MATEMÁTICA A - 12º Ano
Nºs Complexos - Conjuntos e condições

Exercícios de exames e testes intermédios

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

   - $z_1 = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\theta}$, com $\theta \in \left]\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{4}\right[$
   - $w = \overline{z_1} \times {z_1}^4$

   Seja $A = \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0 \,\wedge\, \operatorname{Im}(z) > 0 \,\wedge\, |z| = 1\right\}$

   Justifique que o número complexo w pertence ao conjunto A

   Exame – 2017, Ép. especial

2. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam z_1 e z_2 tais que $z_1 = 2 + i$ e $z_1 \times \overline{z_2} = 4 - 3i$

   Considere a condição $|z - z_1| = |z - z_2|$

   Mostre que o número complexo $\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{4}$ verifica esta condição e interprete geometricamente este facto.

   Resolva este item sem recorrer à calculadora.

   Exame – 2017, 2ª Fase

3. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

   $$\frac{5\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{7\pi}{4} \,\wedge\, \operatorname{Im}(z) \geq -1$$

   No plano complexo, esta condição define uma região.
   Qual é a área dessa região?

   (A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **(B)** $\dfrac{1}{2}$ **(C)** $\sqrt{2}$ **(D)** 1

   Exame – 2017, 1ª Fase

4. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

   $$0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4} \,\wedge\, 1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 5$$

   Esta condição define uma região no plano complexo.

   Qual dos seguintes números complexos tem a sua imagem geométrica nesta região?

   (A) $3 + 4i$ **(B)** $6 + 2i$ **(C)** $2\operatorname{cis}\dfrac{13\pi}{6}$ **(D)** $\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{6}$

   Exame – 2016, Ép. especial

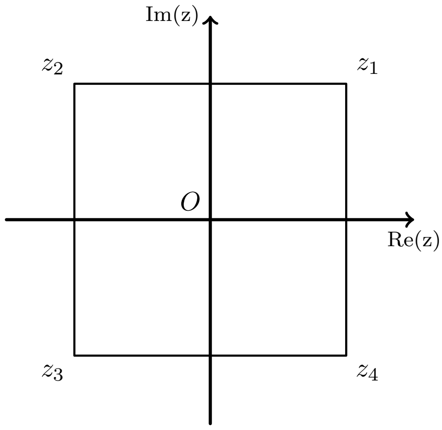
5. Na figura ao lado, está representado, no plano complexo, um quadrado cujo centro coincide com a origem e em que cada lado é paralelo a um eixo.

   Os vértices deste quadrado são as imagens geométricas dos complexos z_1, z_2, z_3 e z_4

   Qual das afirmações seguintes é **falsa**?

   (A) $|z_3 - z_1| = |z_4 - z_2|$ **(B)** $z_1 + z_4 = 2\,\text{Re}\,(z_1)$

   (C) $\dfrac{z_4}{i} = z_1$ **(D)** $-\overline{z_1} = z_2$



Exame – 2015, Ép. especial

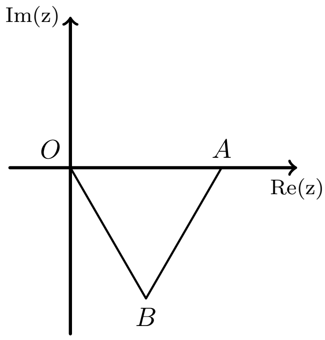
6. Na figura seguinte, está representado, no plano complexo, um triângulo equilátero $[OAB]$

   Sabe-se que:
   - o ponto O é a origem do referencial;
   - o ponto A pertence ao eixo real e tem abcissa igual a 1
   - o ponto B pertence ao quarto quadrante e é a imagem geométrica de um complexo z

   Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

   (A) $z = \sqrt{3}\,\text{cis}\left(\dfrac{11\pi}{6}\right)$ **(B)** $z = \text{cis}\left(\dfrac{11\pi}{6}\right)$

   (C) $z = \sqrt{3}\,\text{cis}\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$ **(D)** $z = \text{cis}\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$



Exame – 2015, 2ª Fase

7. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

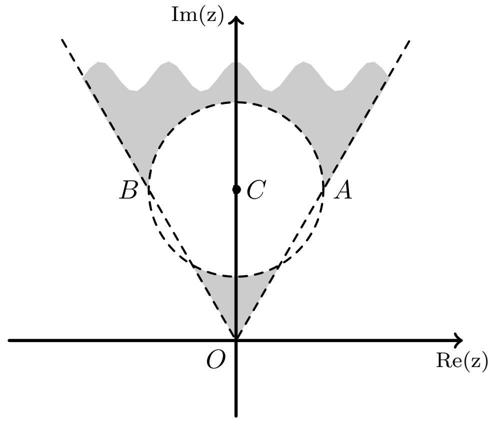
$$|z + 4 - 4i| = 3 \wedge \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$$

   No plano complexo, esta condição define uma linha.
   Qual é o comprimento dessa linha?

