MATEMÁTICA A - 12º Ano
Nºs Complexos - Equações e problemas
Propostas de resolução

Exercícios de exames e testes intermédios

1. Simplificando as expressões de z_1 e z_2, temos que:

   - Como $i^{19} = i^{4\times 4+3} = i^3 = -i$, vem que:

   $$z_1 = \frac{1-3i^{19}}{1+i} = \frac{1-3(-i)}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i+3i-3i^2}{1-i^2} = \frac{1+2i-3(-1)}{1-(-1)} = \frac{4+2i}{2} = 2+i$$

   - Como $\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 + i(-1) = -i$, vem que:

   $$z_2 = -3k\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3k(-i) = 3ik$$

   Assim, como a distância entre as imagens geométricas de z_1 e de z_2 é dada por $|z_1 - z_2|$, ou seja:

   $$|z_1 - z_2| = |2+i-3ik| = |2+i(1-3k)| = \sqrt{2^2+(1-3k)^2} = \sqrt{4+1-6k+9k^2} = \sqrt{9k^2-6k+5}$$

   E como a distância entre as imagens geométricas de z_1 e de z_2 é igual a $\sqrt{5}$, temo que:

   $$|z_1 - z_2| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{9k^2-6k+5} = \sqrt{5} \underset{k>0}{\Rightarrow} \left(\sqrt{9k^2-6k+5}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow 9k^2-6k+5 = 5 \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow 9k^2-6k+5-5=0 \Leftrightarrow 9k^2-6k=0 \Leftrightarrow k(9k-6)=0 \Leftrightarrow k=0 \vee 9k-6=0 \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow k=0 \vee k=\frac{6}{9} \Leftrightarrow k=0 \vee k=\frac{2}{3}$$

   Como $k \in \mathbb{R}^+$, temos que $k = \frac{2}{3}$

Exame – 2017, 1ª Fase

2. Escrevendo $-1+i$ na f.t. temos $-1+i=\gamma \operatorname{cis}\alpha$, onde:

   - $\gamma = |-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
   - $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-1}{1} = -1$; como $\operatorname{sen}\alpha > 0$ e $\cos\alpha < 0$, α é um ângulo do 2º quadrante, logo $\alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

   Assim temos que $-1+i = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$, pelo que podemos simplificar a expressão do número complexo z:

$$z = \frac{\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}}{(\rho\operatorname{cis}\theta)^2} = \frac{\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}}{\rho^2\operatorname{cis}(2\theta)} = \frac{\sqrt{2}}{\rho^2}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4} - 2\theta\right)$$

   Escrevendo w na f.t. temos $w = -\sqrt{2}i = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}$

   Como $z=w$, então temos que:

   - $|z| = |w| \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\rho^2} = \sqrt{2} \underset{\rho^2\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \rho^2 \Leftrightarrow 1 = \rho^2 \underset{\rho>0}{\Rightarrow} \rho = 1$
   - $\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} w + 2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} - 2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\theta = \frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} - 2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$
     $\Leftrightarrow 2\theta = -\frac{3\pi}{4} - 2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = -\frac{3\pi}{8} - k\pi, k\in\mathbb{Z}$

     Como $\theta \in]0,\pi[$, determinamos o valor de θ, atribuindo valores a k:
     - Se $k=0$, então $\theta = -\frac{3\pi}{8} \left(\theta \notin]0,\pi[\right)$
     - Se $k=-1$, então $\theta = -\frac{3\pi}{8} - (-\pi) = -\frac{3\pi}{8} + \frac{8\pi}{8} = \frac{5\pi}{8} \left(\theta \in]0,\pi[\right)$
     - Se $k=-2$, então $\theta = -\frac{3\pi}{8} - (-2\pi) = -\frac{3\pi}{8} + \frac{16\pi}{8} = \frac{13\pi}{8} \left(\theta \notin]0,\pi[\right)$

   Assim, se $z=w$, $\rho>0$ e $\theta\in]0,\pi[$, temos que $\rho=1$ e $\theta = \frac{5\pi}{8}$

Exame – 2016, 2ª Fase

3. Escrevendo $-1+\sqrt{3}i$ na forma trigonométrica temos $-1+\sqrt{3}i = \rho \operatorname{cis} \alpha$, onde:

- $\rho = |-1+\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$; como $\operatorname{sen} \alpha > 0$ e $\cos \alpha < 0$, α é um ângulo do 2º quadrante, logo
  $\alpha = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$

Assim temos que $-1+\sqrt{3}i = 2 \operatorname{cis} \dfrac{2\pi}{3}$, pelo que podemos simplificar a expressão do número complexo z_1:

$$z_1 = \frac{8 \operatorname{cis} \theta}{2 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}} = \frac{8}{2} \operatorname{cis} \left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) = 4 \operatorname{cis} \left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Como $\operatorname{Arg}(\overline{w}) = -\operatorname{Arg}(w)$ e $|\overline{w}| = |w|$, vem que: $\overline{z_1} = 4 \operatorname{cis} \left(-\left(\theta - \dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = 4 \operatorname{cis} \left(\dfrac{2\pi}{3} - \theta\right)$

Logo:

$$\overline{z_1} \times z_2 = 4 \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) \times \operatorname{cis}(2\theta) = (4 \times 1) \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{3} - \theta + 2\theta\right) = 4 \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right)$$

Para que $\overline{z_1} \times z_2$ seja um número real, então $\operatorname{Arg}(\overline{z_1} \times z_2) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Atribuindo valores a k, vem que:

- Se $k=0$, então $\operatorname{Arg}(\overline{z_1} \times z_2) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{3} + \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = -\dfrac{2\pi}{3}, \left(\theta \notin]0,\pi[\right)$
- Se $k=1$, então $\operatorname{Arg}(\overline{z_1} \times z_2) = \pi \Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{3} + \theta = \pi \Leftrightarrow \theta = \pi - \dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}, \left(\theta \in]0,\pi[\right)$
- Se $k=2$, então $\operatorname{Arg}(\overline{z_1} \times z_2) = 2\pi \Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{3} + \theta = 2\pi \Leftrightarrow \theta = 2\pi - \dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \theta = \dfrac{4\pi}{3}, \left(\theta \notin]0,\pi[\right)$

Assim, o valor de $\theta \in]0,\pi[$ para o qual $\overline{z_1} \times z_2$ é um número real é $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

Exame – 2016, 1ª Fase

4. Temos que $i^{19} = i^{4\times4+3} = i^3 = -i$

Pelo que, escrevendo o numerador da fração que define z na forma trigonométrica vem que

$$-2 + 2i^{19} = -2 + 2(-i) = -2 - 2i = \rho \; cis\, \alpha$$

Em que

- $\rho = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{-2}{-2} = 1$; como $\operatorname{sen} \alpha < 0$ e $\cos \alpha < 0$, α é um ângulo do 3º quadrante, logo $\alpha = \pi + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4}$

Logo o numerador da fração que define z é $2\sqrt{2} \operatorname{cis} \dfrac{5\pi}{4}$, pelo que

$$z = \frac{-2+2i^{19}}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\theta} = \frac{2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\theta} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4} - \theta\right) = 2\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4} - \theta\right)$$

Como z é um imaginário puro se $\operatorname{Arg}(z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, vem que

$$\frac{5\pi}{4} - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\theta = -\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\theta = -\frac{5\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\theta = -\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} - k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $\theta \in]0,2\pi[$, podemos atribuir a k os valores do conjunto $\{-1,0\}$ e calcular os valores de θ, para os quais z é um imaginário puro:

- Se $k = -1$, então $\theta = \dfrac{3\pi}{4} - (-1) \times \pi = \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{4\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{4}$
- Se $k = 0$, então $\theta = \dfrac{3\pi}{4} - 0 \times \pi = \dfrac{3\pi}{4}$

Exame – 2015, 1ª Fase

5.

