MATEMÁTICA A - 12º Ano
Nºs Complexos - Equações e problemas

Exercícios de exames e testes intermédios

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam

$$z_1 = \frac{1-3i^{19}}{1+i} \quad \text{e} \quad z_2 = -3k\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right), \text{com } k \in \mathbb{R}^+$$

   Sabe-se que, no plano complexo, a distância entre a imagem geométrica de z_1 e a imagem geométrica de z_2 é igual a $\sqrt{5}$

   Qual é o valor de k ?

   Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Exame – 2017, 1ª Fase

2. Seja ρ um número real positivo, e seja θ um número real pertencente ao intervalo $]0,\pi[$
   Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \dfrac{-1+i}{(\rho\,\text{cis}\,\theta)^2}$ e $w = -\sqrt{2}i$
   Sabe-se que $z = w$

   Determine o valor de ρ e o valor de θ

Exame – 2016, 2ª Fase

3. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = \frac{8\,\text{cis}\,\theta}{-1+\sqrt{3}i} \text{ e } z_2 = \text{cis}\,(2\theta)$$

   Determine o valor de θ pertencente ao intervalo $]0,\pi[$ de modo que $\overline{z_1} \times z_2$ seja um número real.

Exame – 2016, 1ª Fase

4. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \dfrac{-2+2i^{19}}{\sqrt{2}\,\text{cis}\,\theta}$

   Determine os valores de θ pertencentes ao intervalo $]0,2\pi[$, para os quais z é um número imaginário puro.
   Na resolução deste item, não utilize a calculadora.

Exame – 2015, 1ª Fase

5. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
   Resolva os dois itens seguintes sem utilizar a calculadora.

   5.1. Considere $z_1 = \dfrac{1-i}{2i} - i^{-1}$ e $z_2 = \text{cis}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$
   Averigue se a imagem geométrica do complexo $(z_1)^4 \times \overline{z_2}$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

   5.2. Considere o número complexo $w = \text{sen}\,(2\alpha) + 2i\cos^2\alpha$ com $\alpha \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$
   Escreva w na forma trigonométrica.

Exame – 2014, Ép. especial

6. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

6.1. Considere $z = 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e $w = \frac{(z-i)^4}{1+zi}$

No plano complexo, seja O a origem do referencial.
Seja A a imagem geométrica do número complexo $\overline{z}$ e seja B a imagem geométrica do número complexo w
Determine a área do triângulo $[AOB]$, sem utilizar a calculadora.

6.2. Seja $\alpha \in]0,\pi[$
Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 - 2\cos\alpha z + 1 = 0$
Apresente as soluções, em função de α, na forma trigonométrica.

Exame – 2014, 2ª Fase

7. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

7.1. Considere $z_1 = \frac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3}{1-i}$ e $z_2 = \operatorname{cis}\alpha$, com $\alpha \in [0,\pi[$
Determine os valores de α, de modo que $z_1 \times (z_2)^2$ seja um número imaginário puro, sem utilizar a calculadora.

7.2. Seja z um número complexo tal que $|1+z|^2 + |1-z|^2 \leq 10$
Mostre que $|z| < 2$

Exame – 2014, 1ª Fase

8. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+2i\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$

Seja $z = \operatorname{cis}\theta$, com θ pertencente a $[0,2\pi[$
Determine θ de modo que $\frac{z}{z_1}$ seja um número real negativo, sem utilizar a calculadora.

Exame – 2013, Ép. especial

9. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Considere $z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} + i^{22}$ e $z_2 = \frac{-2}{iz_1}$
Determine, sem utilizar a calculadora, o menor número natural n tal que $(z_2)^n$ é um número real negativo.

Exame – 2013, 2ª Fase

10. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_2 = 1 + i$
Seja $z_3 = \operatorname{cis}\alpha$
Determine o valor de α pertencente ao intervalo $]-2\pi, -\pi[$ sabendo que $z_3 + \overline{z_2}$ é um número real.

Exame – 2013, 1ª Fase

11. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.
Mostre, sem recorrer à calculadora, que o número $2\operatorname{cis}\frac{\pi}{10}$ é solução da equação $z^6 \times \overline{z} = 128i$
$\overline{z}$ designa o conjugado de z

Teste Intermédio 12º ano – 24.05.2013

12. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Seja w um número complexo não nulo.
Mostre, sem recorrer à calculadora, que, se o conjugado de w é igual a metade do inverso de w, então a imagem geométrica de w pertence à circunferência de centro na origem e de raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exame – 2012, Ép. especial

13. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Seja $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

Sejam z_1 e z_2 dois números complexos tais que $z_1 = \operatorname{cis}\alpha$ e $z_2 = \operatorname{cis}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$
Mostre, analiticamente, que a imagem geométrica de z_1+z_2, no plano complexo, pertence ao 2.º quadrante.