   (A) π **(B)** 2π **(C)** 3π **(D)** 4π

Exame – 2015, 1ª Fase

8. Na figura ao lado, estão representadas, no plano complexo, duas semirretas $\dot{O}A$ e $\dot{O}B$ e uma circunferência de centro C e raio $\overline{BC}$



Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- o ponto A é a imagem geométrica do complexo $\dfrac{2\sqrt{3}}{3} + 2i$
- o ponto B é a imagem geométrica do complexo $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3} + 2i$
- o ponto C é a imagem geométrica do complexo $2i$

Considere como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $[-\pi,\pi[$

Qual das condições seguintes define a região sombreada, excluindo a fronteira?

(A) $|z-2i| < \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \wedge \dfrac{\pi}{4} < \arg(z) < \dfrac{3\pi}{4}$

(B) $|z-2i| < \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \wedge \dfrac{\pi}{3} < \arg(z) < \dfrac{2\pi}{3}$

(C) $|z-2i| > \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \wedge \dfrac{\pi}{3} < \arg(z) < \dfrac{2\pi}{3}$

(D) $|z-2i| > \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \wedge \dfrac{\pi}{4} < \arg(z) < \dfrac{3\pi}{4}$

Exame – 2014, 2ª Fase

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w = (1+i)^{2013}$
A qual dos conjuntos seguintes pertence w ?

(A) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < |z+1|\}$

(B) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \sqrt{2}\}$

(C) $\{z \in \mathbb{C} : z = \overline{z}\}$

(D) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = \mathtt{Im}(z)\}$

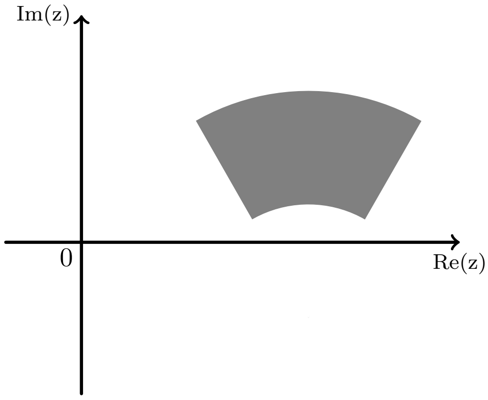
Exame – 2013, Ép. especial

10. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

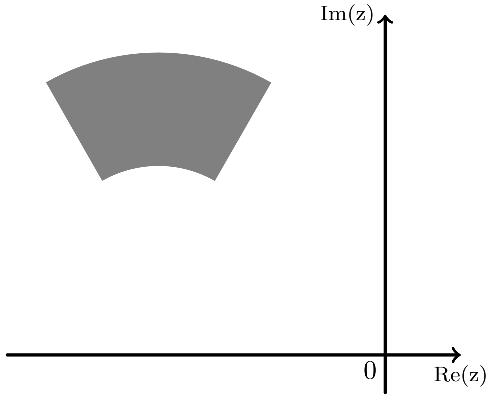
$$\frac{3}{2} \leq |z - 3 + i| \leq 3 \ \wedge \ \frac{\pi}{3} \leq \arg(z - 3 + i) \leq \frac{2\pi}{3}$$

Considere como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $[-\pi,\pi[$
Qual das opções seguintes pode representar, no plano complexo, o conjunto de pontos definido pela condição dada?

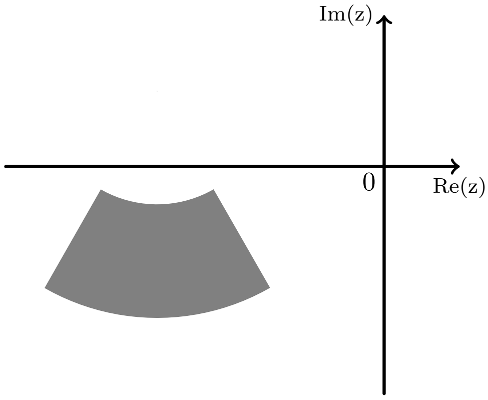
(A)



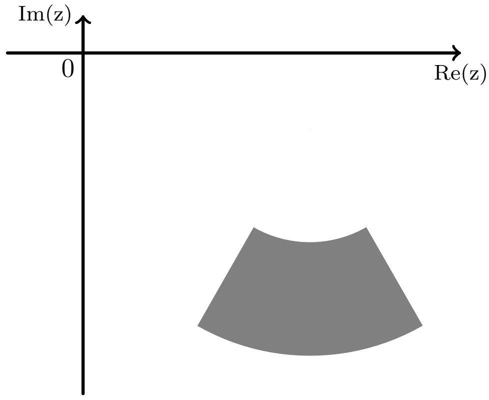
(B)



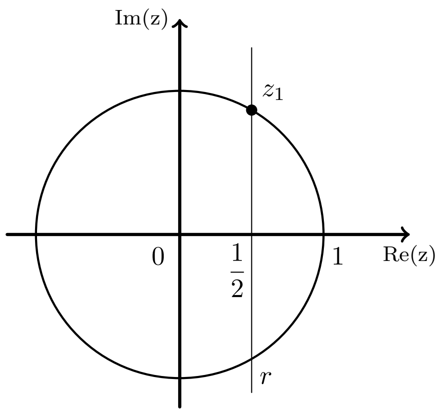
(C)



(D)



Exame – 2013, 2ª Fase



11. Na figura ao lado, estão representadas, no plano complexo, uma circunferência, de centro na origem e de raio 1, e uma reta r, definida por $\text{Re}(z) = \dfrac{1}{2}$

Seja z_1 o número complexo cuja imagem geométrica está no 1.º quadrante e é o ponto de intersecção da circunferência com a reta r

Qual das opções seguintes apresenta uma equação de que z_1 é solução?

