

# MATEMÁTICA A - 12º Ano

## Nºs Complexos - Equações e problemas

### Exercícios de exames e testes intermédios

1. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, sejam

$$z_1 = \frac{1 - 3i^{19}}{1 + i} \quad \text{e} \quad z_2 = -3k \operatorname{cis} \left( \frac{3\pi}{2} \right), \text{ com } k \in \mathbb{R}^+$$

Sabe-se que, no plano complexo, a distância entre a imagem geométrica de  $z_1$  e a imagem geométrica de  $z_2$  é igual a  $\sqrt{5}$

Qual é o valor de  $k$  ?

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Exame – 2017, 1ª Fase

2. Seja  $\rho$  um número real positivo, e seja  $\theta$  um número real pertencente ao intervalo  $]0, \pi[$

Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere  $z = \frac{-1 + i}{(\rho \operatorname{cis} \theta)^2}$  e  $w = -\sqrt{2}i$

Sabe-se que  $z = w$

Determine o valor de  $\rho$  e o valor de  $\theta$

Exame – 2016, 2ª Fase

3. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = \frac{8 \operatorname{cis} \theta}{-1 + \sqrt{3}i} \quad \text{e} \quad z_2 = \operatorname{cis} (2\theta)$$

Determine o valor de  $\theta$  pertencente ao intervalo  $]0, \pi[$  de modo que  $\overline{z_1} \times z_2$  seja um número real.

Exame – 2016, 1ª Fase

4. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere  $z = \frac{-2 + 2i^{19}}{\sqrt{2} \operatorname{cis} \theta}$

Determine os valores de  $\theta$  pertencentes ao intervalo  $]0, 2\pi[$ , para os quais  $z$  é um número imaginário puro.

Na resolução deste item, não utilize a calculadora.

Exame – 2015, 1ª Fase

5. Seja  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos.

Resolva os dois itens seguintes sem utilizar a calculadora.

5.1. Considere  $z_1 = \frac{1 - i}{2i} - i^{-1}$  e  $z_2 = \operatorname{cis} \left( -\frac{\pi}{4} \right)$

Averigue se a imagem geométrica do complexo  $(z_1)^4 \times \overline{z_2}$  pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

5.2. Considere o número complexo  $w = \operatorname{sen} (2\alpha) + 2i \cos^2 \alpha$  com  $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$

Escreva  $w$  na forma trigonométrica.

Exame – 2014, Ép. especial



6. Seja  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos.

6.1. Considere  $z = 2 \operatorname{cis} \left( \frac{\pi}{6} \right)$  e  $w = \frac{(z-i)^4}{1+zi}$

No plano complexo, seja  $O$  a origem do referencial.

Seja  $A$  a imagem geométrica do número complexo  $\bar{z}$  e seja  $B$  a imagem geométrica do número complexo  $w$

Determine a área do triângulo  $[AOB]$ , sem utilizar a calculadora.

6.2. Seja  $\alpha \in ]0, \pi[$

Resolva, em  $\mathbb{C}$ , a equação  $z^2 - 2 \cos \alpha z + 1 = 0$

Apresente as soluções, em função de  $\alpha$ , na forma trigonométrica.

Exame – 2014, 2ª Fase

7. Seja  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos.

7.1. Considere  $z_1 = \frac{(-1 + \sqrt{3}i)^3}{1-i}$  e  $z_2 = \operatorname{cis} \alpha$ , com  $\alpha \in [0, \pi[$

Determine os valores de  $\alpha$ , de modo que  $z_1 \times (z_2)^2$  seja um número imaginário puro, sem utilizar a calculadora.

7.2. Seja  $z$  um número complexo tal que  $|1+z|^2 + |1-z|^2 \leq 10$

Mostre que  $|z| \leq 2$

Exame – 2014, 1ª Fase

8. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere  $z_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + 2i \operatorname{cis} \left( \frac{5\pi}{6} \right)}$

Seja  $z = \operatorname{cis} \theta$ , com  $\theta$  pertencente a  $[0, 2\pi[$

Determine  $\theta$  de modo que  $\frac{z}{z_1}$  seja um número real negativo, sem utilizar a calculadora.