Exame – 2012, 2ª Fase

14. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = (-2+i)^3$ e $z_2 = \dfrac{1+28i}{2+i}$

14.1. Resolva a equação $z^3 + z_1 = z_2$, sem recorrer à calculadora.
Apresente as soluções da equação na forma trigonométrica.

14.2. Seja w um número complexo não nulo.
Mostre que, se w e $\dfrac{1}{w}$ são raízes de índice n de um mesmo número complexo z, então $z=1$ ou $z=-1$

Exame – 2012, 1ª Fase

15. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.
Para um certo número inteiro k, a expressão $\dfrac{\left(\sqrt{2}i\right)^3 \times \operatorname{cis}\frac{\pi}{4}}{k+i}$ designa um número real.
Determine esse número k

Teste Intermédio 12º ano – 24.05.2012

16. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

16.1. Seja w o número complexo com coeficiente da parte imaginária positivo que é solução da equação $z^2+z+1=0$
Determine $\dfrac{1}{w}$
Apresente o resultado na forma trigonométrica.

16.2. Seja z um número complexo.
Mostre que $(\overline{z}+i)\times(z-i) = |z-i|^2$, para qualquer número complexo z
($\overline{z}$ designa o conjugado de z)

Exame – 2011, Prova especial

17. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

17.1. Considere $z_1 = 1+2i$ e $w = \dfrac{z_1 \times i^{4n+3} - b}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$, com $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$
Determine o valor de b para o qual w é um número real.

17.2. Seja z um número complexo tal que $|z|=1$.
Mostre que $|1+z|^2 + |1-z|^2 = 4$

Exame – 2011, 2ª Fase

18. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = 1,\ z_2 = 5i \text{ e } z_3 = \operatorname{cis}\left(\frac{n\pi}{40}\right),\ n \in \mathbb{N}$$

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

18.1. O complexo z_1 é raíz do polinomio $z^3 - z^2 + 16z - 16$
Determine, em $\mathbb{C}$, as restantes raízes do polinómio.
Apresente as raízes obtidas na forma trigonométrica.

18.2. Determine o menor valor de n natural para o qual a imagem geométrica de $z_2 \times z_3$, no plano complexo, está no terceiro quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exame – 2011, 1ª Fase

19. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Considere a equação $z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0$
Esta equação tem três soluções em $\mathbb{C}$, sendo uma delas o número real 1
As imagens geométricas, no plano complexo, dessas três soluções são vértices de um triângulo.
Determine o perímetro desse triângulo.
Resolva este item **sem recorrer à calculadora**.

Teste Intermédio 12º ano – 26.05.2011

20. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere e $z_1 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right)$ e $z_2 = 2 + i$
Mostre que $|z_1 + z_2|^2 = 6 + 4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)$, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Exame – 2010, 1ª Fase

21. Determine o valor de θ, pertencente ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, de modo que a imagem geométrica do número complexo $(2\operatorname{cis}\theta)^2 \times (1 + \sqrt{3}i)$ pertença à bissetriz do 3.º quadrante .

Exame – 2009, Ép. especial

22. Seja k um número real, e $z_1 = (k - i)(3 - 2i)$ um número complexo.
Qual é o valor de k, para que z_1 seja um número imaginário puro?

(A) $-\frac{3}{2}$ **(B)** $-\frac{2}{3}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{3}{2}$

Exame – 2009, 2ª Fase

23. Considere, em $\mathbb{C}$, um número complexo w, cuja imagem geométrica no plano complexo é um ponto A, situado no 1.º quadrante. Sejam os pontos B e C, respectivamente, as imagens geométricas de $\overline{w}$ (conjugado de w) e de $(-w)$.
Sabe-se que $\overline{BC} = 8$ e que $|w| = 5$.
Determine a área do triângulo $[ABC]$.

Exame – 2009, 2ª Fase

24. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_2 = \operatorname{cis}\left(\frac{5}{6}\pi\right)$.
Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}$, tal que $(-iz_2)^n = -1$.