(A) $|z-1| = |z-i|$ **(B)** $\text{Im}(z) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **(C)** $\left|z - \dfrac{1}{2}\right| = 1$ **(D)** $|1-z| = \sqrt{2}$

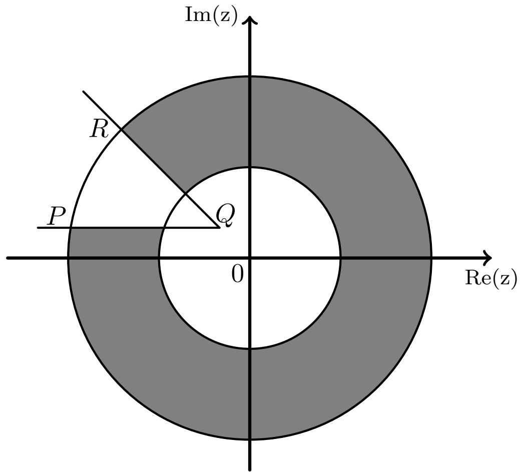
Exame – 2012, Ép. especial

12. Na figura ao lado, está representada, a sombreado, no plano complexo, parte de uma coroa circular.
Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- o ponto Q é a imagem geométrica do complexo $-1+i$
- a reta PQ é paralela ao eixo real;
- as circunferências têm centro na origem;
- os raios das circunferências são iguais a 3 e a 6

Considere como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $[-\pi,\pi[$

Qual das condições seguintes pode definir, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a região a sombreado, incluindo a fronteira?



(A) $3 \leq |z| \leq 6 \wedge -\pi \leq \arg(z-1+i) \leq \frac{3\pi}{4}$

(B) $9 \leq |z| \leq 36 \wedge -\pi \leq \arg(z+1-i) \leq \frac{3\pi}{4}$

(C) $3 \leq |z| \leq 6 \wedge -\pi \leq \arg(z+1-i) \leq \frac{3\pi}{4}$

(D) $9 \leq |z| \leq 36 \wedge -\pi \leq \arg(z-1+i) \leq \frac{3\pi}{4}$

Exame – 2012, 1ª Fase

13. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Considere $z_2 = \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

No plano complexo, a região definida pela condição $|z - z_2| \leq 1 \wedge \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq 2\pi \wedge |z| \geq |z - z_2|$ está representada geometricamente numa das opções I, II, III e IV, apresentadas a seguir.

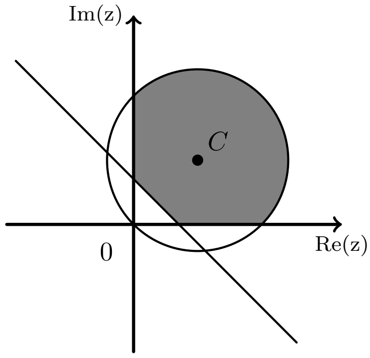
(Considere como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $]0,2\pi]$)

Sabe-se que, em cada uma das opções:

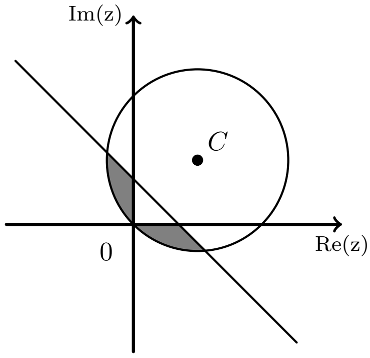
- O é a origem do referencial;
- C é a imagem geométrica de z_2
- $\overline{OC}$ é o raio da circunferência.

Apenas uma das opções está correcta.

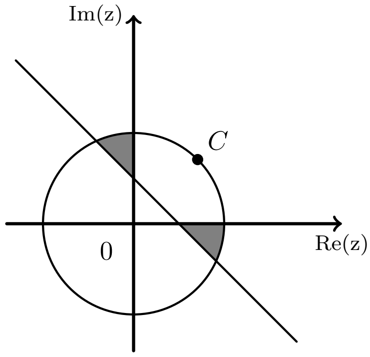
(I)



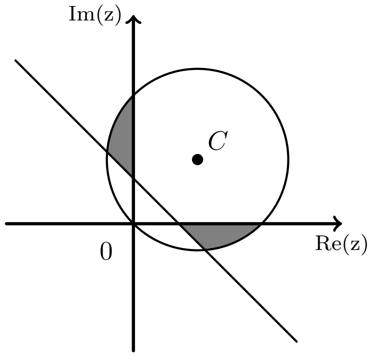
(II)



(III)



(IV)



Sem recorrer à calculadora, elabore uma composição na qual:

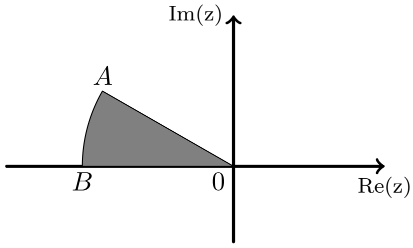
- indique a opção correta;
- apresente as razões que o levam a rejeitar as restantes opções.