5.1. Simplificando a expressão de z_1 vem:

$$z_1 = \frac{1-i}{2i} - i^{-1} = \frac{1-i}{2i} - \frac{1}{i} = \frac{1-i}{2i} - \frac{2}{2i} = \frac{1-i-2}{2i} = \frac{-1-i}{2i} = \frac{(-1-i)i}{(2i)i} =$$

$$= \frac{-i-i^2}{2i^2} = \frac{-i-(-1)}{2(-1)} = \frac{-i+1}{-2} = \frac{i-1}{2} = \frac{-1+i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Escrevendo z_1 na forma trigonométrica, temos que $z_1 = \rho \operatorname{cis} \theta$, onde:

- $\rho = \left|-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$; como $\operatorname{sen} \theta > 0$ e $\cos \theta < 0$, θ é um ângulo do 2º quadrante,

  logo $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Logo $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$

E assim, pela fórmula de Moivre para a potenciação

$$(z_1)^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \operatorname{cis} \left(4 \times \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{(\sqrt{2})^4}{2^4} \operatorname{cis}(3\pi) = \frac{4}{16} \operatorname{cis}(3\pi) = \frac{1}{4} \operatorname{cis} \pi$$

Como $\overline{z_2} = \overline{\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \operatorname{cis}\left(-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$, fazendo o produto na forma trigonométrica, vem:

$$(z_1)^4 \times \overline{z_2} = \left(\frac{1}{4} \operatorname{cis} \pi\right) \times \left(\operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{4} \times 1\right) \operatorname{cis}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

Como $\arg\left((z_1)^4 \times \overline{z_2}\right)$ é da forma $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a imagem geométrica de $(z_1)^4 \times \overline{z_2}$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

5.2. Como $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$, $\operatorname{sen} \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ e $\cos \alpha = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ vem que

$$w = \operatorname{sen}(2\alpha) + 2i \cos^2 \alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + 2i \cos^2 \alpha = 2 \cos \alpha \big(\operatorname{sen} \alpha + i \cos \alpha\big) =$$

$$= 2 \cos \alpha \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = 2 \cos \alpha \left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$$

Como $\cos \alpha > 0$, porque $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a forma trigonométrica do número complexo w é $w = 2 \cos \alpha \left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$, em que $|w| = 2 \cos \alpha$

Exame – 2014, Ép. especial

6.

6.1. Escrevendo z na forma algébrica temos:

$$z = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i \times \frac{2}{2} = \sqrt{3} + i$$

Assim temos que

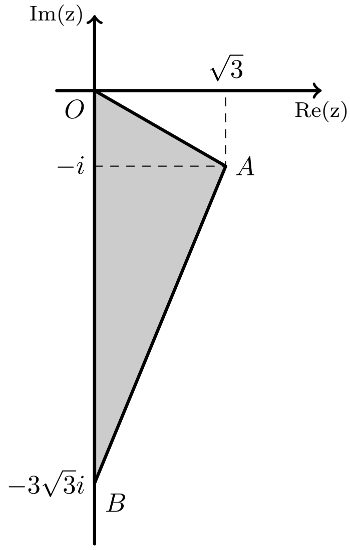
$$\overline{z} = \overline{\sqrt{3}+i} = \sqrt{3} - i$$

E, simplificando a expressão que define w, substituíndo z, vem:

$$w = \frac{(z-i)^4}{1+zi} = \frac{(\sqrt{3}+i-i)^4}{1+\left(\sqrt{3}+i\right)i} = \frac{(\sqrt{3})^4}{1+\sqrt{3}i+i^2} = \frac{3^2}{1+\sqrt{3}i-1} =$$

$$= \frac{9}{\sqrt{3}i} = \frac{9 \times \sqrt{3} \times i}{(\sqrt{3})^2 i^2} = \frac{9\sqrt{3}i}{3 \times (-1)} = -3\sqrt{3}i$$

Assim, podemos fazer a representação do triângulo $[AOB]$, como na figura ao lado.



Por observação da figura, temos que a área do triângulo $[AOB]$ é

$$A_{[AOB]} = \frac{\text{Re}\,(z) \times |\text{Im}\,(w)|}{2} = \frac{\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$$

6.2. Considerando a equação na forma $az^2 + bz + c = 0$, com $a = 1$, $b = -2\cos\alpha$ e $c = 1$, temos uma equação do segundo grau na variável z.
Assim,

$$z^2 - 2\cos\alpha z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-(-2\cos\alpha) \pm \sqrt{(-2\cos\alpha)^2 - 4(1)(1)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4(\cos^2\alpha - 1)}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{-4(1-\cos^2\alpha)}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{-4(\text{sen}^2\alpha)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha \pm \left(\sqrt{-4} \times \sqrt{\text{sen}^2\alpha}\right)}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha \pm \left(\sqrt{-1} \times \sqrt{4}\,\text{sen}\alpha\right)}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha \pm 2i\,\text{sen}\alpha}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \cos\alpha \pm i\,\text{sen}\alpha \Leftrightarrow z = \cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha \vee z = \cos\alpha - i\,\text{sen}\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha \vee z = \cos(-\alpha) + i\,\text{sen}(-\alpha) \Leftrightarrow z = \text{cis}\,\alpha \vee z = \text{cis}\,(-\alpha)$$

Resposta: A equação tem duas soluções, que são, na forma trigonométrica em função de α: $\text{cis}\,\alpha$ e $\text{cis}\,(-\alpha)$

Exame – 2014, 2ª Fase

7.

7.1. Escrevendo $-1+\sqrt{3}i$ na forma trigonométrica temos $-1+\sqrt{3}i = \rho \operatorname{cis}\theta$, onde:

- $\rho = |-1+\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 2º quadrante, logo $\theta = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$

Assim $-1+\sqrt{3}i = 2\operatorname{cis}\dfrac{2\pi}{3}$

Pelo que $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3 = \left(2\operatorname{cis}\dfrac{2\pi}{3}\right)^3 = 2^3\operatorname{cis}\left(3\times\dfrac{2\pi}{3}\right) = 8\operatorname{cis}(2\pi) = 8\operatorname{cis}0$

Escrevendo $1-i$ na forma trigonométrica temos $1-i = \varphi\operatorname{cis}\beta$, onde:

- $\varphi = |1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{-1}{1} = -1$; como $\operatorname{sen}\beta < 0$ e $\cos\beta > 0$, β é um ângulo do 4º quadrante, logo $\beta = -\dfrac{\pi}{4} =$

Assim $1-i = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

Desta forma, calculando as potências, o quociente e o produto na forma trigonométrica, vem:

$$z_1\times(z_2)^2 = \frac{8\operatorname{cis}0}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\times(\operatorname{cis}\alpha)^2 = \frac{8}{\sqrt{2}}\operatorname{cis}\left(0-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\times\operatorname{cis}(2\alpha) = \frac{8\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\times\operatorname{cis}(2\alpha) =$$

$$= 4\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\times\operatorname{cis}(2\alpha) = 4\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)$$

Logo, para que $z_1\times(z_2)^2$ seja um imaginário puro, temos que $\arg\left(z_1\times(z_2)^2\right) = \dfrac{\pi}{2}+k\pi\,, k\in\mathbb{Z}$. Pelo que:

$$\frac{\pi}{4}+2\alpha = \frac{\pi}{2}+k\pi\,,k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; 2\alpha = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+k\pi\,,k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; 2\alpha = \frac{\pi}{4}+k\pi\,,k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; \alpha = \frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\,,k\in\mathbb{Z}$$

Como $\alpha\in[0,\pi[$, concretizando os valores de k, temos que $\alpha = \dfrac{\pi}{8}$ $(k=0)$ e
$\alpha = \dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{8}+\dfrac{4\pi}{8} = \dfrac{5\pi}{8}$ $(k=1)$ são os únicos valores de $\alpha\in[0,\pi[$, para os quais $z_1\times(z_2)^2$ é um imaginário puro.

7.2. Seja $z = a+bi$
Assim, vem que:

$$|1+z|^2+|1-z|^2\leq 10 \;\Leftrightarrow\; |1+(a+bi)|^2+|1-(a+bi)|^2\leq 10 \;\Leftrightarrow\; |1+a+bi|^2+|1-a-bi)|^2\leq 10 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \left(\sqrt{(1+a)^2+b^2}\right)^2+\left(\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2}\right)^2\leq 10 \;\Leftrightarrow\; (1+a)^2+b^2+(1-a)^2+(-b)^2\leq 10 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 1+2a+a^2+b^2+1-2a+a^2+b^2\leq 10 \;\Leftrightarrow\; 2+2a^2+2b^2\leq 10 \;\Leftrightarrow\; 1+a^2+b^2\leq 5 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; a^2+b^2\leq 4 \underset{a^2+b^2\geq 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{a^2+b^2}\leq\sqrt{4} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{a^2+b^2}\leq 2 \;\Leftrightarrow\; |z|\leq 2$$

Exame – 2014, 1ª Fase

8. Como $\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ vem que:

$$1+2i\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1+2i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\times\frac{1}{2}\right) = 1-\sqrt{3}i+i^2 = 1-\sqrt{3}i-1 = -\sqrt{3}i = \sqrt{3}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

Escrevendo $1+\sqrt{3}i$ na forma trigonométrica temos $1+\sqrt{3}i = \rho\operatorname{cis}\theta$, onde:

- $\rho = |1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{3}$

Assim $1+\sqrt{3}i = 2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$

$$\text{Logo } z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+2i\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{6}+\frac{3\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}$$

Se $z = \operatorname{cis}\theta$, então $\frac{z}{z_1} = \frac{\operatorname{cis}\theta}{\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\operatorname{cis}\left(\theta-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\operatorname{cis}\theta}{\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}\operatorname{cis}\left(\theta-\frac{5\pi}{6}\right)$

E como $\frac{z}{z_1}$ é número real negativo, então $\arg\left(\frac{z}{z_1}\right) = \pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, logo temos que:

$$\theta-\frac{5\pi}{6} = \pi+2k\pi \Leftrightarrow \theta = \pi+\frac{5\pi}{6}+2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{6\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}+2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{11\pi}{6}+2k\pi$$

Como $\theta\in[0{,}2\pi[$, então $k=0$ e $\theta = \frac{11\pi}{6}$

Exame – 2013, Ép. especial

9. Como $i^{22} = i^{4\times 5+2} = i^2 = -1$, temos que:
$z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} + i^{22} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} - 1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1-2+\sqrt{3}i}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$

   Escrevendo z_1 na forma trigonométrica temos $z_1 = \rho \operatorname{cis}\theta$, onde:

   - $\rho = |z_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$
   - $\operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 2º quadrante, logo $\theta = \frac{2\pi}{3}$

   Assim $z_1 = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$

   E como $-2 = 2\operatorname{cis}\pi$ e $i = \operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$, temos que:
$z_2 = \frac{-2}{iz_1} = \frac{2\operatorname{cis}\pi}{\operatorname{cis}\frac{\pi}{2} \times \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}} = \frac{2\operatorname{cis}\pi}{\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{2\operatorname{cis}\pi}{\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{6}+\frac{4\pi}{6}\right)} = \frac{2\operatorname{cis}\pi}{\operatorname{cis}\frac{7\pi}{6}} = 2\operatorname{cis}\left(\pi - \frac{7\pi}{6}\right) = 2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
   Assim temos que $(z_2)^n = \left(2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^n = 2^n \operatorname{cis}\left(n \times \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

   E para que $(z_2)^n$ seja um número real negativo, $\arg(z_2)^n = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; ou seja:

   $n \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow\ n = \frac{\pi + 2k\pi}{-\frac{\pi}{6}},\ k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow\ n = \frac{6\pi + 12k\pi}{-\pi},\ k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow\ n = -6 - 12k,\ k \in \mathbb{Z}$

   Como , $n = -6 - 12k \ \Leftrightarrow\ \frac{n+6}{-12} = k \ \Leftrightarrow\ \frac{-n-6}{12} = k$
   logo, para que $k \in \mathbb{Z}$, o menor valor natural que n pode tomar é 6, ficando $\frac{-6-6}{12} = k \ \Leftrightarrow\ k = -1$

Exame – 2013, 2ª Fase

10. Temos que $z_3 = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$ e que $\overline{z_2} = 1 - i$, pelo que
$z_3 + \overline{z_2} = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha + 1 - i = \cos\alpha + 1 + i(\operatorname{sen}\alpha - 1)$

   Como $z_3 + \overline{z_2}$ é um número real se $\operatorname{Im}(z_3 + \overline{z_2}) = 0$ temos que:
   $\operatorname{sen}\alpha - 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ \operatorname{sen}\alpha = 1 \ \Leftrightarrow\ \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

   Como $\alpha \in]-2\pi, -\pi[$, seja $k = -1$, e assim $\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$

Exame – 2013, 1ª Fase

11. Fazendo $z = 2\,\text{cis}\,\frac{\pi}{10}$, temos que:

- $\overline{z} = 2\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{10}\right)$
- $z^6 = 2^6\,\text{cis}\left(6 \times \frac{\pi}{10}\right) = 64\,\text{cis}\,\frac{6\pi}{10} = 64\,\text{cis}\,\frac{3\pi}{5}$

Assim, para mostrarmos que $2\,\text{cis}\,\frac{\pi}{10}$ é solução da equação $z^6 \times \overline{z} = 128i$ vamos substituir z por $2\,\text{cis}\,\frac{\pi}{10}$ na equação:

$$z^6 \times \overline{z} = 128i \Leftrightarrow \left(64\,\text{cis}\,\frac{6\pi}{10}\right) \times \left(2\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right) = 128i \Leftrightarrow (64 \times 2)\,\text{cis}\left(\frac{6\pi}{10} + \left(-\frac{\pi}{10}\right)\right) = 128i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 128\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{10} = 128i \Leftrightarrow 128\,\text{cis}\,\frac{\pi}{2} = 128i \Leftrightarrow 128i = 128i$$

Como a substituição gerou uma proposição verdadeira, z é solução da equação.

Teste Intermédio 12º ano – 24.05.2013

12. Temos que metade do inverso de w é $\frac{\frac{1}{w}}{2} = \frac{1}{2w}$

Logo, como o conjugado de w é igual a metade do inverso de w, vem que: $\overline{w} = \frac{1}{2w} \Leftrightarrow w \times \overline{w} = \frac{1}{2}$

Se $w = \rho\,\text{cis}\,\theta$, então $\overline{w} = \rho\,\text{cis}\,(-\theta)$ e, por isso, $w \times \overline{w} = (\rho \times \rho)\,\text{cis}\,(\theta + (-\theta)) = \rho^2 cis 0 = \rho^2 = |w|^2$

Assim, temos que:

$$\overline{w} = \frac{1}{2w} \Leftrightarrow w \times \overline{w} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |w|^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |w| = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow |w| = \pm\frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \Leftrightarrow |w| = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $|w|$ é um valor positivo, temos que $\overline{w} = \frac{1}{2w} \Leftrightarrow |w| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |w - 0| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ é a condição que define os números complexos, cujas imagens geométricas, no plano complexo, pertencem à circunferência de centro na origem e de raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exame – 2012, Ép. especial

13. Como $z_1 = \text{cis}\,\alpha = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$ e

$z_2 = \text{cis}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha$, vem que:

$z_1 + z_2 = (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) + (-\text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha) = (\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha) + i(\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha)$

Assim,

- $\text{Re}\,(z_1 + z_2) = \cos\alpha - \text{sen}\,\alpha$ e como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, logo
  $\cos\alpha < \text{sen}\,\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha - \text{sen}\,\alpha < 0$, logo temos que $\text{Re}\,(z_1 + z_2) < 0$
- $\text{Im}\,(z_1 + z_2) = \text{sen}\,\alpha + \cos\alpha$ e como α é um ângulo do 1º quadrante,
  $\text{sen}\,\alpha > 0 \land \cos\alpha > 0 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha + \cos\alpha > 0$, logo temos que $\text{Im}\,(z_1 + z_2) > 0$

Ou seja, a representação geométrica de $z_1 + z_2$ no plano complexo, pertence ao 2.º quadrante.

Exame – 2012, 2ª Fase

14.

14.1. Começamos por simplificar as expressões de z_1 e de z_2:

Recorrendo aos coeficientes da linha 3 do Triângulo de Pascal (1 3 3 1), temos que:
$z_1 = (-2+i)^3 = 1(-2)^3+3(-2)^2(i)+3(-2)(i)^2+1(i)^3 = -8+12i-6i^2-i = -8+6+12i-i = -2+11i$

$$z_2 = \frac{1+28i}{2+i} = \frac{(1+28i)\times(2-i)}{(2+i)\times(2-i)} = \frac{2-i+56i-28i^2}{2^2-i^2} = \frac{2-28(-1)+55i}{4-(-1)} = \frac{30+55i}{5} = 6+11i$$

Assim, temos que
$z^3+z_1 = z_2 \Leftrightarrow z^3+(-2+11i) = 6+11i \Leftrightarrow z^3-2+11i = 6+11i \Leftrightarrow z^3 = 8 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8}\operatorname{cis} 0 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8}\operatorname{cis}\frac{0+2k\pi}{3}, k \in \{0,1,2\} \Leftrightarrow z = 2\operatorname{cis}\frac{2k\pi}{3}, k \in \{0,1,2\}$$

Ou seja, temos 3 raízes de índice 3, que são as 3 soluções da equação:

- $k = 0 \rightarrow z = 2\operatorname{cis} 0$
- $k = 1 \rightarrow z = 2\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$
- $k = 2 \rightarrow z = 2\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}$

