é um vetor normal do plano que contém a face.

$$\overrightarrow{AE} = E - A = (1, 2, -3) - (3, 5, 3) = (1 - 3, 2 - 5, -3 - 3) = (-2, -3, -6)$$

Assim, a equação do plano que contém a face  $[ABCD]$  é da forma:

$$-2x - 3y - 6z = d$$

E recorrendo às coordenadas do ponto  $A$  que pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

$$-2(3) - 3(5) - 6(3) = d \Leftrightarrow -6 - 15 - 18 = d \Leftrightarrow -39 = d$$

E assim, uma equação do plano que contém a face  $[ABCD]$  é:

$$-2x - 3y - 6z = -39 \Leftrightarrow 2x + 3y + 6z = 39$$

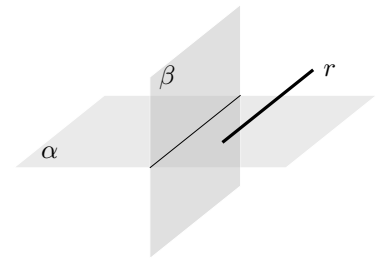
Assim, como o ponto  $P$  pertence ao eixo  $Oz$  tem abcissa e ordenada nulas e a cota pode ser calculada substituindo as coordenadas conhecidas na equação anterior:

$$2(0) + 3(0) + 6z = 39 \Leftrightarrow z = \frac{39}{6} \Leftrightarrow z = \frac{13}{2}$$

Logo, as coordenadas do ponto  $P$  são  $\left(0, 0, \frac{13}{2}\right)$

Exame – 1999, Época Especial (cód. 135)

56. Se uma reta  $r$  é paralela à reta de interseção dos planos  $\alpha$  e  $\beta$ , como a reta de interseção está contida no plano  $\beta$ , então a reta  $r$  é paralela ao plano  $\beta$



Resposta: **Opção B**

Exame – 1999, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

57.

- 57.1. Como a face  $[OPQR]$  está contida no plano  $xOy$ , o ponto  $Q$  tem cota nula e como o cubo tem as arestas  $[OR]$  sobre o eixo  $Ox$  e  $[OP]$  sobre o eixo  $Oy$ , então a abcissa e a ordenada do ponto  $Q$  são iguais, ou seja, as suas coordenadas são da forma  $(a, a, 0)$ , em que  $a$  é a medida da aresta do cubo.

Substituindo na equação do plano  $VTQ$ , podemos calcular o valor de  $a$ :

$$a + a + 0 = 6 \Leftrightarrow 2a = 6 \Leftrightarrow a = \frac{6}{2} \Leftrightarrow a = 3$$

E assim, vem que o volume do cubo é:

$$V = a^3 = 3^3 = 27$$



- 57.2. Como o plano  $\alpha$  é paralelo ao plano  $VTQ$ , o vetor normal do plano  $VTQ$ ,  $\vec{u} = (1,1,1)$  é também um vetor normal do plano  $\alpha$ , pelo que a respetiva equação é da forma:

$$x + y + z = d$$

Como a medida da aresta do cubo é 6, e a aresta  $[OS]$  está sobre o semieixo positivo  $Oz$ , então as coordenadas do ponto  $S$  são  $(0,0,6)$

Como o ponto  $S$  pertence ao plano  $\alpha$ , podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo as coordenadas deste ponto, na equação anterior:

$$0 + 0 + 6 = d \Leftrightarrow d = 6$$

E assim, uma equação do plano  $\alpha$  é  $x + y + z = 6$

Como a medida da aresta do cubo é 6, e a aresta  $[OR]$  está sobre o semieixo positivo  $Ox$ , então as coordenadas do ponto  $R$  são  $(6,0,0)$  e como a aresta  $[OP]$  está sobre o semieixo positivo  $Oy$ , então as coordenadas do ponto  $P$  são  $(0,6,0)$

Podemos assim concluir que o ponto  $R$  pertence ao plano  $\alpha$ , porque as suas coordenadas verificam a equação do plano ( $6 + 0 + 0 = 6$ ) e que o ponto  $P$  também pertence ao plano  $\alpha$ , porque as suas coordenadas também verificam a equação do plano ( $0 + 6 + 0 = 6$ ).