Apresente três razões, uma por cada opção rejeitada.

Exame – 2011, Ép. especial

14. Na figura ao lado, está representado, no plano complexo, a sombreado, um setor circular.
Sabe-se que:
   - O ponto A é a imagem geométrica do número complexo $-\sqrt{3}+i$
   - o ponto B tem abcissa negativa, ordenada nula, e pertence À circunferência de centro na origem e raio igual a a $\overline{OA}$

Qual das condições seguintes define, em $\mathbb{C}$, a região a sombreado, incluíndo a fronteira?



(Considere como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $[0,2\pi[$)

(A) $|z| \leq 2 \wedge \frac{2\pi}{3} \leq \arg(z) \leq \pi$ **(B)** $|z| \leq 2 \wedge \frac{5\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \pi$

(C) $|z| \leq 4 \wedge \frac{2\pi}{3} \leq \arg(z) \leq \pi$ **(D)** $|z| \leq 4 \wedge \frac{5\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \pi$

Exame – 2011, 2ª Fase

15. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : i \times (z + \overline{z}) = 0\}$
(i designa a unidade imaginária, e $\overline{z}$ designa o conjugado de z)
Qual das retas seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto A?

(A) o eixo real **(B)** o eixo imaginário

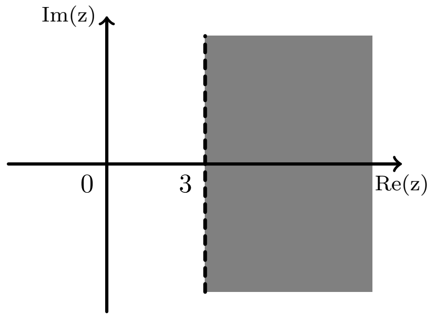
(C) a bissetriz dos quadrantes pares **(D)** a bissetriz dos quadrantes ímpares

Exame – 2010, Ép. especial

16. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 3$
Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, escreva uma condição, em $\mathbb{C}$, que defina, no plano complexo, a circunferência que tem centro na imagem geométrica de z_2 e que passa na imagem geométrica de z_1

Exame – 2010, 2ª Fase

17. Na figura ao lado, está representada, no plano complexo, a sombreado, parte do semiplano definido pela condição $\text{Re}(z) > 3$
Qual dos números complexos seguintes tem a sua imagem geométrica na região representada a sombreado?



(A) $\sqrt{3}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ **(B)** $3\sqrt{3}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

(C) $\sqrt{3}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ **(D)** $3\sqrt{3}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Exame – 2010, 1ª Fase

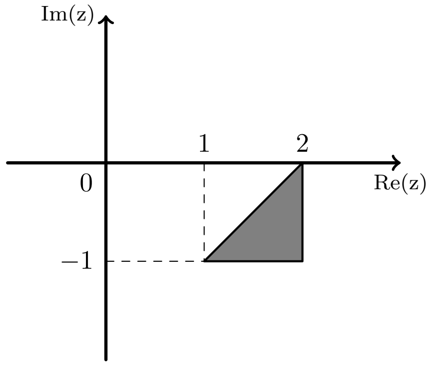
18. Na figura ao lado, está representada uma região do plano complexo.
O ponto A tem coordenadas $(2, -1)$.
Qual das condições seguintes define em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a região sombreada, incluindo a fronteira?

(A) $|z-1| \geq |z-(2-i)| \wedge \text{Re}(z) \leq 2 \wedge \text{Im}(z) \geq -1$

(B) $|z-1| \leq |z-(2-i)| \wedge \text{Re}(z) \leq 2 \wedge \text{Im}(z) \geq -1$

(C) $|z+1| \geq |z-(2+i)| \wedge \text{Re}(z) \leq 2 \wedge \text{Im}(z) \geq -1$

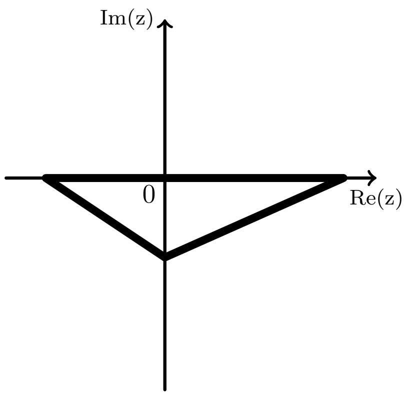
(D) $|z+1| \geq |z-(2+i)| \wedge \text{Im}(z) \leq 2 \wedge \text{Re}(z) \geq -1$



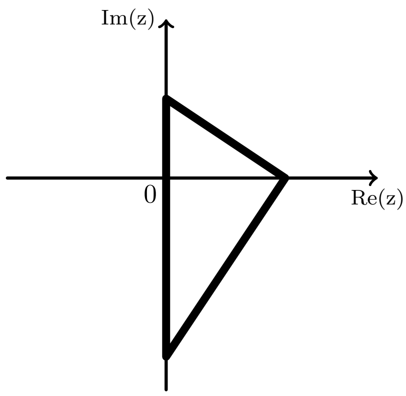
Exame – 2009, 2ª Fase

19. Seja b um número real positivo, e $z_1 = bi$ um número complexo.
Em qual dos triângulos seguintes os vértices podem ser as imagens geométricas dos números complexos $z1$, $(z1)^2$ e $(z1)^3$?