14.2. Se w e $\frac{1}{w}$ são raízes de índice n de um mesmo número complexo z, então $w^n = z$ e $\left(\frac{1}{w}\right)^n = z$
Logo temos que:
$w^n = \left(\frac{1}{w}\right)^n \Leftrightarrow w^n = \frac{1}{w^n} \Leftrightarrow w^n \times w^n = 1 \Leftrightarrow (w^n)^2 = 1 \Leftrightarrow w^n = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow w^n = \pm 1$

Como $w^n = z$ temos que $w^n = \pm 1 \Leftrightarrow z = \pm 1 \Leftrightarrow z = 1 \vee z = -1$

Exame – 2012, 1ª Fase

15. Como $(\sqrt{2}i)^3 = (\sqrt{2})^3 i^3 = 2\sqrt{2}(-i) = -2\sqrt{2}i$,
e como $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4} = 1 \times \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Vem que

$$\frac{\left(\sqrt{2}i\right)^3 \times \operatorname{cis}\frac{\pi}{4}}{k+i} = \frac{-2\sqrt{2}i \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{k+i} = \frac{\frac{-2i\times\sqrt{2}^2}{2} + \frac{-2i\times i\sqrt{2}^2}{2}}{k+i} = \frac{-2i-2i^2}{k+i} = \frac{-2i-2(-1)}{k+i} =$$

$$= \frac{2-2i}{k+i} = \frac{(2-2i)(k-i)}{(k+i)(k-i)} = \frac{2k-2i-2ki+2i^2}{k^2-i^2} = \frac{2k-2-i(2+2k)}{k^2+1}$$

Logo vem que: $\operatorname{Re}\left(\frac{\left(\sqrt{2}i\right)^3 \times \operatorname{cis}\frac{\pi}{4}}{k+i}\right) = \frac{2k-2}{k^2+1}$ e $\operatorname{Im}\left(\frac{\left(\sqrt{2}i\right)^3 \times \operatorname{cis}\frac{\pi}{4}}{k+i}\right) = -\frac{2+2k}{k^2+1}$

Como z é um um número real se $\operatorname{Im}(z) = 0$, temos que:

$$-\frac{2+2k}{k^2+1} = 0 \Leftrightarrow 2+2k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-2}{2} \Leftrightarrow k = -1$$

Teste Intermédio 12º ano – 24.05.2012

16.

16.1. Resolvendo a equação, vem:

$$z^2+z+1=0 \Leftrightarrow z=\frac{-1^2\pm\sqrt{1^2-4(1)(1)}}{2(1)} \Leftrightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} \Leftrightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{3\times(-1)}}{2} \Leftrightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{3}\times\sqrt{-1}}{2} \Leftrightarrow z=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

C.S.: $\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \ ; \ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

Como w é a solução com coeficiente da parte imaginária positivo, $w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Escrevendo w na forma trigonométrica temos $w=\rho\operatorname{cis}\theta$, onde:

- $\rho=|w|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)}=\sqrt{\frac{4}{4}}=\sqrt{1}=1$
- $\operatorname{tg}\theta=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$; como $\operatorname{sen}\theta>0$ e $\cos\theta<0$, θ é um ângulo do 2º quadrante, logo

  $\theta=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

Assim $z_1=\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$ e logo $\frac{1}{w}=\frac{1\operatorname{cis}0}{\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}}=\frac{1}{1}\operatorname{cis}\left(0-\frac{2\pi}{3}\right)=\operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

16.2. Seja $z=a+bi$, com $a\in\mathbb{R}$ e $b\in\mathbb{R}$.

Assim temos que $\overline{z}=a-bi$, pelo que:

$(\overline{z}+i)\times(z-i)=(a-bi+i)(a+bi-i)=a^2+abi-ai-abi-b^2i^2+bi^2+ai+bi^2-i^2=$
$=a^2-b^2(-1)+b(-1)+b(-1)-(-1)=a^2+b^2-2b+1$

E como $|z-i|^2=|a+bi-i|^2=|a+i(b-1)|^2=\left(\sqrt{a^2+(b-1)^2}\right)^2=a^2+(b-1)^2=a^2+b^2-2b+1$

Temos que $(\overline{z}+i)\times(z-i)=|z-i|^2$

Exame – 2011, Prova especial

17.

17.1. Como $i^{4n+3}=i^3=-i$, vem que:

$z_1\times i^{4n+3}-b=(1+2i)(-i)-b=-i-2i^2-b=-i-2(-1)-b=2-b-i$

E como:

$$\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4}-i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-1-i$$

Logo temos que:

$$w=\frac{z_1\times i^{4n+3}-b}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)}=\frac{2-b-i}{-1-i}=\frac{(2-b-i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)}=\frac{-2+b+i+2i-bi-i^2}{(-1)^2-i^2}=$$

$$=\frac{-2+b+3i-bi-(-1)}{1-(-1)}=\frac{-2+1+b+i(3-b)}{1+1}=\frac{-1+b+i(3-b)}{2}=\frac{-1+b}{2}+\frac{3-b}{2}i$$

Assim para que w seja um número real, $\operatorname{Im}(w)=0$, ou seja:

$$\operatorname{Im}(w)=0 \Leftrightarrow \frac{3-b}{2}=0 \Leftrightarrow 3-b=0 \Leftrightarrow 3=b$$

17.2. Seja $z = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$.
Temos que:

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, pelo que se $|z| = 1$ então:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = 1^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$$

- $|1 + z|^2 = |1 + a + bi|^2 = \left(\sqrt{(1 + a)^2 + b^2}\right)^2 = \left(\sqrt{1 + 2a + a^2 + b^2}\right)^2 = 1 + 2a + a^2 + b^2$
- $|1 - z|^2 = |1 - a - bi|^2 = \left(\sqrt{(1 - a)^2 + (-b)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{1 - 2a + a^2 + b^2}\right)^2 = 1 - 2a + a^2 + b^2$

Assim temos que:
$|1+z|^2 + |1-z|^2 = 1 + 2a + a^2 + b^2 + 1 - 2a + a^2 + b^2 = 2 + 2a^2 + 2b^2 = 2 + 2\left(a^2 + b^2\right) = 2 + 2(1) = 4$

Exame – 2011, 2ª Fase

18.

18.1. Como z_1 é raíz do polinómio, este é divisível por $(z - 1)$, pelo que podemos usar a regra de Ruffini para fazer a divisão e obter um polinómio de grau 2.

	1	-1	16	-16
1		1	0	16
	1	0	16	0

E assim temos que
$z^3 - z^2 + 16z - 16 = (z - 1)(z^2 + 0z + 16) + 0 = (z - 1)(z^2 + 16)$

Podemos agora determinar as raízes do polinómio $z^2 + 16$ (que também são raízes do polinómio $z^3 - z^2 + 16z - 16$) resolvendo a equação $z^2 + 16 = 0$:

$$z^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -16 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{-16} \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{16 \times (-1)} \Leftrightarrow z = 4i \vee z = -4i$$

Escrevendo as raízes encontradas na forma trigonométrica, temos:
$z = 4 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \vee z = 4 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{2}\right)$

18.2. Começamos por escrever z_2 na forma trigonométrica e calcular o produto $z_2 \times z_3$ na forma trigonométrica:

Como z_2 é um imaginário puro, $\arg(z_2) = \frac{\pi}{2}$ e $|z_2| = 5$, pelo que $z_2 = 5 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$

Assim temos que:
$z_2 \times z_3 = \left(5 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}\right) \times \left(\operatorname{cis}\left(\frac{n\pi}{40}\right)\right) = (5 \times 1) \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{40}\right) = 5 \operatorname{cis}\left(\frac{20\pi}{40} + \frac{n\pi}{40}\right) = 5 \operatorname{cis} \frac{20\pi + n\pi}{40}$

Como a representação geométrica do número complexo $z_2 \times z_3$ está no terceiro quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares se
$\arg(z_2 \times z_3) = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{8k\pi}{4} = \frac{5\pi + 8k\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$, vem que:

$$\frac{20\pi + n\pi}{40} = \frac{5\pi + 8k\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{20\pi + n\pi}{40} = \frac{50\pi + 80k\pi}{40} \Leftrightarrow 20\pi + n\pi = 50\pi + 80k\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20 + n = 50 + 80k \Leftrightarrow n = 30 + 80k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Substituindo k por valores inteiros, vem que:

- $k = -1$, temos $n = -50$;
- $k = 0$, temos $n = 30$;
- $k = 1$, temos $n = 110$;

Logo, o menor valor natural de n é 30.

Exame – 2011, 1ª Fase

19. Como 1 é solução da equação, o polinómio $z^3 - z^2 + 4z - 4$ é divisível por $(z-1)$, pelo que podemos usar a regra de Ruffini para fazer a divisão e obter um polinómio de grau 2.