Desta forma como os pontos  $R$  e  $P$  pertencem ao plano  $\alpha$ , então a reta  $RP$  pertence ao plano  $\alpha$

Exame – 1999, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

58. Como o ponto  $A$  pertence ao semieixo positivo  $Ox$  então tem ordenada e cota nulas, e como pertence ao plano  $ABV$  então as suas coordenadas verificam a equação do plano, pelo que podemos calcular o valor da abcissa substituindo o valor da ordenada e da cota, na equação do plano:

$$4x + 4(0) + 3(0) = 12 \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{4} \Leftrightarrow x = 3$$

De forma análoga, como o ponto  $V$  pertence ao semieixo positivo  $Oz$  pelo que tem abcissa e ordenada nulas, e calculando o valor da cota, temos:

$$4(0) + 4(0) + 3z = 12 \Leftrightarrow 3z = 12 \Leftrightarrow z = \frac{12}{3} \Leftrightarrow z = 4$$

Assim, como o ponto  $O$  é a origem do referencial, temos que o raio da base do cone é  $\overline{OA} = 3$  e a altura do cone é  $\overline{OV} = 4$

Exame – 1999, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

59. Observando que um vetor normal do plano  $\alpha$  é o vetor  $\vec{u} = (1,1,0)$  e que um vetor normal do plano  $xoy$ , ou seja do plano de equação  $z = 0$ , é o vetor  $\vec{v} = (0,0,1)$  podemos verificar que os vetores normais são perpendiculares, porque:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1,1,0) \cdot (0,0,1) = 1 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0 + 0 + 0 = 0$$

Então podemos concluir que o plano  $\alpha$  é perpendicular ao plano  $xOy$

Resposta: **Opção B**

Exame – 1999, Prova Modelo (cód. 135)

60. Como as retas  $AB$  e  $BC$  se intersectam (no ponto  $B$ ) e não são coincidentes (pela observação da figura), então podemos concluir que são coplanares e definem o plano  $ABC$

Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  pertencem ao plano definido pela equação  $x + 2y + 6z = 10$ , porque as suas coordenadas verificam a equação do plano:

- ponto  $A$ :  $10 + 2(0) + 6(0) = 10 \Leftrightarrow 10 = 10$
- ponto  $B$ :  $0 + 2(2) + 6(1) = 10 \Leftrightarrow 4 + 6 = 10 \Leftrightarrow 10 = 10$
- ponto  $C$ :  $0 + 2(5) + 6(0) = 10 \Leftrightarrow 10 = 10$

Como os três pontos não são colineares definem um único plano e como os três pontos pertencem ao plano definido pela equação  $x + 2y + 6z = 10$ , então esta equação define o plano  $\alpha$

Exame – 1999, Prova Modelo (cód. 135)



61.

- 61.1. Como o ponto  $A$  pertence ao semieixo positivo  $Ox$  então tem ordenada e cota nulas, e como pertence ao plano  $ABP$  então as suas coordenadas verificam a equação do plano, pelo que podemos calcular o valor da abcissa substituindo o valor da ordenada e da cota, na equação do plano:

$$2x + 2(0) + 0 = 6 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{2} \Leftrightarrow x = 3$$

De forma análoga, como o ponto  $B$  pertence ao semieixo positivo  $Oy$  tem abcissa e cota nulas, e calculando o valor da ordenada, temos:

$$2(0) + 2y + 0 = 6 \Leftrightarrow 2y = 6 \Leftrightarrow y = \frac{6}{2} \Leftrightarrow y = 3$$

Ainda de forma similar, como o ponto  $P$  pertence ao semieixo positivo  $Oz$  tem abcissa e ordenada nulas, e calculando o valor da cota, temos:

$$2(0) + 2(0) + z = 6 \Leftrightarrow z = 6$$

Assim temos que o lado da base da pirâmide é:

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-0)^2 + (0-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9+9+0} = \sqrt{18}$$