Exame – 2013, Ép. especial

9. Seja  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos.

Considere  $z_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} + i^{22}$  e  $z_2 = \frac{-2}{iz_1}$

Determine, sem utilizar a calculadora, o menor número natural  $n$  tal que  $(z_2)^n$  é um número real negativo.

Exame – 2013, 2ª Fase

10. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere  $z_2 = 1 + i$

Seja  $z_3 = \operatorname{cis} \alpha$

Determine o valor de  $\alpha$  pertencente ao intervalo  $] - 2\pi, - \pi[$  sabendo que  $z_3 + \bar{z}_2$  é um número real.

Exame – 2013, 1ª Fase

11. Seja  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos;  $i$  designa a unidade imaginária.

Mostre, sem recorrer à calculadora, que o número  $2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{10}$  é solução da equação  $z^6 \times \bar{z} = 128i$

$\bar{z}$  designa o conjugado de  $z$

Teste Intermédio 12º ano – 24.05.2013

12. Seja  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos.

Seja  $w$  um número complexo não nulo.

Mostre, sem recorrer à calculadora, que, se o conjugado de  $w$  é igual a metade do inverso de  $w$ , então a imagem geométrica de  $w$  pertence à circunferência de centro na origem e de raio  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exame – 2012, Ép. especial



13. Seja  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos.

$$\text{Seja } \alpha \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$$

Sejam  $z_1$  e  $z_2$  dois números complexos tais que  $z_1 = \text{cis } \alpha$  e  $z_2 = \text{cis} \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right)$

Mostre, analiticamente, que a imagem geométrica de  $z_1 + z_2$ , no plano complexo, pertence ao 2.º quadrante.

Exame – 2012, 2ª Fase

14. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere  $z_1 = (-2 + i)^3$  e  $z_2 = \frac{1 + 28i}{2 + i}$

14.1. Resolva a equação  $z^3 + z_1 = z_2$ , sem recorrer à calculadora.

Apresente as soluções da equação na forma trigonométrica.

14.2. Seja  $w$  um número complexo não nulo.

Mostre que, se  $w$  e  $\frac{1}{w}$  são raízes de índice  $n$  de um mesmo número complexo  $z$ , então  $z = 1$  ou  $z = -1$

Exame – 2012, 1ª Fase

15. Seja  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos;  $i$  designa a unidade imaginária.

Para um certo número inteiro  $k$ , a expressão  $\frac{(\sqrt{2}i)^3 \times \text{cis } \frac{\pi}{4}}{k + i}$  designa um número real.

Determine esse número  $k$

Teste Intermédio 12º ano – 24.05.2012

16. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

16.1. Seja  $w$  o número complexo com coeficiente da parte imaginária positivo que é solução da equação

$$z^2 + z + 1 = 0$$

Determine  $\frac{1}{w}$

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

16.2. Seja  $z$  um número complexo.

Mostre que  $(\bar{z} + i) \times (z - i) = |z - i|^2$ , para qualquer número complexo  $z$

( $\bar{z}$  designa o conjugado de  $z$ )

Exame – 2011, Prova especial

17. Seja  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos.

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

17.1. Considere  $z_1 = 1 + 2i$  e  $w = \frac{z_1 \times i^{4n+3} - b}{\sqrt{2} \text{cis} \left( \frac{5\pi}{4} \right)}$ , com  $b \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$

Determine o valor de  $b$  para o qual  $w$  é um número real.

17.2. Seja  $z$  um número complexo tal que  $|z| = 1$ .

Mostre que  $|1 + z|^2 + |1 - z|^2 = 4$

Exame – 2011, 2ª Fase

18. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = 1, z_2 = 5i \text{ e } z_3 = \text{cis} \left( \frac{n\pi}{40} \right), n \in \mathbb{N}$$

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.



- 18.1. O complexo  $z_1$  é raiz do polinómio  $z^3 - z^2 + 16z - 16$   
 Determine, em  $\mathbb{C}$ , as restantes raízes do polinómio.  
 Apresente as raízes obtidas na forma trigonométrica.
- 18.2. Determine o menor valor de  $n$  natural para o qual a imagem geométrica de  $z_2 \times z_3$ , no plano complexo, está no terceiro quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exame – 2011, 1ª Fase

19. Seja  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos.  
 Considere a equação  $z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0$   
 Esta equação tem três soluções em  $\mathbb{C}$ , sendo uma delas o número real 1  
 As imagens geométricas, no plano complexo, dessas três soluções são vértices de um triângulo.  
 Determine o perímetro desse triângulo.  
 Resolva este item **sem recorrer à calculadora**.