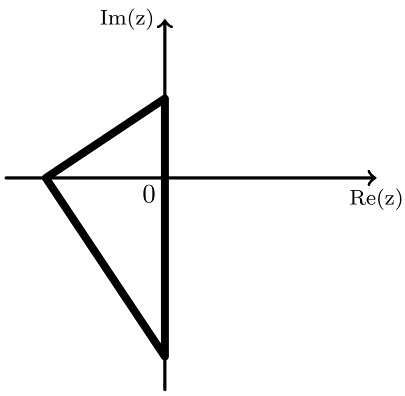
(A)



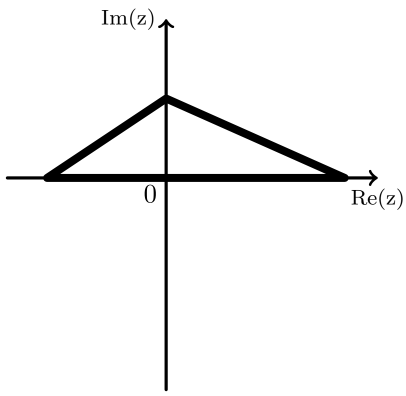
(B)



(C)



(D)



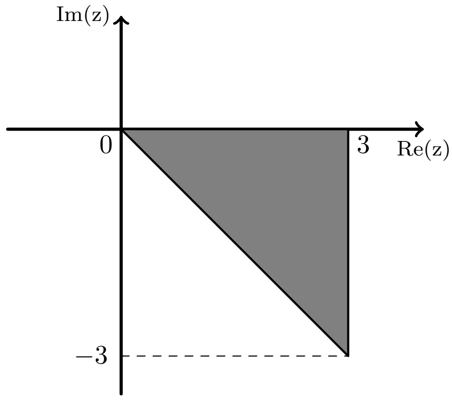
Exame – 2009, 1ª Fase

20. Qual das seguintes condições, na variável complexa z, define, no plano complexo, uma circunferência?

(A) $|z+4| = 5$ **(B)** $|z| = |z+2i|$ **(C)** $0 \leq \arg(z) \leq \pi$ **(D)** $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) = 2$

Exame – 2008, Ép. especial

21. Considere a figura ao lado, representada no plano complexo.



Qual é a condição, em $\mathbb{C}$, que define a região sombreada da figura, incluindo a fronteira?

(A) $\operatorname{Re}(z) \leq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$

(B) $\operatorname{Re}(z) \leq 3 \wedge 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$

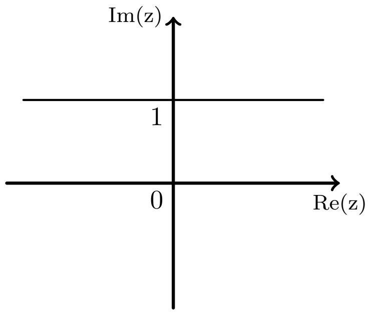
(C) $\operatorname{Im}(z) \leq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$

(D) $\operatorname{Re}(z) \geq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$

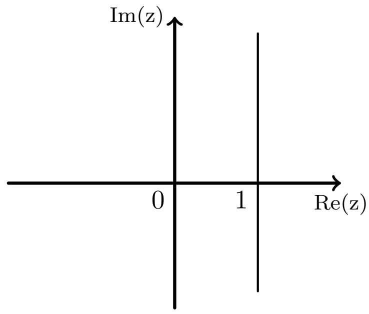
Exame – 2008, 2ª Fase

22. Considere, em $\mathbb{C}$, a condição $z + \overline{z} = 2$.
Em qual das figuras seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definidos por esta condição?

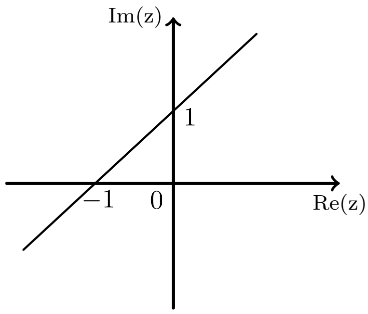
(A)



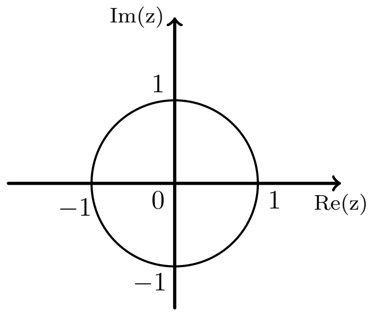
(B)



(C)



(D)



Exame – 2008, 1ª Fase

23. Seja $\mathbb{C}$ 0 conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

Seja B a região do plano complexo definida pela condição

$$|z| \leq 2 \ \wedge \ \operatorname{Re}(z) \geq 0 \ \wedge \ |z-1| \leq |z-i|$$

Represente graficamente B e determine a sua área.