E assim, o volume da pirâmide é:

$$V_{[ABCDP]} = \frac{1}{3} \times \overline{AB}^2 \times \overline{OP} = \frac{(\sqrt{18})^2 \times 6}{3} = 18 \times 2 = 36$$

- 61.2. Para determinar um vetor normal do plano  $ABP$ , vamos determinar as coordenadas de dois vetores, não colineares, deste plano:

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (0,0,6) - (3,0,0) = (-3,0,6)$$

$$\overrightarrow{BP} = P - B = (0,0,6) - (0,3,0) = (0,-3,6)$$

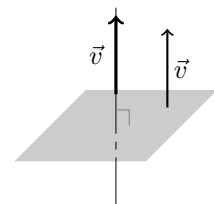
Podemos agora determinar as coordenadas de um vetor perpendicular aos dois vetores do plano ( $\vec{v} = (a,b,c)$ ), que é um vetor normal do plano  $ABP$ :

$$\begin{cases} (a,b,c) \cdot (-3,0,6) = 0 \\ (a,b,c) \cdot (0,-3,6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 6c = 0 \\ -3b + 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6c = 3a \\ 6c = 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6c}{3} \\ b = \frac{6c}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2c \\ b = 2c \end{cases}$$

Assim temos que qualquer vetor normal ao plano  $ABP$  é da forma  $\vec{v} = (2c, 2c, c)$ ,  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Ou seja, concretizando um valor para  $c$ , por exemplo,  $c = 1$ , vem  $\vec{v} = (2, 2, 1)$

Observando que um vetor diretor da reta é  $\vec{v} = (2, 2, 1)$ , podemos concluir que a reta é perpendicular ao plano  $ABP$ , porque o vetor diretor da reta é colinear com o vetor normal do plano.



Exame – 1998, Prova para militares (cód. 135)



62.

62.1. O ponto  $P$  é o único ponto que pertence simultaneamente aos planos  $OPQ$ ,  $PQV$  e  $OPV$ . Assim temos que o ponto  $P$  tem coordenadas  $(2,2,2)$  porque estas coordenadas verificam as coordenadas dos três planos:

- plano  $OPQ$ :  $2 - 2 = 0$
- plano  $PQV$ :  $2 + 2 + 2 = 6$
- plano  $OPV$ :  $2 + 2 - 2(2) = 0$

Da mesma forma, o ponto  $Q$  é o único ponto que pertence simultaneamente aos planos  $OPQ$ ,  $PQV$  e  $xOy$ . Assim temos que o ponto  $Q$  tem coordenadas  $(3,3,0)$  porque estas coordenadas verificam as coordenadas dos três planos:

- plano  $OPQ$ :  $3 - 3 = 0$
- plano  $PQV$ :  $3 + 3 + 0 = 6$
- plano  $xOy$ , ou seja o plano de equação  $z = 0$ :  $0 = 0$

62.2. Para determinar um vetor normal do plano  $OPQ$ , vamos determinar as coordenadas de dois vetores, não colineares, deste plano:

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (2,2,2) - (0,0,0) = (2,2,2)$$

$$\overrightarrow{OQ} = Q - O = (3,3,0) - (0,0,0) = (3,3,0)$$

Podemos agora determinar as coordenadas de um vetor perpendicular aos dois vetores do plano ( $\vec{v} = (a,b,c)$ ), que é um vetor normal do plano  $OPQ$ :

$$\begin{cases} (a,b,c) \cdot (2,2,2) = 0 \\ (a,b,c) \cdot (3,3,0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b + 2c = 0 \\ 3a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b + b + c = 0 \\ a = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -b \end{cases}$$

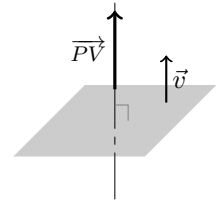
Assim temos que qualquer vetor normal ao plano  $OPQ$  é da forma  $\vec{v} = (-b,b,0)$ ,  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Ou seja, concretizando um valor para  $b$ , por exemplo,  $b = 1$ , vem  $\vec{v} = (-1,1,0)$

Calculando as coordenadas de um vetor diretor da reta  $PV$ , temos:

$$\overrightarrow{PV} = V - P = (0,4,2) - (2,2,2) = (-2,2,0)$$

Assim, como o vetor diretor da reta é colinear com o vetor normal do plano, porque  $\overrightarrow{PV} = 2\vec{v}$ , então podemos concluir que a reta  $PV$  é perpendicular ao plano  $OPQ$



Exame – 1998, Prova de reserva (cód. 135)

63. Para provar que a reta  $AB$  pertence ao plano de equação  $x + 2y - z = 5$  é suficiente provar que os pontos  $A$  e  $B$  pertencem ao plano.