Teste Intermédio 12º ano – 26.05.2011

20. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere  $z_1 = \text{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right)$  e  $z_2 = 2 + i$   
 Mostre que  $|z_1 + z_2|^2 = 6 + 4 \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ , recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Exame – 2010, 1ª Fase

21. Determine o valor de  $\theta$ , pertencente ao intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , de modo que a imagem geométrica do número complexo  $(2 \text{cis } \theta)^2 \times (1 + \sqrt{3}i)$  pertença à bissetriz do 3.º quadrante .

Exame – 2009, Ép. especial

22. Seja  $k$  um número real, e  $z_1 = (k - i)(3 - 2i)$  um número complexo.  
 Qual é o valor de  $k$ , para que  $z_1$  seja um número imaginário puro?

(A)  $-\frac{3}{2}$       (B)  $-\frac{2}{3}$       (C)  $\frac{2}{3}$       (D)  $\frac{3}{2}$

Exame – 2009, 2ª Fase

23. Considere, em  $\mathbb{C}$ , um número complexo  $w$ , cuja imagem geométrica no plano complexo é um ponto  $A$ , situado no 1.º quadrante. Sejam os pontos  $B$  e  $C$ , respectivamente, as imagens geométricas de  $\bar{w}$  (conjugado de  $w$ ) e de  $(-w)$ .  
 Sabe-se que  $\overline{BC} = 8$  e que  $|w| = 5$ .  
 Determine a área do triângulo  $[ABC]$ .

Exame – 2009, 2ª Fase

24. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere  $z_2 = \text{cis}\left(\frac{5}{6}\pi\right)$ .  
 Determine o menor valor de  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $(-iz_2)^n = -1$ .

Exame – 2009, 1ª Fase

25. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, sejam os números  $z_2 = 8 \text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$  ( $i$  designa a unidade imaginária).  
 Considere o número complexo  $z = \bar{z}_2$ .  
 No plano complexo, sejam  $A$  e  $B$  as imagens geométricas de  $z$  e de  $z_2$ , respetivamente.  
 Determine a área do triângulo  $[AOB]$ , em que  $O$  é a origem do referencial.

Exame – 2008, Ép. especial

26. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere  $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$  ( $i$  designa a unidade imaginária).  
 No plano complexo, sejam  $A$  e  $B$  as imagens geométricas de  $z_1$  e de  $z_2 = z_1 \cdot i^{46}$ , respetivamente.  
 Determine o comprimento do segmento  $[AB]$ .



27. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, sejam:

$$z_1 = 3 + yi \quad \text{e} \quad z_2 = 4iz_1$$

( $i$  é a unidade imaginária e  $y$  designa um número real).

Sabendo que  $\text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2)$ , determine  $z_2$ .

Apresente o resultado na forma algébrica.

Exame – 2007, 2ª fase

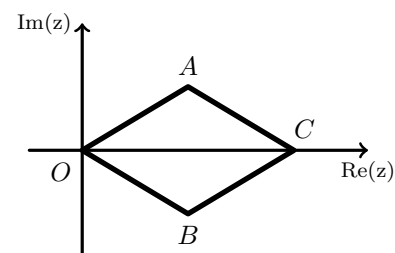
28. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere  $z = \text{cis } \alpha$  ( $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ )

28.1. Na figura ao lado está representado, no plano complexo, o paralelogramo  $[AOBC]$

$A$  e  $B$  são as imagens geométricas de  $z$  e  $\bar{z}$ , respetivamente.

$C$  é a imagem geométrica de um número complexo  $w$ .

Justifique que  $w = 2 \cos \alpha$



28.2. Determine o valor de  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  para o qual  $\frac{z^3}{i}$  é um número real.