Exame – 2006, Ép. especial

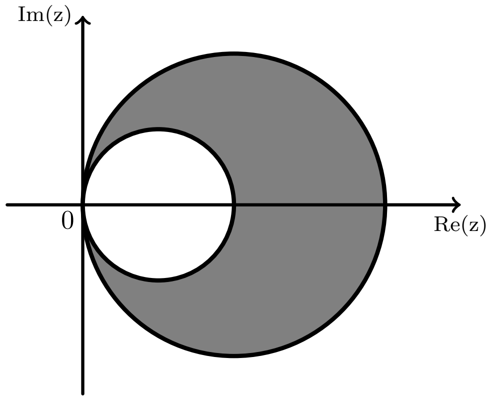
24. Na figura ao lado estão representadas, no plano complexo, duas circunferências, ambas com centro no eixo real, tendo uma delas raio 1 e a outra raio 2.

A origem do referencial é o único ponto comum às duas circunferências.

Qual das condições seguintes define a região sombreada, incluindo a fronteira?

(A) $|z-1| \geq 1 \ \wedge \ |z-2| \leq 2$ **(B)** $|z-1| \geq 2 \ \wedge \ |z-2| \leq 1$

(C) $|z-1| \leq 1 \ \wedge \ |z-2| \geq 2$ **(D)** $|z-1| \leq 2 \ \wedge \ |z-2| \geq 1$



Exame – 2006, 2ª Fase

25. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.
Considere que, para qualquer número complexo z não nulo, $\arg(z)$ designa o argumento de z que pertence ao intervalo $[0{,}2\pi[$.
Represente a região do plano complexo definida pela condição, em $\mathbb{C}$,

$\frac{1}{2} \leq |z| \leq 1 \ \wedge \ \frac{3\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{5\pi}{4}$ e determine a sua **área**.

Exame – 2006, 1ª Fase

26. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Represente, no plano complexo, o conjunto definido pela condição

$$|z - z_1| \leq 1 \ \wedge \ |z| \leq |z - z_1|$$

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)

27. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$w_1 = 1 + i$ e $w_2 = \sqrt{3}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

Represente, no plano complexo, a região definida pela condição

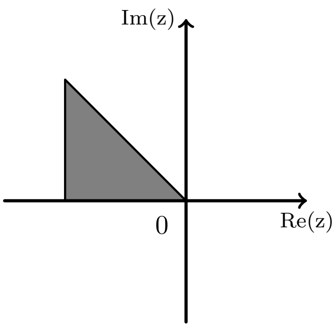
$$\operatorname{Re}(z) \geq \operatorname{Re}(w_1) \ \wedge \ |z - w_2| \leq \sqrt{3}$$

Exame – 2005, 2ª fase (cód. 435)

28. Na figura ao lado está representado, no plano complexo, um triângulo retângulo isósceles.

Os catetos têm comprimento 1, estando um deles contido no eixo dos números reais.
Um dos vértices do triângulo coincide com a origem do referencial.

Qual das condições seguintes define a região sombreada, incluindo a fronteira?



(A) $\operatorname{Re}(z) \geq 0 \ \wedge \ \operatorname{Im}(z) \leq 0 \ \wedge \ |z| \geq 1$ **(B)** $\operatorname{Re}(z) \leq 0 \ \wedge \ \operatorname{Im}(z) \geq 0 \ \wedge \ |z| \leq 1$

(C) $\operatorname{Re}(z) \geq -1 \ \wedge \ \operatorname{Im}(z) \geq 0 \ \wedge \ |z-i| \geq |z+1|$ **(D)** $\operatorname{Re}(z) \geq -1 \ \wedge \ \operatorname{Im}(z) \geq 0 \ \wedge \ |z-i| \leq |z+1|$

Exame – 2004, 1ª Fase (cód. 435)

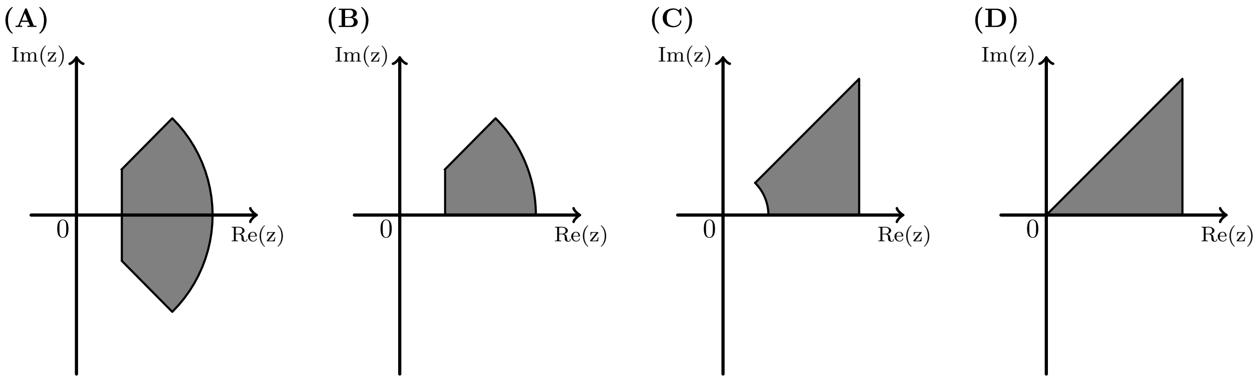
29. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w = 1 + 2i$
Considere, no plano complexo, a circunferência de centro na imagem geométrica de w e que passa na origem do referencial. Defina, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a parte desta circunferência, que está contida no quarto quadrante (eixos não incluídos).

Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)

30. Considere, em $\mathbb{C}$, a condição:

$$|z| \leq 3 \ \wedge \ 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \ \wedge \ \operatorname{Re} z \geq 1$$

Em qual das figuras seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?



Exame – 2003, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 435)

31. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere
$z_1 = 2 - 2i$ e $z_3 = -1 + i$
Escreva uma condição em $\mathbb{C}$ que defina, no plano complexo, a circunferência que tem centro na imagem geométrica de z_1 e que passa na imagem geométrica de z_3

Exame – 2003, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

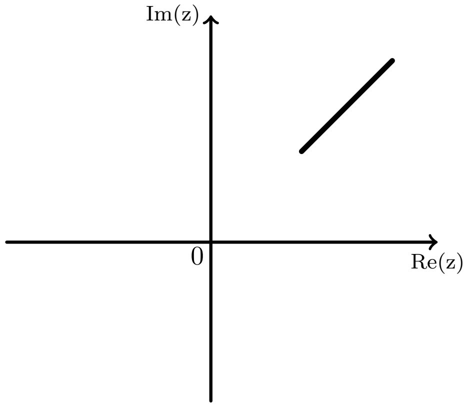
32. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja
$z_1 = 1 - i$ (i designa a unidade imaginária).
Represente, no plano complexo, a região do plano definida por

$$0 \leq \arg(z - z_1) \leq \frac{3\pi}{4} \ \wedge \ |z - z_1| \leq 1$$

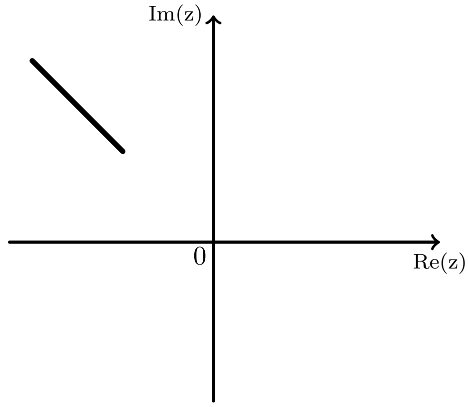
Exame – 2002, Prova para militares (cód. 435)

33. Qual das figuras seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z+1| = |z-i| \ \wedge \ 2 \leq \ \mathrm{Im}\,(z) \leq 4\}$?

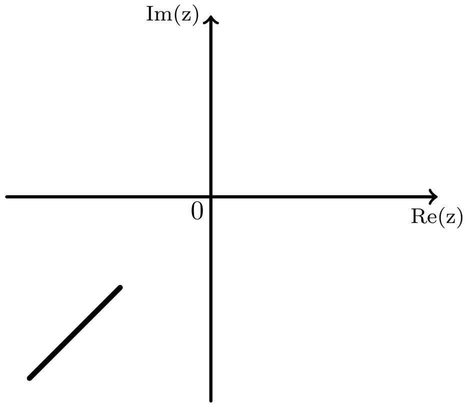
(A)



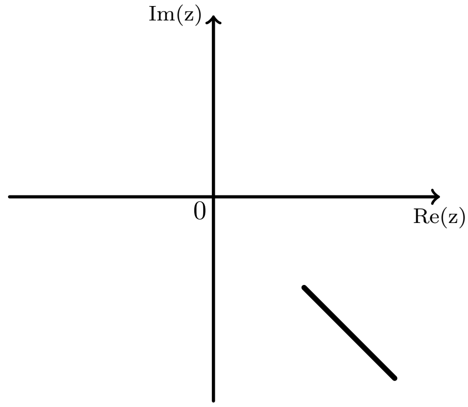
(B)



(C)



(D)



Exame – 2002, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 435)

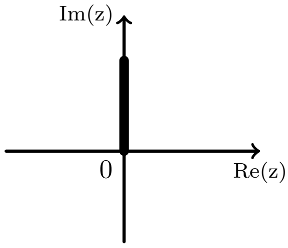
34. Qual das seguintes condições define, no plano complexo, o eixo imaginário?

(A) $z + \overline{z} = 0$ **(B)** $\mathrm{Im}\,(z) = 1$ **(C)** $|z| = 0$ **(D)** $z - \overline{z} = 0$

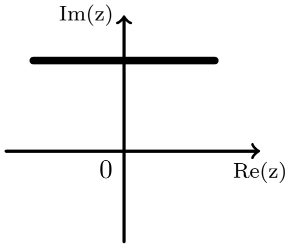
Exame – 2002, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

35. Qual das figuras seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto $\left\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 \ \wedge \ \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\right\}$?