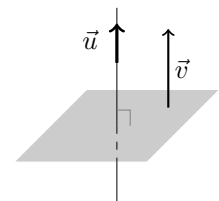
Podemos provar que os pontos pertencem ao plano mostrando que as coordenadas dos dois pontos verificam a equação do plano:

- ponto  $A$ :  $5 + 2(0) - 0 = 5$
- ponto  $B$ :  $0 + 2(3) - 1 = 5$

Exame – 1998, 2.ª fase (cód. 135)

64. Observando que o vetor normal do plano  $\alpha$  ( $\vec{v} = (2,2,2)$ ) e o vetor diretor da reta  $r$  ( $\vec{u} = (1,1,1)$ ) são colineares, porque  $\vec{v} = 2\vec{u}$ , então podemos concluir que a reta  $r$  é perpendicular ao plano  $\alpha$

Resposta: **Opção A**



Exame – 1998, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)



65. Designando por  $C$  o centro da superfície esférica e por  $T$  o ponto de tangência, temos que o vetor  $\overrightarrow{TC}$  é um vetor normal do plano tangente, porque o plano é perpendicular à reta que contém o raio  $[TC]$ . Assim, as coordenadas do vetor normal do plano são:

$$\overrightarrow{TC} = C - T = (3,9,3) - (1,8,1) = (2,1,2)$$

Pelo que uma equação do plano tangente à superfície esférica é da forma:  $2x + y + 2z = d$

E recorrendo às coordenadas do ponto  $T$  que pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

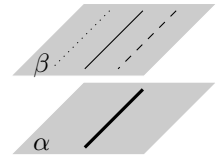
$$2(1) + 8 + 2(1) = d \Leftrightarrow 2 + 8 + 2 = d \Leftrightarrow 12 = d$$

E assim, uma equação do plano que contém a face  $[ABCD]$  é:  $2x + y + 2z = 12$

Exame – 1998, Prova Modelo (cód. 135)

66. Analisando cada uma das afirmações apresentadas temos que:

- No plano  $\alpha$  existem retas com direções diferentes, por exemplo perpendiculares entre si, e também no plano  $\beta$  existem retas perpendiculares entre si, pelo que uma reta do plano  $\alpha$  não é paralela a duas retas do plano  $\beta$  que não sejam paralelas entre si.
- Se os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são estritamente paralelos, pelo que não têm qualquer ponto em comum. Assim, uma reta contida no plano  $\alpha$  não tem qualquer ponto em comum com o plano  $\beta$ , ou seja uma reta contida no plano  $\alpha$  não intersecta o plano  $\beta$ .
- Todas as retas perpendiculares ao plano  $\alpha$  são também perpendiculares a todos os planos paralelos ao plano  $\alpha$ , e em particular são todas perpendiculares ao plano  $\beta$ .
- Existem, contidas no plano  $\beta$ , infinitas retas paralelas entre si. Assim, considerando uma reta do plano  $\alpha$  e uma paralela, contida no plano  $\beta$ , a reta do plano  $\alpha$  é paralela a uma infinidade de retas do plano  $\beta$ .