Exame – 2009, 1ª Fase

25. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam os números $z_2 = 8\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ (i designa a unidade imaginária).
Considere o número complexo $z = \overline{z_2}$.
No plano complexo, sejam A e B as imagens geométricas de z e de z_2, respetivamente.
Determine a área do triângulo $[AOB]$, em que O é a origem do referencial.

Exame – 2008, Ép. especial

26. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ (i designa a unidade imaginária).
No plano complexo, sejam A e B as imagens geométricas de z_1 e de $z_2 = z_1.i^{46}$, respetivamente.
Determine o comprimento do segmento $[AB]$.

Exame – 2008, 1ª Fase

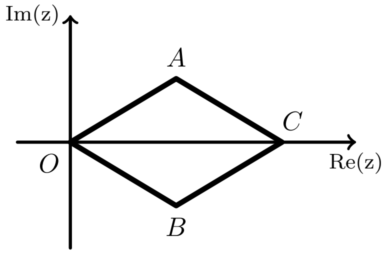
27. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam:

$$z_1 = 3 + yi \quad \text{e} \quad z_2 = 4iz_1$$

(i é a unidade imaginária e y designa um número real).
Sabendo que $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$, determine z_2.
Apresente o resultado na forma algébrica.

Exame – 2007, 2ª fase

28. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \operatorname{cis}\alpha \quad \left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$



28.1. Na figura ao lado está representado, no plano complexo, o paralelogramo $[AOBC]$
A e B são as imagens geométricas de z e $\overline{z}$, respetivamente.
C é a imagem geométrica de um número complexo w.
Justifique que $w = 2\cos\alpha$

28.2. Determine o valor de $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ para o qual $\frac{z^3}{i}$ é um número real.

Exame – 2007, 1ª fase

29. Seja $\mathbb{C}$ 0 conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

Considere a equação $iz^3 - \sqrt{3} - i = 0$
Uma das soluções desta equação tem a sua imagem geométrica no terceiro quadrante do plano complexo.
Sem recorrer à calculadora, determine essa solução, escrevendo-a na forma trigonométrica.

Exame – 2006, Ép. especial

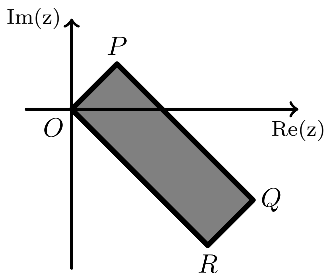
30. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.
Seja z um número complexo cuja imagem geométrica, no plano complexo, é um ponto A situado no primeiro quadrante.
Seja B a imagem geométrica de $\overline{z}$, conjugado de z.
Seja O a origem do referencial.
Sabe-se que o triângulo $[AOB]$ é equilátero e tem perímetro 6.
Represente o triângulo $[AOB]$ e determine z na forma algébrica.

Exame – 2006, 2ª fase

31. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.
Considere $z_1 = \operatorname{cis}(\alpha)$ e $z_2 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
Mostre que a imagem geométrica, no plano complexo, de $z_1 + z_2$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exame – 2005, 1ª fase

32. De dois números complexos, z_1 e z_2, sabe-se que um argumento de z_1 é $\frac{\pi}{4}$ e que o módulo de z_2 é $3\sqrt{2}$.



Na figura ao lado está representado, no plano complexo, um retângulo .
Sabe-se que:

- o ponto O é a origem do referencial
- o ponto P é a imagem geométrica de z_1
- o ponto R é a imagem geométrica de z_2
- o retângulo $[OPQR]$ tem área 6

Determine os números complexos z_1 e z_2. Apresente os resultados na forma algébrica.

Exame – 2004, Ép. especial

33. Seja z um número complexo, cuja imagem geométrica pertence ao primeiro quadrante (eixos não incluídos).
Justifique que a imagem geométrica de z^3 não pode pertencer ao quarto quadrante.

Exame – 2004, 1ª fase

34.
- $\mathbb{C}$ é conjunto dos números complexos
- i designa a unidade imaginária

Seja z um número complexo cuja imagem geométrica, no plano complexo, é um ponto A situado no segundo quadrante e pertencente à reta definida pela equação $\operatorname{Re}(z) = -2$.
Seja B a imagem geométrica de $\overline{z}$, conjugado de z.
Seja O a origem do referencial. **Represente**, no plano complexo, um triângulo $[AOB]$, de acordo com as condições enunciadas.
Sabendo que a área do triângulo $[AOB]$ é 8, **determine** z, na forma algébrica.