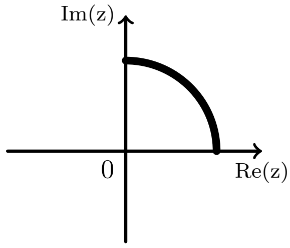
(A)



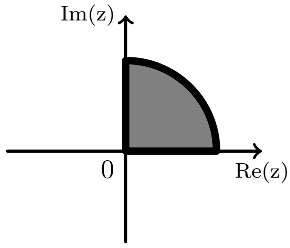
(B)



(C)



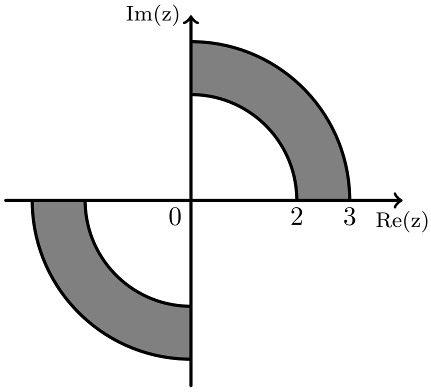
(D)



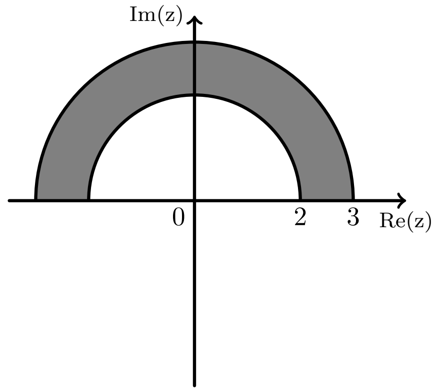
Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)

36. Qual das seguintes regiões do plano complexo (indicadas a sombreado) contém as imagens geométricas das **raízes quadradas** de $3+4i$?

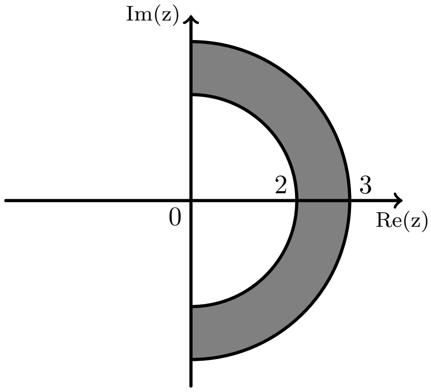
(A)



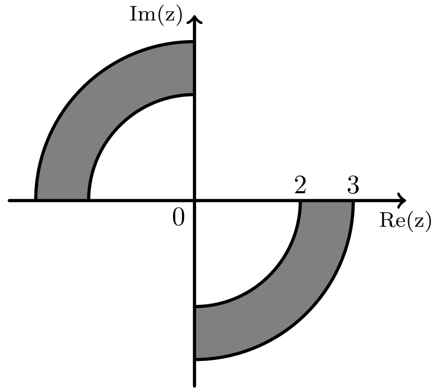
(B)



(C)



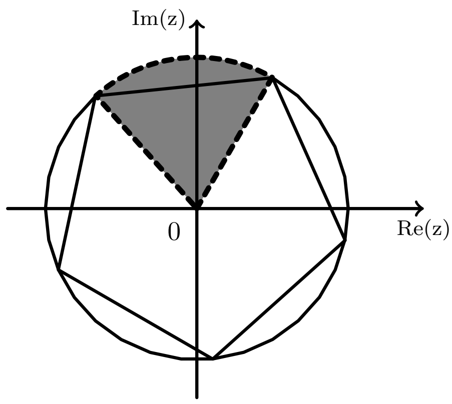
(D)



Exame – 2001, 2ª fase (cód. 435)

37. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z_1 = 2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$

No plano complexo, a imagem geométrica de z_1 é um dos cinco vértices do pentágono regular representado na figura ao lado. Este pentágono está inscrito numa circunferência centrada na origem do referencial.
Defina, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a região sombreada, excluíndo a fronteira.



Exame – 2001, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

38. Qual das seguintes condições define uma reta no plano complexo?

(A) $|z-1|=4$ **(B)** $\arg(z)=\frac{\pi}{2}$ **(C)** $3z+2i=0$ **(D)** $|z-1|=|z+i|$

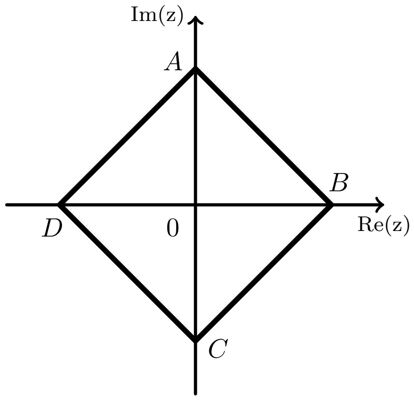
Exame – 2000, 2ª Fase (cód. 435)

39. Considere, no plano complexo, o quadrado $[ABCD]$.

Os pontos A e C pertencem ao eixo imaginário, e os pontos B e D pertencem ao eixo real.

Estes quatro pontos encontram-se à distância de uma unidade da origem do referencial.

Defina, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a circunferência **inscrita** no quadrado $[ABCD]$.



Exame – 2000, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 435)

40. Seja A o conjuntos dos números complexos cuja imagem, no plano complexo, é o interior do círculo de centro na origem do referencial e raio 1.

Defina, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a parte de A contida no segundo quadrante (excluindo os eixos do referencial).

Exame – 2000, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)