Resposta: **Opção D**

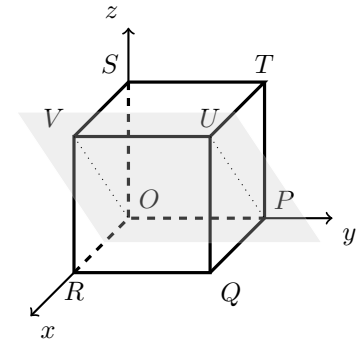
Exame – 1998, Prova Modelo (cód. 135)



67. Observando que o ponto  $O$  também pertence ao plano  $PUV$ , e que, como a abscissa do ponto  $R$  é 2, então:

- como a face quadrada  $[ORVS]$  pertence ao plano  $xOz$  então as coordenadas do ponto  $V$  são  $(2,0,2)$
- como a face quadrada  $[OPTS]$  pertence ao plano  $yOz$  então as coordenadas do ponto  $P$  são  $(0,2,0)$

Assim, os vetores  $\vec{OV} = (2,0,2)$  e  $\vec{OP} = (0,2,0)$  são dois vetores do plano  $PUV$



Podemos agora determinar as coordenadas de um vetor perpendicular aos dois vetores do plano ( $\vec{v} = (a,b,c)$ ), que é um vetor normal do plano  $PUV$ :

$$\begin{cases} (a,b,c) \cdot (2,0,2) = 0 \\ (a,b,c) \cdot (0,2,0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2c = 0 \\ 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -2c \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a = c \\ b = 0 \end{cases}$$

Assim temos que qualquer vetor normal ao plano  $PUV$  é da forma  $\vec{v} = (a, 0, -a)$ ,  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Ou seja, concretizando um valor para  $a$ , por exemplo,  $a = 1$ , vem  $\vec{v} = (1, 0, -1)$

Pelo que uma equação do plano  $PUV$  é da forma:  $x - z = d$

E recorrendo às coordenadas do ponto  $O$  que pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo estas coordenadas, na equação anterior:  $0 + 0 = d \Leftrightarrow 0 = d$

E assim, uma equação do plano  $PUV$  é:  $x - z = 0$

Exame – 1998, Prova Modelo (cód. 135)

68. Como o ponto  $O$  pertence ao plano  $OEH$ , e como a face quadrada  $[OFGE]$  pertence ao plano  $xOy$  então as coordenadas do ponto  $E$  são  $(4,0,0)$

E assim, os vetores  $\vec{OE} = (4,0,0)$  e  $\vec{OH} = (2,2,6)$  são dois vetores do plano  $OEH$

Podemos agora determinar as coordenadas de um vetor perpendicular aos dois vetores do plano ( $\vec{v} = (a,b,c)$ ), que é um vetor normal do plano  $OEH$ :

$$\begin{cases} (a,b,c) \cdot (4,0,0) = 0 \\ (a,b,c) \cdot (2,2,6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 0 \\ 2a + 2b + 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2b = -6c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -3c \end{cases}$$

Assim temos que qualquer vetor normal ao plano  $OEH$  é da forma  $\vec{v} = (0, -3c, c)$ ,  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Ou seja, concretizando um valor para  $c$ , por exemplo,  $c = 1$ , vem  $\vec{v} = (0, -3, 1)$

Pelo que uma equação do plano  $OEH$  é da forma:  $-3y + z = d$

E recorrendo às coordenadas do ponto  $O$  que pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo estas coordenadas, na equação anterior:  $-3(0) + 0 = d \Leftrightarrow 0 = d$

E assim, uma equação do plano  $OEH$  é:  $-3y + z = 0$

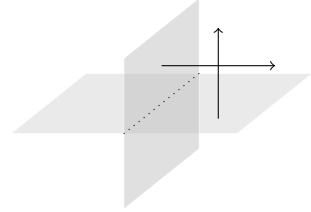
Exame – 1997, Prova para militares (cód. 135)



69. Identificando os dois vetores normais em cada opção e calculando o produto escalar, temos:

- $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = (1,1,0) \cdot (1,1,0) = 1 + 1 + 0 = 2$
- $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = (-1,1,-1) \cdot (3,2,2) = -3 + 2 - 2 = -3$
- $\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 = (1,-1,0) \cdot (0,0,1) = 0 + 0 + 0 = 0$
- $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = (2,2,1) \cdot (1,0,-3) = 2 + 0 - 3 = -1$

Como dois planos são perpendiculares se os respectivos vetores normais tiverem direções perpendiculares, ou seja, se o produto escalar for nulo, então, de entre as opções apresentadas, apenas na opção (C) está definido um par de planos perpendiculares.