Exame – 2007, 1ª fase

29. Seja  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos;  $i$  designa a unidade imaginária.

Considere a equação  $iz^3 - \sqrt{3} - i = 0$

Uma das soluções desta equação tem a sua imagem geométrica no terceiro quadrante do plano complexo.

**Sem recorrer à calculadora**, determine essa solução, escrevendo-a na forma trigonométrica.

Exame – 2006, Ép. especial

30. Seja  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos;  $i$  designa a unidade imaginária.

Seja  $z$  um número complexo cuja imagem geométrica, no plano complexo, é um ponto  $A$  situado no primeiro quadrante.

Seja  $B$  a imagem geométrica de  $\bar{z}$ , conjugado de  $z$ .

Seja  $O$  a origem do referencial.

Sabe-se que o triângulo  $[AOB]$  é equilátero e tem perímetro 6.

Represente o triângulo  $[AOB]$  e determine  $z$  na forma algébrica.

Exame – 2006, 2ª fase

31. Seja  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos;  $i$  designa a unidade imaginária.

Considere  $z_1 = \text{cis}(\alpha)$  e  $z_2 = \text{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

Mostre que a imagem geométrica, no plano complexo, de  $z_1 + z_2$  pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exame – 2005, 1ª fase

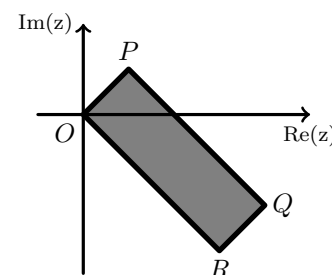
32. De dois números complexos,  $z_1$  e  $z_2$ , sabe-se que um argumento de  $z_1$  é  $\frac{\pi}{4}$  e que o módulo de  $z_2$  é  $3\sqrt{2}$ .

Na figura ao lado está representado, no plano complexo, um retângulo .

Sabe-se que:

- o ponto  $O$  é a origem do referencial
- o ponto  $P$  é a imagem geométrica de  $z_1$
- o ponto  $R$  é a imagem geométrica de  $z_2$
- o retângulo  $[OPQR]$  tem área 6

Determine os números complexos  $z_1$  e  $z_2$ . Apresente os resultados na forma algébrica.



33. Seja  $z$  um número complexo, cuja imagem geométrica pertence ao primeiro quadrante (eixos não incluídos). Justifique que a imagem geométrica de  $z^3$  não pode pertencer ao quarto quadrante.

Exame – 2004, 1ª fase

34. •  $\mathbb{C}$  é conjunto dos números complexos  
•  $i$  designa a unidade imaginária

Seja  $z$  um número complexo cuja imagem geométrica, no plano complexo, é um ponto  $A$  situado no segundo quadrante e pertencente à reta definida pela equação  $\operatorname{Re}(z) = -2$ .

Seja  $B$  a imagem geométrica de  $\bar{z}$ , conjugado de  $z$ .

Seja  $O$  a origem do referencial. **Represente**, no plano complexo, um triângulo  $[AOB]$ , de acordo com as condições enunciadas.

Sabendo que a área do triângulo  $[AOB]$  é 8, **determine**  $z$ , na forma algébrica.

Exame – 2003, 2ª Fase

35. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, seja  
 $z_1 = 1 - i$  ( $i$  designa a unidade imaginária).

Determine, na forma trigonométrica, os valores, não nulos, de  $z$  para os quais  $z^2 = \bar{z} \times z_1$

Exame – 2002, Prova para militares

36. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = 1 + i \quad (i \text{ designa a unidade imaginária}).$$

36.1. Determine os números reais  $b$  e  $c$ , para os quais  $z_1$  é raiz do polinómio  $x^2 + bx + c$

36.2. Seja  $z_2 = \operatorname{cis} \alpha$ .

Calcule o valor de  $\alpha$ , pertencente ao intervalo de  $[0, 2\pi]$ , para o qual  $z_1 \times \bar{z}_2$  é um número real negativo ( $\bar{z}_2$  designa o conjugado de  $z_2$ ).

Exame – 2002, 2ª Fase

37. Em  $\mathbb{C}$ , considere os números complexos:  $z_1 = 1 + i$  e  $z_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$

Considere, no plano complexo, os pontos  $A$ ,  $B$  e  $O$  em que:

- $A$  é a imagem geométrica de  $z_1$
- $B$  é a imagem geométrica de  $z_2$
- $O$  é a origem do referencial.