	1	-1	4	-4
1		1	0	4
	1	0	4	0

E assim temos que
$z^3 - z^2 + 4z - 4 = (z-1)(z^2+0z+4) + 0 = (z-1)(z^2+4)$

Como $z^2+4=0 \Leftrightarrow z^2=-4 \Leftrightarrow z=\pm\sqrt{-4} \Leftrightarrow z=\pm\sqrt{4\times(-1)} \Leftrightarrow z=2i \vee z=-2i$

Temos que:
$z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+4)=0 \Leftrightarrow z-1=0 \vee z^2+4=0 \Leftrightarrow z=1 \vee z=2i \vee z=-2i$

Ou seja as três soluções são $w_1=1$, $w_2=2i$ e $w_3=-2i$

Logo as medidas dos lados do triângulo, cujos vértices são as representações geométricas das soluções da equação podem ser calculadas como

- $|w_1-w_2| = |1-2i| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$
- $|w_1-w_3| = |1-(-2i)| = |1+2i| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$
- $|w_2-w_3| = |2i-(-2i)| = |2i+2i| = |4i| = \sqrt{0^2+4^2} = \sqrt{16} = 4$

Logo o perímetro do triângulo é:
$|w_1-w_2|+|w_1-w_3|+|w_2-w_3| = \sqrt{5}+\sqrt{5}+4 = 4+2\sqrt{5}$

Teste Intermédio 12º ano – 26.05.2011

20. Como não podemos calcular somas na forma trigonométrica, devemos escrever z_1 na forma algébrica:
$z_1 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right) = \cos\frac{\pi}{7} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$

Assim temos que:
$z_1+z_2 = \cos\frac{\pi}{7} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{7} + 2 + i = 2+\cos\frac{\pi}{7} + i\left(1+\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)$

$$\text{Logo, } |z_1+z_2|^2 = \left(\sqrt{\left(2+\cos\frac{\pi}{7}\right)^2+\left(1+\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)^2}\right)^2 = \left(2+\cos\frac{\pi}{7}\right)^2+\left(1+\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)^2 =$$

$$= 2^2+2\times2\times\cos\frac{\pi}{7}+\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^2+1^2+2\times1\times\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}+\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)^2 =$$

$$= 4+4\cos\frac{\pi}{7}+\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^2+1+2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}+\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)^2 =$$

$$= 5+4\cos\frac{\pi}{7}+2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}+\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^2 = 5+4\cos\frac{\pi}{7}+2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}+1 =$$

$$= 6+4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

Exame – 2010, 1ª Fase

21. Escrevendo $1+\sqrt{3}i$ na forma trigonométrica temos $1+\sqrt{3}i = \rho \operatorname{cis}\theta$, onde:

- $\rho = |1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{3}$

Assim $1+\sqrt{3}i = 2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$

Calculando o quadrado e, depois, o produto na forma trigonométrica temos:

$$(2\operatorname{cis}\theta)^2 \times (1+\sqrt{3}i) = 2^2 \operatorname{cis}(2\theta) \times 2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3} = (4\times 2)\operatorname{cis}\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right) = 8\operatorname{cis}\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

Para que a imagem geométrica do número complexo $(2\operatorname{cis}\theta)^2 \times (1+\sqrt{3}i)$ pertença à bissetriz do 3.º quadrante, o seu argumento deve ser igual a $\frac{5\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, pelo que podemos calcular o valor de θ com a igualdade:

$$2\theta+\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{4}+2k\pi\,,k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; 2\theta = \frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+2k\pi\,,k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; 2\theta = \frac{15\pi}{12}-\frac{4\pi}{12}+2k\pi\,,k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2\theta = \frac{11\pi}{12}+2k\pi\,,k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; \theta = \frac{11\pi}{24}+k\pi\,,k\in\mathbb{Z}$$

Como $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, para $k=0$, temos que $\theta = \frac{11\pi}{24}$

Exame – 2009, Ép. especial

22. Simplificando a expressão indicada para z_1, temos:
$z_1 = (k-i)(3-2i) = 3k-2ki-3i+2i^2 = 3k+i(-2k-3)+2(-1) = 3k-2+i(-2k-3)$

Ou seja, $\operatorname{Re}(z_1) = 3k-2$ e $\operatorname{Im}(z_1) = -2k-3$

E para que z_1 seja um imaginário puro, $\operatorname{Re}(z_1)=0$, logo temos que:

$3k-2=0 \;\Leftrightarrow\; 3k=2 \;\Leftrightarrow\; k=\frac{2}{3}$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2009, 2ª Fase

23. Temos que $w = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}^+$ e $b \in \mathbb{R}^+$, pelo que $\overline{w} = a - bi$ e $-w = -a - bi$.

Como $\overline{BC} = |\overline{w} - (-w)| = |a - bi - (-a - bi)| = |a - bi + a + bi| = |2a|$ e $\overline{BC} = 8$, vem que:

$|2a| = 8$, como $a > 0$, sabemos que $2a = 8 \quad \Leftrightarrow \quad a = 4$

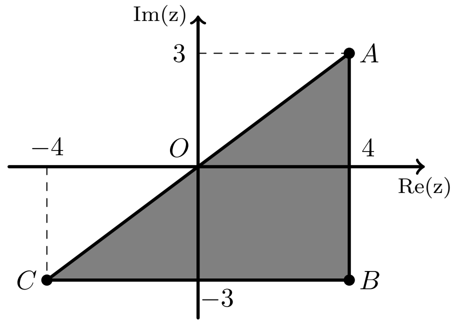
E como $w = \sqrt{a^2 + b^2}$, sendo $a = 4$, vem que $w = \sqrt{4^2 + b^2} = \sqrt{16 + b^2}$. Como $|w| = 5$, vem que:

$\sqrt{16 + b^2} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{16 + b^2}\right)^2 = 5^2 \quad \Leftrightarrow \quad 16 + b^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = 25 - 16 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad b = \pm\sqrt{9}$

Como $b > 0$, sabemos que $b = \sqrt{9} = 3$

Assim, como $a = 4$ e $b = 3$ temos que:

- $w = a + bi = 4 + 3i$
- $\overline{w} = a - bi = 4 - 3i$
- $-w = -a - bi = -4 - 3i$



Pelo que podemos representar o triângulo, e perceber que considerando $[BC]$ a base do triângulo ($\overline{BC} = 8$), a altura é $[AB]$ ($\overline{AB} = |w - \overline{w}| = 6$).

Assim temos que a área é:

$A_{[ABC]} = \dfrac{\overline{BC} \times \overline{AB}}{2} = \dfrac{8 \times 6}{2} = \dfrac{48}{2} = 24$

Exame – 2009, 2ª Fase

24. Escrevendo $-i$ na forma trigonométrica para facilitar o cálculo do produto temos:

$-i = \text{cis}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$, e logo:

$-iz_2 = \left(\text{cis}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right) \times \left(\text{cis}\,\dfrac{5\pi}{6}\right) = \text{cis}\left(-\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{5\pi}{6}\right) = \text{cis}\left(-\dfrac{3\pi}{6} + \dfrac{5\pi}{6}\right) = \text{cis}\,\dfrac{2\pi}{6} = \text{cis}\,\dfrac{\pi}{3}$

Logo $(-iz_2)^n = \left(\text{cis}\,\dfrac{\pi}{3}\right)^n = \text{cis}\left(n \times \dfrac{\pi}{3}\right) = \text{cis}\,\dfrac{n\pi}{3}$

E como $-1 = \text{cis}\,\pi$, temos que:

$(-iz_2)^n = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{cis}\,\dfrac{n\pi}{3} = \text{cis}\,\pi$, pelo que $\dfrac{n\pi}{3} = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

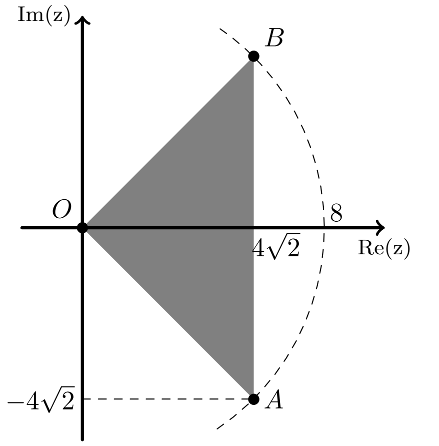
Como $\dfrac{n\pi}{3} = \pi + 2k\pi$, se atribuirmos valores a k temos:

- Se $k = -1$, $\dfrac{n\pi}{3} = \pi + 2(-1)\pi \quad \Leftrightarrow \quad n\pi = 3\pi - 6\pi \quad \Leftrightarrow \quad n = 3 - 6 \quad \Leftrightarrow \quad n = -3 \quad$ (mas $-3 \notin \mathbb{N}$)
- Se $k = 0$, $\dfrac{n\pi}{3} = \pi + 2(0)\pi \quad \Leftrightarrow \quad n\pi = 3\pi \quad \Leftrightarrow \quad n = 3 \quad$ ($3 \in \mathbb{N}$)
- Se $k = 1$, $\dfrac{n\pi}{3} = \pi + 2(1)\pi \quad \Leftrightarrow \quad n\pi = 3\pi + 6\pi \quad \Leftrightarrow \quad n = 3 + 6 \quad \Leftrightarrow \quad n = 9 \quad$ ($9 \in \mathbb{N}$, mas $9 > 3$)

Logo que o menor valor natural de $n \in \mathbb{N}$, tal que $(-iz_2)^n = -1$ é 3, para $k = 0$

Exame – 2009, 1ª Fase

25. Representando os pontos A e B, podemos desenhar o triângulo $[ABC]$ (ver figura ao lado).



Como $z_2 = 8\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, podemos escrever este número na forma algébrica:

$$z_2 = 8\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 8\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$$

E assim, considerando como base do triângulo o lado $[AB]$, temos que a medida da base é $2|\text{Im}\,(z)| = 2 \times 4\sqrt{2}$ e a medida da altura é $\text{Re}\,(z) = 4\sqrt{2}$.

Logo a área do triângulo $[ABC]$ é:

$$A_{[ABC]} = \frac{2 \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}}{2} = 4^2 \times \left(\sqrt{2}\right)^2 = 16 \times 2 = 32$$

Exame – 2008, Ép. especial

26. Como $i^{46} = i^{4\times 11+2} = i^2 = -1$, pelo que $z_2 = z_1.i^{46} = z_1(-1) = -z_1 = -1 + \sqrt{3}i$

Como $\overline{AB} = |z_1 - z_2|$, vem que:

$$\overline{AB} = \left|1 - \sqrt{3}i - (-1 + \sqrt{3}i)\right| = \left|1 - \sqrt{3}i + 1 - \sqrt{3}i\right| = \left|2 - 2\sqrt{3}i\right| =$$

$$= \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4 \times 3} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

Exame – 2008, 1ª Fase

27. Como $z_2 = 4iz_1$, vem que:
$z_2 = 4iz_1 = 4i(3 + yi) = 12i + 4yi^2 = 12i + 4y(-1) = -4y + 12i$

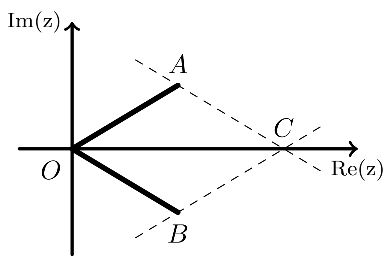
Assim sabemos que $\text{Im}\,(z_2) = 12$, e também que $\text{Im}\,(z_1) = y$.
Como $\text{Im}\,(z_1) = \text{Im}\,(z_2)$ temos que $y = 12$, pelo que, substituindo na expressão simplificada de z_2 temos:

$$z_2 = -4(12) + 12i = -48 + 12i$$

Exame – 2007, 2ª fase

28.

28.1. Como $[AOBC]$ é um paralelogramo temos que C é a imagem geométrica da soma dos complexos que têm como imagens geométricas os pontos A e B, ou seja, $w = z + \overline{z}$



Como $z = \text{cis}\,\alpha = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$,
temos que $\overline{z} = \cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha$

Assim $w = z + \overline{z} = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha = 2\cos\alpha$

28.2. Como $z = \operatorname{cis}\alpha$, pela fórmula de Moivre para a potenciação, $z^3 = 1^3 \operatorname{cis}(3\times\alpha) = \operatorname{cis}(3\alpha)$

Como $i = \operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$, fazendo a divisão na forma trigonométrica temos:

$\frac{z^3}{i} = \frac{\operatorname{cis}(3\alpha)}{\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}} = \operatorname{cis}\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

E $\frac{z^3}{i}$ é um número real se $\operatorname{Im}\left(\frac{z^3}{i}\right) = 0$, pelo que, $\operatorname{sen}\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\operatorname{sen}\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3\alpha - \frac{\pi}{2} = 0 + k\pi, k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; 3\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; \alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

Como se pretende que $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, atribuíndo o valor zero a k temos $\alpha = \frac{\pi}{6}$

Exame – 2007, 1ª fase

29. Resolvendo a equação temos:

$$iz^3 - \sqrt{3} - i = 0 \;\Leftrightarrow\; iz^3 = \sqrt{3} + i \;\Leftrightarrow\; z^3 = \frac{\sqrt{3}}{i} + \frac{i}{i} \;\Leftrightarrow\; z^3 = \frac{i\sqrt{3}}{i^2} + 1 \;\Leftrightarrow\; z^3 = -i\sqrt{3} + 1 \;\Leftrightarrow\; z^3 = 1 - \sqrt{3}i$$

Escrevendo $1 - \sqrt{3}i$ na forma trigonométrica ($z^3 = \rho\operatorname{cis}\theta$) temos:

- $\rho = |z^3| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$; como $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 4º quadrante, logo $\theta = -\frac{\pi}{3}$

Assim $z^3 = 2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, e por isso, usando a fórmula de Moivre, temos:

$\sqrt[3]{2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right)$, $k \in \{0,1,2\}$, ou seja, temos 3 raízes de índice 3:

- $k = 0 \to w_1 = \sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{9}\right)$
- $k = 1 \to w_2 = \sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{6\pi}{9}\right) = \sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{9}$
- $k = 2 \to w_3 = \sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{12\pi}{9}\right) = \sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\frac{11\pi}{9}$

Logo w_3 é a única solução da equação que pertence ao terceiro quadrante, porque $\pi < \frac{11\pi}{9} < \frac{3\pi}{2}$, ou seja $\pi < \arg(w_2) < \frac{3\pi}{2}$.

Logo, a solução da equação que pertence ao 3º quadrante, escrita na fórmula trigonométrica é:

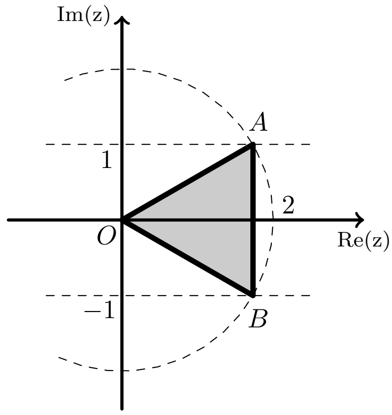
$$w_3 = \sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\frac{11\pi}{9}$$

Exame – 2006, Ép. especial

30. Como o triângulo $[AOB]$ é equilátero e tem perímetro 6, logo cada lado tem comprimento 2.

Assim A e B devem estar sobre a circunferência de centro na origem e raio 2, para que $\overline{OA} = \overline{OB} = 2$ (o que significa que $|z| = |\overline{z}| = 2$).

Como B é simétrico de A relativamente ao eixo real (porque $\overline{z}$ é o conjugado de z) e $\overline{AB} = 2$, sabemos que A está sobre a reta $\text{Im}(w) = 1$ e B sobre a reta $\text{Im}(w) = -1$



Como $\text{Im}(z) = 1$ e $\text{Re}(z) > 0$, sabemos que z é da forma $z = a+i, a \in \mathbb{R}^+$

Por outro lado, temos que $|z| = |a+i| = \sqrt{a^2+1^2} = \sqrt{a^2+1}$, e como $|z| = 2$, temos que:
$\sqrt{a^2+1} = 2 \;\Leftrightarrow\; \left(\sqrt{a^2+1}\right)^2 = 2^2 \;\Rightarrow\; a^2+1 = 4$

Como $a > 0$, temos que $a^2+1 = 4 \;\Leftrightarrow\; a^2 = 3 \;\Leftrightarrow\; a = \sqrt{3}$, logo $z = \sqrt{3}+i$

Exame – 2006, 2ª fase

31. Temos que:
$z_1 = \text{cis}\,\alpha = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$, e
$z_2 = \text{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha = \text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha$

Logo $z_1 + z_2 = (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) + (\,\text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha) = (\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha) + i(\,\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha)$

Logo $\text{Re}\,(z_1+z_2) = \text{Im}\,(z_1+z_2)$, o que significa que a representação geométrica de z_1+z_2 pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exame – 2005, 1ª fase

32. Como a área do retângulo é 6, e a lado maior mede $3\sqrt{2}$ ($\overline{OR} = 6$), temos que:

$$A_{[OPQR]} = 6 \;\Leftrightarrow\; \overline{OP} \times \overline{OR} = 6 \;\Leftrightarrow\; \overline{OP} \times 3\sqrt{2} = 6 \;\Leftrightarrow\; \overline{OP} = \frac{6}{3\sqrt{2}} \;\Leftrightarrow\; \overline{OP} = \frac{6\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \overline{OP} = \frac{6\sqrt{2}}{3\times 2} \;\Leftrightarrow\; \overline{OP} = \sqrt{2}$$

Assim, temos que $|z_1| = \sqrt{2}$ e $\arg\,(z_1) = \frac{\pi}{4}$, ou seja:

$$z_1 = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{2}{2} + \frac{2}{2}i = 1+i$$

Por outro lado, como as retas OP e OR são perpendiculares (porque contém lados adjacentes de um retângulo), se $\arg\,(z_1) = \frac{\pi}{4}$, então $\arg\,(z_2) = -\frac{\pi}{4}$ (z_2 tem a imagem geométrica no 4º quadrante).

