MATEMÁTICA A - 11º Ano

Sucessões

Propostas de resolução

Exercícios de exames e testes intermédios

1. Determinando uma expressão de $u_{n+1} - u_n$ temos

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)+5}{(n+1)+3} - \frac{n+5}{n+3} = \frac{n+6}{n+4}_{(n+3)} - \frac{n+5}{n+3}_{(n+4)} = \frac{(n+6)(n+3)-(n+5)(n+4)}{(n+4)(n+3)} =$$

$$= \frac{n^2+3n+6n+18-\left(n^2+4n+5n+20\right)}{(n+4)(n+3)} = \frac{n^2+3n+6n+18-n^2-4n-5n-20}{(n+4)(n+3)} =$$

$$= \frac{9n+18-9n-20}{(n+4)(n+3)} = \frac{-2}{(n+4)(n+3)}$$

Como $n > 0$, temos que $(n+4)(n+3) > 0$, e como o quociente de um número negativo (-2) por um positivo ($(n+4)(n+3)$), é sempre um valor negativo, temos que

$$u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ou seja, (u_n) é uma sucessão **monótona decrescente**.

Exame – 2018, Ép. especial

2. Como o terceiro termo da progressão aritmética é 4, designado a razão por r, temos que:

- $u_3 = 4 \Leftrightarrow u_1 + (3-1) \times r = 4 \Leftrightarrow u_1 + 2r = 4 \Leftrightarrow u_1 = 4 - 2r$
- $u_{12} = u_1 + (12-1) \times r = u_1 + 11r$
- a soma dos 12 primeiros termos é:

$$S_{12} = \frac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12 = \frac{u_1 + u_1 + 11r}{2} \times 12 = (4 - 2r + 4 - 2r + 11r) \times \frac{12}{2} = (8 + 7r) \times 6$$

Como a soma dos doze primeiros termos é 174, temos que:

$$S_{12} = 174 \Leftrightarrow (8+7r) \times 6 = 174 \Leftrightarrow 8 + 7r = \frac{174}{6} \Leftrightarrow 7r = 29 - 8 \Leftrightarrow r = \frac{21}{7} \Leftrightarrow r = 3$$

Assim, vem que:

- $u_1 = 4 - 2 \times 3 = 4 - 6 = -2$
- $u_n = u_1 + (n-1) \times r = -2 + 3(n-1)$

E assim, resolvendo a equação $u_n = 5371$, vem:

$$u_n = 5371 \Leftrightarrow -2 + 3(n-1) = 5371 \Leftrightarrow 3n - 3 = 5371 + 2 \Leftrightarrow 3n = 5373 + 3 \Leftrightarrow n = \frac{5376}{3} \Leftrightarrow n = 1792$$

Como a solução da equação é um número natural, então 5371 é o termo de ordem 1992 da sucessão (u_n), ou seja, $u_{1796} = 5371$

Exame – 2018, 2ª Fase

3. Como o quociente de termos consecutivos de uma progressão geométrica é constante e igual à razão (r), temos que:

$$\frac{a+18}{a+6} = r \text{ e também que } \frac{a+6}{a} = r$$

Assim, igualando os quocientes e resolvendo a equação em ordem a a, vem:

$$\frac{a+18}{a+6} = \frac{a+6}{a} \underset{a\neq 0 \wedge a\neq -6}{\Leftrightarrow} a(a+18) = (a+6)^2 \Leftrightarrow a^2+18a = a^2+12a+36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a^2 + 18a - 12a = 36 \Leftrightarrow 6a = 36 \Leftrightarrow a = \frac{36}{6} \Leftrightarrow a = 6$$

Assim, como $\frac{a+6}{a} = r$, temos que $r = \frac{6+6}{6} = \frac{12}{6} = 2$