Determine o perímetro do triângulo  $[ABO]$ .

Exame – 2002, 1ª fase - 1ª chamada

38. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = \rho \operatorname{cis} \frac{\pi}{3} \quad (\rho \in \mathbb{R}^+)$$

$$z_2 = 2i \times z_1$$

Sejam  $A$  e  $B$  as imagens geométricas, no plano complexo, de  $z_1$  e de  $z_2$ , respetivamente. Seja  $O$  a origem do referencial.

Sabendo que a área do triângulo  $[AOB]$  é igual a 16, determine, na forma algébrica, o número complexo  $z_1$

Exame – 2001, Prova para militares



39. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, seja

$$z_1 = 1 + i \quad (i \text{ designa a unidade imaginária}).$$

Prove que, qualquer que seja o número natural  $n$ , a imagem geométrica de  $z_1^{4n+1}$  pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exame – 2001, Ép. especial

40. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, seja

$$z_1 = 4i \quad (i \text{ designa a unidade imaginária}).$$

40.1. No plano complexo, a imagem geométrica de  $z_1$  é um dos quatro vértices de um losango de perímetro 20, centrado na origem do referencial. Determine os números complexos cujas imagens geométricas são os restantes vértices do losango.

40.2. Sem recorrer à calculadora, resolva a equação  $(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4})^2 \cdot z = 2 + z_1$   
Apresente o resultado na forma algébrica.

Exame – 2001, 1ª fase - 2ª chamada

41. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = 7 + 24i \quad (i \text{ designa a unidade imaginária}).$$

41.1. Um certo ponto  $P$  é a imagem geométrica, no plano complexo, de uma das raízes quadradas de  $z_1$ . Sabendo que o ponto  $P$  tem abcissa 4, determine a sua ordenada.

41.2. Seja  $z_2 = \operatorname{cis} \alpha$  com  $\alpha \in \left] \frac{3\pi}{4}, \pi \right[$

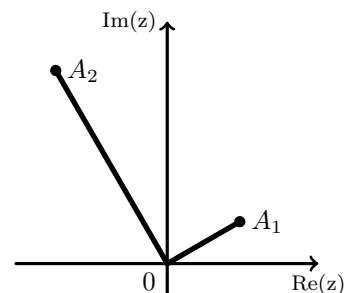
Indique, justificando, em que quadrante se situa a imagem geométrica de  $z_1 \times z_2$

Exame – 2001, Prova modelo

42. Seja  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos, e sejam  $z_1$  e  $z_2$  dois elementos de  $\mathbb{C}$ .

Sabe-se que:

- $z_1$  tem argumento  $\frac{\pi}{6}$
- $z_2 = z_1^4$
- $A_1$  e  $A_2$  são as imagens geométricas de  $z_1$  e  $z_2$ , respetivamente.



42.1. Justifique que o ângulo  $A_1OA_2$  é reto ( $O$  designa a origem do referencial).

42.2. Considere no plano complexo a circunferência  $C$ , definida pela condição  $|z| = |z_1|$ . Sabendo que o perímetro de  $C$  é  $4\pi$ , represente na **forma algébrica**, o número complexo  $z_1$

Exame – 2000, 2ª fase

43. Seja  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos;  $i$  designa a unidade imaginária.

43.1. Considere o polinómio  $x^3 - 3x^2 + 6x - 4$

Determine analiticamente as suas raízes em  $\mathbb{C}$ , sabendo que uma delas é 1.  
Apresente-as na forma algébrica, simplificando-as o mais possível.

43.2. Seja  $z$  um número complexo de módulo 2 e  $\bar{z}$  o seu conjugado.

No plano complexo, considere os pontos  $A$  e  $B$  tais que  $A$  é a imagem geométrica de  $z$ , e  $B$  é a imagem geométrica de  $\bar{z}$ .

Sabe-se que:



- o ponto  $A$  está situado no primeiro quadrante
- o ângulo  $AOB$  é reto ( $O$  designa a origem do referencial)

Determine  $\frac{z}{i}$ , apresentando o resultado na forma algébrica.

Exame – 2000, Prova modelo