Assim, temos que $|z_2| = 3\sqrt{2}$ e $\arg\,(z_2) = -\frac{\pi}{4}$, ou seja:

$$z_2 = 3\sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i\right) = \frac{3\times 2}{2} - \frac{3\times 2}{2}i =$$
$$= 3 - 3i$$

Exame – 2004, Ép. especial

33. Considerando z na forma trigonométrica temos $z = \rho \operatorname{cis} \theta$, e pela fórmula de Moivre, vem que:
$z^3 = \rho^3 \operatorname{cis}(3\theta)$

Como a imagem geométrica de z pertence ao primeiro quadrante, temos que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, e assim:

$3 \times 0 < 3\theta < 3 \times \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 3\theta < \frac{3\pi}{2}$

Logo $0 < \arg(z^3) < \frac{3\pi}{2}$, o que significa que, dependendo do valor de θ, a imagem geométrica de z^3 pode pertencer ao primeiro quadrante (se $0 < 3\theta < \frac{\pi}{2}$), ou ao segundo (se $\frac{\pi}{2} < 3\theta < \pi$), ou ao terceiro (se $\pi < 3\theta < \frac{3\pi}{2}$), mas nunca ao quarto quadrante.

Exame – 2004, 1ª fase

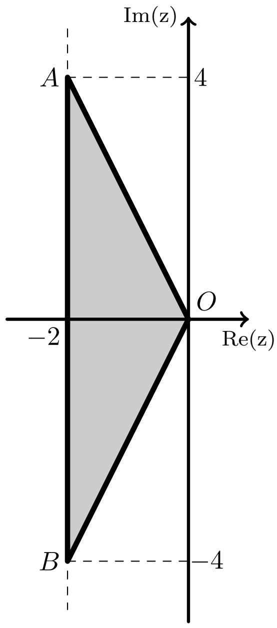
34. Como a representação geométrica de z está situada sobre a reta definida pela equação $\operatorname{Re}(z) = -2$, temos que $z = -2 + bi$, com $b \in \mathbb{R}$.
Assim $\overline{z} = -2 - bi$, com $b \in \mathbb{R}$.

Tomando para altura a distância da origem à reta $\operatorname{Re}(z) = -2$, temos que a altura é 2, e a base terá de comprimento $|z-\overline{z}| = |a+bi-(a-bi)| = |a+bi-a+bi| = |2bi|$
Como a representação geométrica de z pertence ao segundo quadrante, $b > 0$, e logo a medida da base será $2b$.

Como a área do triângulo é 8, (com altura 2 e base $2b$) temos que:

$A_{[AOB]} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2b \times 2}{2} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 2b = 8 \quad \Leftrightarrow \quad b = 4$

Assim temos que $z = -2 + 4i$, pelo que $\overline{z} = -2 - 4i$ e temos, na figura ao lado a representação, no plano complexo, do triângulo $[AOB]$.



Exame – 2003, 2ª Fase

35. Escrevendo z_1 na forma trigonométrica temos $z_1 = \rho \operatorname{cis} \theta$, onde:

- $\rho = |z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{-1}{1} = -1$; como $\operatorname{sen} \theta < 0$ e $\cos \theta > 0$, θ é um ângulo do 4º quadrante, logo $\theta = -\frac{\pi}{4}$

Assim, $z_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Por outro lado, podemos escrever $z = \rho \operatorname{cis} \theta$ e $\overline{z} = \rho \operatorname{cis}(-\theta)$, pelo que usando a fórmula de Moivre e multiplicando na forma trigonométrica temos que:

$$z^2 = \overline{z} \times z_1 \Leftrightarrow (\rho \operatorname{cis} \theta)^2 = (\rho \operatorname{cis}(-\theta)) \times \left(\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \Leftrightarrow \rho^2 \operatorname{cis}(2\theta) = (\rho \times \sqrt{2}) \operatorname{cis}\left(-\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

Como dois números complexos w_1 e w_2, são iguais se $|w_1| = |w_2| \wedge \arg(w_1) = \arg(w_2) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ vem:

$$\begin{cases} \rho^2 = \rho\sqrt{2} \\ 2\theta = -\theta - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 - \rho\sqrt{2} = 0 \\ 2\theta + \theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho(\rho - \sqrt{2}) = 0 \\ 3\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 0 \vee \rho = \sqrt{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, atribuindo valores 0 e 1 a k, porque a equação de grau 2 tem duas soluções, temos:

- $k = 0 \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{12}$
- $k = 1 \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$

Logo os números complexos, não nulos, que são soluções da equação são:
$w_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{12}\right)$ e $w_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{7\pi}{12}$

Exame – 2002, Prova para militares

36.

36.1. z_1 é raiz do polinómio se $z_1^2 + b(z_1) + c = 0$, pelo que temos:

$$(1+i)^2 + b(1+i) + c = 0 \Leftrightarrow (1^2 + 2i + i^2) + (b + bi) + c = 0 \Leftrightarrow 1 + 2i - 1 + b + bi + c = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b + c + 2i + bi = 0 \Leftrightarrow (b+c) + (2+b)i = 0 + 0i$$

Como dois números complexos, w_1 e w_2 são iguais se $\operatorname{Re}(w_1) = \operatorname{Re}(w_2) \wedge \operatorname{Im}(w_1) = \operatorname{Im}(w_2)$, temos que:

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ 2 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 + c = 0 \\ b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = -2 \end{cases}$$

Logo z_1 é raiz do polinómio $x^2 + bx + c$ se $b = -2 \wedge c = 2$

36.2. Escrevendo z_1 na forma trigonométrica temos $z_1 = \rho \operatorname{cis} \theta$, onde:

- $\rho = |z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \dfrac{1}{1} = 1$; como $\operatorname{sen} \theta > 0$ e $\cos \theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

Assim, $z_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \dfrac{\pi}{4}$

E sabemos que $\overline{z_2} = \operatorname{cis}(-\alpha)$, pelo que:
$z_1 \times \overline{z_2} = \left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \dfrac{\pi}{4}\right) \times (\operatorname{cis}(-\alpha)) = (\sqrt{2} \times 1) \operatorname{cis} \left(\dfrac{\pi}{4} + (-\alpha)\right) = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$

Como $z_1 \times \overline{z_2}$ é um número real negativo se $\arg(z_1 \times \overline{z_2}) = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, temos que:

$$\frac{\pi}{4} - \alpha = \pi + 2k\pi \;\Leftrightarrow\; \frac{\pi}{4} - \frac{4\alpha}{4} = \frac{4\pi}{4} + \frac{4 \times 2k\pi}{4} \;\Leftrightarrow\; \pi - 4\alpha = 4\pi + 8k\pi \;\Leftrightarrow\; -4\alpha = 3\pi + 8k\pi \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \alpha = -\frac{3\pi}{4} - \frac{8k\pi}{4} \;\Leftrightarrow\; \alpha = -\frac{3\pi}{4} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como se pretende um valor de α, pertencente ao intervalo de $[0,2\pi]$, para $k = -1$, temos:

$$\alpha = -\frac{3\pi}{4} - 2(-1)\pi = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi = -\frac{3\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

Exame – 2002, 2ª Fase

37. O perímetro do triângulo $[ABO]$ é dado por: $P_{[ABO]} = \overline{AB} + \overline{OA} + \overline{AB}$.

Escrevendo z_2 na forma algébrica temos:
$z_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \dfrac{3\pi}{4} = \sqrt{2}\left(\cos \dfrac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{2}}{2} i\right) = -\dfrac{2}{2} + \dfrac{2}{2} i = -1 + i$

- $\overline{OB} = |z_2| = \sqrt{2}$
- $\overline{OA} = |z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- $\overline{AB} = |z_1 - z_2| = |1 + i - (-1 + i)| = |1 + i + 1 - i| = |2| = 2$

Assim, $P_{[ABO]} = \overline{AB} + \overline{OA} + \overline{AB} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$

Exame – 2002, 1ª fase - 1ª chamada

38. Como $2i = 2 \operatorname{cis} \dfrac{\pi}{2}$, calculando o produto na forma trigonométrica, temos que
$z_2 = 2i \times z_1 = \left(2 \operatorname{cis} \dfrac{\pi}{2}\right) \times \left(\rho \operatorname{cis} \dfrac{\pi}{3}\right) = 2\rho \operatorname{cis} \left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right)$
Ou seja, $\arg(z_2) - \arg(z_1) = \left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right) - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$, o que significa que o triângulo $[AOB]$ é retângulo em O.