Desta forma, podemos calcular o primeiro termo da progressão, u_1, recorrendo à fórmula da soma dos 7 primeiros termos:

$$S_7 = u_1 \times \frac{1-r^7}{1-r} \Leftrightarrow 381 = u_1 \times \frac{1-2^7}{1-2} \Leftrightarrow 381 = u_1 \times \frac{1-128}{-1} \Leftrightarrow 381 = u_1 \times \frac{-127}{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 381 = u_1 \times 127 \Leftrightarrow \frac{381}{127} = u_1 \Leftrightarrow 3 = u_1$$

Exame – 2018, 1ª Fase

4. Como todos os termos da sucessão são positivos, $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, e assim, vem que:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0$$

Ou seja, a sucessão (u_n) é monótona decrescente, pelo que é limitada superiormente pelo primeiro termo e como todos os termos são positivos, então é limitada inferiormente por zero, isto é:

$$0 < u_n \leq u_1$$

Isto é, a sucessão (u_n) é limitada.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2017, Ép. especial

5. Temos que:

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} = \frac{1}{2} \times 2^n = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1} = 1 \times 2^{n-1}$$

Assim, como $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n-1+1}}{2^{n-1}} = \frac{2^n}{2^n \times 2^{-1}} = \frac{2^n}{2^n} \times \frac{1}{2^{-1}} = 1 \times 2 = 2$, (u_n) é uma progressão geométrica de razão 2

Resposta: **Opção B**

Exame – 2017, 2ª Fase

6. Observando a expressão da sucessão, temos que:

- Para $n \leq 20$, os termos da sucessão são iguais aos valores da ordem, ou seja, $1 \leq u_n \leq 20$
- Para $n > 20$, os termos da sucessão são iguais a 1, ou -1, pelo que $-1 \leq u_n \leq 1$

Assim, para qualquer valor de n, temos que $-1 \leq u_n \leq 20$, ou seja, a sucessão (u_n) é limitada.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2017, 1ª Fase

7. Como (u_n) é progressão geométrica (u_n), designado por r a razão, temos que o termo de ordem n é

$$u_n = u_1 \times r^{n-1}$$

Assim, temos que

- $u_4 = 32 \Leftrightarrow u_1 \times r^{4-1} = 32 \Leftrightarrow u_1 \times r^3 = 32 \Leftrightarrow u_1 = \frac{32}{r^3}$
- $u_8 = 8192 \Leftrightarrow u_1 \times r^{8-1} = 8192 \Leftrightarrow u_1 \times r^7 = 8192 \Leftrightarrow u_1 = \frac{8192}{r^7}$

Desta forma, e como a progressão é monótona crescente, temos que a razão é positiva $(r > 0)$, pelo que podemos calcular o valor da razão:

$$\frac{32}{r^3} = \frac{8192}{r^7} \Leftrightarrow \frac{r^7}{r^3} = \frac{8192}{32} \Leftrightarrow r^4 = 256 \Leftrightarrow r = \sqrt[4]{256} \underset{r>0}{\Rightarrow} r = 4$$

Logo, obtemos o quinto termo, multiplicando o quarto termo pela razão:

$$u_5 = u_4 \times r = 32 \times 4 = 128$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2016, 2ª Fase

8. Como (a_n) é progressão geométrica (a_n), designado por r a razão, temos que o termo de ordem n é

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

Assim, temos que

- $a_3 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a_1 \times r^{3-1} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a_1 \times r^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{4 \times r^2}$
- $a_6 = 2 \Leftrightarrow a_1 \times r^{6-1} = 2 \Leftrightarrow a_1 \times r^5 = 2 \Leftrightarrow a_1 = \frac{2}{r^5}$

Desta forma, podemos calcular o valor da razão:

$$\frac{1}{4 \times r^2} = \frac{2}{r^5} \Leftrightarrow \frac{r^5}{r^2} = 2 \times 4 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow r = 2$$

E o valor do primeiro termo:

$$a_6 = 2 \Leftrightarrow a_1 = \frac{2}{r^5} \underset{r=2}{\Leftrightarrow} a_1 = \frac{2}{2^5} \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{2^4}$$