Resposta: **Opção C**

Exame – 1997, 2.ª fase (cód. 135)

70. Como os pontos  $Q$ ,  $R$  e  $V$  definem uma face lateral da pirâmide, não são colineares, pelo que, para provar que o plano  $QRV$  é definido pela equação  $3y + z = 6$ , é suficiente verificar que as coordenadas dos três pontos verificam a equação do plano:

- o ponto  $Q$  pertence ao plano, porque:  $3(2) + 0 = 6$
- o ponto  $R$  é simétrico do ponto  $Q$  relativamente ao eixo  $yOz$ , pelo que tem as mesmas ordenada e cota e abcissa simétrica, ou seja, tem coordenadas  $(-2,2,0)$ , e assim também pertence ao plano porque:  $3(2) + 0 = 6$
- o ponto  $V$  pertence ao eixo  $Oz$  tem abcissa e ordenada nulas e como tem cota 6, as suas coordenadas são  $(0,0,6)$ , logo também pertence ao plano porque:  $3(0) + 6 = 6$

Exame – 1997, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

71. Verificando que um vetor normal do plano  $\alpha$  é  $\vec{u} = (1, -1, 1)$  e que o vetor normal do plano  $\beta$  é  $\vec{v} = (2, 2, 2)$ , podemos que concluir que:

- como os vetores não são perpendiculares, porque o produto escalar não é nulo ( $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, -1, 1) \cdot (2, 2, 2) = 2 - 2 + 2 = 2$ ) então os planos  $\alpha$  e  $\beta$  não são perpendiculares
- como os vetores não são colineares porque  $\vec{u} \neq \lambda \vec{v}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ , então os planos não são paralelos nem coincidentes

Assim, podemos concluir que os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são planos concorrentes não perpendiculares.

Resposta: **Opção C**

Exame – 1997, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)





72. como o ponto  $B$  pertence ao eixo  $Oy$  tem abcissa e cota nulas e como  $[BC]$  é um diâmetro da base e ponto  $C$  tem coordenadas  $(0, -5, 0)$ , então o ponto  $B$  tem de coordenadas  $(0, 5, 0)$   
 Como o ponto  $D$  pertence à reta que contém o ponto  $B$  e é paralela ao eixo  $Oz$  então tem a abcissa e ordenada iguais às do ponto  $B$ , pelo que as suas coordenadas são da forma  $(0, 5, d)$ ,  $d \in \mathbb{R}^+$

Determinando as coordenadas de dois vetores, não colineares, do plano  $ABD$ , temos:

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (4, 3, 0) - (0, 5, 0) = (4, -2, 0)$$

$$\overrightarrow{BD} = D - B = (0, 5, d) - (0, 5, 0) = (0, 0, d), d \in \mathbb{R}^+$$

Calculando as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{AC}$ , temos:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, -5, 0) - (4, 3, 0) = (-4, -8, 0)$$

E assim, temos que  $\overrightarrow{AC}$  é um vetor perpendicular ao plano  $ABD$ , porque é perpendicular a dois vetores não colineares deste plano,  $(\overrightarrow{BA}$  e  $\overrightarrow{BD})$ , porque os produtos escalares são nulos:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} = (-4, -8, 0) \cdot (4, -2, 0) = -4 \times 4 + (-8) \times (-2) + 0 \times 0 = -12 + 16 + 0 = 0$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (-4, -8, 0) \cdot (0, 0, d) = -4 \times 0 + (-8) \times 0 + 0 \times d = 0 + 0 + 0 = 0$$

Como o plano  $ABD$  é perpendicular ao vetor  $\overrightarrow{AC}$ , então este vetor é um vetor normal do plano, pelo que a equação do plano é da forma:  $-4x - 8y = k$

E recorrendo às coordenadas do ponto  $B$  que pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro  $k$ , substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

$$-4(0) - 8(5) = k \Leftrightarrow -40 = k$$

E assim, uma equação do plano que contém a face  $ABD$  é:

$$-4x - 8y = -40 \Leftrightarrow x + 2y = 10$$

Exame – 1997, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