Exame – 2003, 2ª Fase

35. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja
$z_1 = 1 - i$ (i designa a unidade imaginária).
Determine, na forma trigonométrica, os valores, não nulos, de z para os quais $z^2 = \overline{z} \times z_1$

Exame – 2002, Prova para militares

36. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$z_1 = 1 + i$ (i designa a unidade imaginária).

36.1. Determine os números reais b e c, para os quais z_1 é raíz do polinómio $x^2 + bx + c$

36.2. Seja $z_2 = \operatorname{cis}\alpha$.
Calcule o valor de α, pertencente ao intervalo de $[0,2\pi]$, para o qual $z_1 \times \overline{z_2}$ é um número real negativo ($\overline{z_2}$ designa o conjugado de z_2).

Exame – 2002, 2ª Fase

37. Em $\mathbb{C}$, considere os números complexos: $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{3\pi}{4}$

Considere, no plano complexo, os pontos A, B e O em que:

- A é a imagem geométrica de z_1
- B é a imagem geométrica de z_2
- O é a origem do referencial.

Determine o perímetro do triângulo $[ABO]$.

Exame – 2002, 1ª fase - 1ª chamada

38. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = \rho\operatorname{cis}\frac{\pi}{3} \qquad (\rho \in \mathbb{R}^+)$$

$$z_2 = 2i \times z_1$$

Sejam A e B as imagens geométricas, no plano complexo, de z_1 e de z_2, respetivamente. Seja O a origem do referencial.
Sabendo que a área do triângulo $[AOB]$ é igual a 16, determine, na forma algébrica, o número complexo z_1

Exame – 2001, Prova para militares

39. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja

$z_1 = 1 + i$ (i designa a unidade imaginária).

Prove que, qualquer que seja o número natural n, a imagem geométrica de z_1^{4n+1} pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exame – 2001, Ép. especial

40. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja

$z_1 = 4i$ (i designa a unidade imaginária).

40.1. No plano complexo, a imagem geométrica de z_1 é um dos quatro vértices de um losango de perímetro 20, centrado na origem do referencial. Determine os números complexos cujas imagens geométricas são os restantes vértices do losango.

40.2. Sem recorrer à calculadora, resolva a equação $\left(\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}\right)^2 . z = 2 + z_1$
Apresente o resultado na forma algébrica.

Exame – 2001, 1ª fase - 2ª chamada

41. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$z_1 = 7 + 24i$ (i designa a unidade imaginária).

41.1. Um certo ponto P é a imagem geométrica, no plano complexo, de uma das raízes quadradas de z_1.
Sabendo que o ponto P tem abcissa 4, determine a sua ordenada.

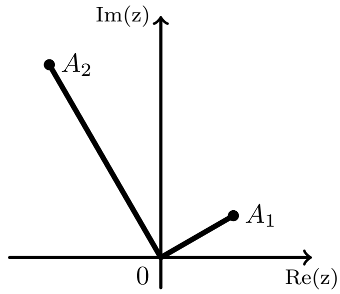
41.2. Seja $z_2 = \text{cis}\,\alpha$ com $\alpha \in \left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right[$

Indique, justificando, em que quadrante se situa a imagem geométrica de $z_1 \times z_2$

Exame – 2001, Prova modelo

42. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos, e sejam z_1 e z_2 dois elementos de $\mathbb{C}$.
Sabe-se que:

- z_1 tem argumento $\frac{\pi}{6}$
- $z_2 = z_1^4$
- A_1 e A_2 são as imagens geométricas de z_1 e z_2, respetivamente.



42.1. Justifique que o ângulo A_1OA_2 é reto (O designa a origem do referencial).

42.2. Considere no plano complexo a circunferência C, definida pela condição $|z| = |z_1|$. Sabendo que o perímetro de C é 4π, represente na **forma algébrica**, o número complexo z_1

Exame – 2000, 2ª fase

43. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

43.1. Considere o polinómio $x^3 - 3x^2 + 6x - 4$
Determine analiticamente as suas raízes em $\mathbb{C}$, sabendo que uma delas é 1.
Apresente-as na forma algébrica, simplificando-as o mais possível.

43.2. Seja z um número complexo de módulo 2 e $\overline{z}$ o seu conjugado.
No plano complexo, considere os pontos A e B tais que A é a imagem geométrica de z, e B é a imagem geométrica de $\overline{z}$.
Sabe-se que:

- o ponto A está situado no primeiro quadrante
- o ângulo AOB é reto (O designa a origem do referencial)

Determine $\frac{z}{i}$, apresentando o resultado na forma algébrica.

Exame – 2000, Prova modelo