Assim, calculado o valor do vigésimo termo, vem

$$a_{20} = a_1 \times r^{20-1} = \frac{1}{2^4} \times 2^{19} = \frac{2^{19}}{2^4} = 2^{19-4} = 2^{15} = 32\,768$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2015, Ép. especial

9. Analisando cada uma das expressões temos:

   - Se $u_n = (-1)^n$, então $u_1 = (-1)^1 = -1$; $u_2 = (-1)^2 = 1$ e $u_3 = (-1)^3 = -1$
     Como $u_2 > u_1$ mas $u_3 < u_2$ a sucessão não é monótona.
   - Se $u_n = (-1)^n.n$, então $u_1 = (-1)^1 \times 1 = -1$; $u_2 = (-1)^2 \times 2 = 2$ e $u_3 = (-1)^3 \times 3 = -3$
     Da mesma forma, temos que, como $u_2 > u_1$ mas $u_3 < u_2$ a sucessão não é monótona.
   - Se $u_n = -\frac{1}{n}$, como $u_{n+1} = -\frac{1}{n+1}$, vem que

     $$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n+1} - \left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = -\frac{n}{n(n+1)} + \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{-n+n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

     Ou seja, $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (porque como $n > 0$, então $n(n+1) > 0$ e também $\frac{1}{n(n+1)}$), ou seja u_n é uma sucessão **monótona** crescente.

     Temos ainda que, como u_n é monótona crescente, $u_n > u_1, \forall n > 1$ e que $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (porque como $\frac{1}{n} > 0, n \in \mathbb{N}$ então $-\frac{1}{n} < 0, n \in \mathbb{N}$), pelo que $-1 \leq u_n < 0$, ou seja u_n **é limitada**.
   - Se $u_n = 1 + n^2$, então u_n é um infinitamente grande positivo, ou seja, $\forall \delta \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{N} : u_k > \delta$, ou seja a sucessão não é limitada.

   Resposta: **Opção C**

   Exame – 2015, 2ª Fase

10. Recorrendo à definição da sucessão (u_n) temos que

    - $u_1 = a$
    - $u_2 = -3u_1 + 2 = -3a + 2$
    - $u_3 = -3u_2 + 2 = -3(-3a + 2) + 2 = 9a - 6 + 2 = 9a - 4$

    Resposta: **Opção B**

    Exame – 2015, 1ª Fase

11. Começando por determinar o valor de u_2, vem:

    $$u_2 = u_1 + 2 \times 2 = 3 + 4 = 7$$

    Resolvendo a equação $w_n = u_2$, temos:

    $$w_n = u_2 \Leftrightarrow 5n - 13 = 7 \Leftrightarrow 5n = 7 + 13 \Leftrightarrow n = \frac{20}{5} \Leftrightarrow n = 4$$

    Resposta: **Opção B**

    Teste Intermédio 11º ano – 24.05.2011

12. Determinando uma expressão de $u_{n+1} - u_n$ temos

    $$u_{n+1} - u_n = \frac{1-2(n+1)}{(n+1)+3} - \frac{1-2n}{n+3} = \frac{1-2n-2}{n+1+3} - \frac{1-2n}{n+3} = \frac{-2n-1}{n+4}_{(n+3)} - \frac{1-2n}{n+3}_{(n+4)} =$$

    $$= \frac{(-2n-1)(n+3) - (1-2n)(n+4)}{(n+4)(n+3)} = \frac{-2n^2 - 6n - n - 3 - \left(n + 4 - 2n^2 - 8n\right)}{(n+4)(n+3)} =$$

    $$= \frac{-2n^2 - 6n - n - 3 - n - 4 + 2n^2 + 8n}{(n+4)(n+3)} = \frac{-7}{(n+4)(n+3)}$$

    Como $n > 0$, temos que $(n+4)(n+3) > 0$, e como o quociente de um número negativo (-7) por um positivo ($(n+4)(n+3)$), é sempre um valor negativo, temos que

    $$u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

    Ou seja, u_n é uma sucessão **monótona decrescente**.

    Teste Intermédio 11º ano – 24.05.2011