Assim podemos considerar $|z_1|$ como a medida da base e $|z_2|$ como a medida da altura (ou vice-versa):
$A_{[AOB]} = 16 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{|z_1| \times |z_2|}{2} = 16 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{\rho \times 2\rho}{2} = 16 \;\Leftrightarrow\; \rho^2 = 16 \;\Leftrightarrow\; \rho = \pm\sqrt{16} = \rho = \pm 4$
Como ρ é positivo, temos que $\rho = 4$ e logo $z_1 = 4 \operatorname{cis} \dfrac{\pi}{3}$

Escrevendo z_1 na forma algébrica, vem:
$z_1 = 4 \operatorname{cis} \dfrac{\pi}{3} = 4\left(\cos \dfrac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3}\right) = 4\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \dfrac{4}{2} + \dfrac{4\sqrt{3}}{2} i = 2 + 2\sqrt{3} i$

Exame – 2001, Prova para militares

39. Escrevendo z_1 na forma trigonométrica temos $z_1 = \rho \operatorname{cis} \theta$, onde:

- $\rho = |z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{1} = 1$; como $\operatorname{sen} \theta > 0$ e $\cos \theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{4}$

Assim, $z_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$

Logo calculando z_1^{4n+1}, temos:

$$z_1^{4n+1} = \left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right)^{4n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{4n+1} \operatorname{cis} \left((4n+1) \times \frac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^{4n+1} \operatorname{cis} \left(\frac{4n\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= \left(\sqrt{2}\right)^{4n+1} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right),\ n \in \mathbb{N}$$

Como um número complexo w tem a sua representação geométrica sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares se $\arg(w) = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, e $\arg\left(z_1^{4n+1}\right) = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{N}$, então a imagem geométrica de z_1^{4n+1} está sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares para todos os valores naturais de n.

Exame – 2001, Ép. especial

40.

40.1. Como um losango tem os lados todos iguais, temos que o lado (l) do losango tem medida $\frac{20}{4} = 5$.

Logo, se o ponto A, for a representação geométrica de z_1, o ponto B, simétrico de A, relativamente à origem também é um vértice do losango, por este estar centrado na origem, ou seja, B é a imagem geométrica do numero complexo $z_2 = -4i$.

Como o losango está centrado na origem, as suas diagonais estão sobre os eixos, pelos que os restantes vértices são números reais, z_3 e z_4, tais que $|z_1 - z_3| = 5$ e $|z_1 - z_4| = 5$.

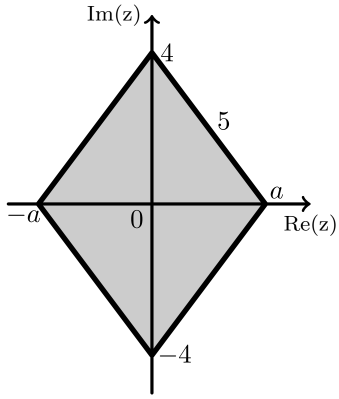
Assim, sendo $z = a$ um número real, temos que:

$|z_1 - z| = 5 \Leftrightarrow |4i - a| = 5 \Leftrightarrow |-a + 4i)| = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(-a)^2 + (4)^2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 16} = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2 + 16}\right)^2 = (5)^2 \Leftrightarrow a^2 + 16 = 25 \Leftrightarrow a^2 = 25 - 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow a = 3 \vee a = -3$



Logo os números complexos, cujas imagens geométricas são os restantes vértices do losango, são $z_2 = -4i$, $z_3 = 3$ e $z_4 = -3$.

40.2. Como $\left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \operatorname{cis} \left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = 2i$, temos que:

$$\left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right)^2 . z = 2 + z_1 \Leftrightarrow 2i.z = 2 + 4i \Leftrightarrow z = \frac{2+4i}{2i} \Leftrightarrow z = \frac{(2+4i)(i)}{2i(i)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{2i + 4i^2}{2i^2} \Leftrightarrow z = \frac{2i + 4(-1)}{2(-1)} \Leftrightarrow z = \frac{-4+2i}{-2} \Leftrightarrow z = 2 - i$$

Exame – 2001, 1ª fase - 2ª chamada

41.

41.1. Seja w o número complexo que tem por imagem geométrica o ponto P, e como w é uma das raízes quadradas de z_1, temos que $w^2 = z_1$.

$w^2 = (4+bi)^2 = 4^2 + 2\times 4\times bi + (bi)^2 = 16 + 8bi + b^2i^2 = 16 + 8bi - b^2 = 16 - b^2 + 8bi$

Como $w^2 = z_1$, então $\text{Re}\,(w) = \text{Re}\,(z_1) \wedge \text{Im}\,(w) = \text{Im}\,(z_1)$, ou seja:

$16 - b^2 = 7 \wedge 8b = 24 \Leftrightarrow 16 - b^2 = 7 \wedge 8b = 24 \Leftrightarrow 16 - 7 = b^2 \wedge b = 3 \Leftrightarrow 9 = b^2 \wedge b = 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow b = \pm\sqrt{9} \wedge b = 3 \Leftrightarrow b = \pm 3 \wedge b = 3 \Leftrightarrow b = 3$$

Logo a ordenada do ponto P é 3.

41.2. Como $\text{Re}\,(z_1) > 0$ e também $\text{Im}\,(z_1) > 0$, temos que a representação geométrica de z_1 pertence ao primeiro quadrante, isto é $0 < \arg(z_1) < \frac{\pi}{2}$.

Mas também, e porque $\text{Re}\,(z_1) < \text{Im}\,(z_1)$, a representação geométrica de z_1 está acima da bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja, $\frac{\pi}{4} < \arg(z_1) < \frac{3\pi}{4}$.

Pela conjunção das duas condições sabemos que $\frac{\pi}{4} < \arg(z_1) < \frac{\pi}{2}$

Considerando $|z_1| = \rho$ e fazendo o produto na forma trigonométrica, vem:
$z_1 \times z_2 = (\rho \operatorname{cis} \theta) \times (\operatorname{cis} \alpha) = \rho \operatorname{cis} (\theta + \alpha)$

Assim, como $\arg(z_1 \times z_2) = \theta + \alpha$, vem que:
$\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} < \arg(z_1 \times z_2) < \frac{\pi}{2} + \pi \Leftrightarrow \frac{4\pi}{4} < \arg(z_1 \times z_2) < \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} \Leftrightarrow \pi < \arg(z_1 \times z_2) < \frac{3\pi}{2}$

Ou seja, a imagem geométrica de $(z_1 \times z_2)$ pertence ao **3º quadrante**.

Exame – 2001, Prova modelo

42.

42.1. Como z_1 tem argumento $\frac{\pi}{6}$, podemos considerar $z_1 = \rho \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$, $\rho \in \mathbb{R}^+$, e assim:

$z_2 = z_1^4 = \left(\rho \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}\right)^4 = \rho^4 \operatorname{cis}\left(4 \times \frac{\pi}{6}\right) = \rho^4 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{6} = \rho^4 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$

Assim, vem que, a amplitude do ângulo A_1OA_2, é dada por:
$\arg(z_2) - \arg(z_2) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

Ou seja, ângulo A_1OA_2 é reto.

42.2. Se o perímetro P_C da circunferência é 4π, então podemos calcular o raio r:
$P_C = 2\pi r \Leftrightarrow 4\pi = 2\pi r \Leftrightarrow \frac{4\pi}{2\pi} = r \Leftrightarrow 2 = r$, ou seja $|z_1| = 2$

Logo podemos escrever z_1 na forma trigonométrica e depois na forma algébrica:
$z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$

Exame – 2000, 2ª fase

43.

43.1. Como 1 é raiz do polinómio, este é divisível por $(x-1)$, pelo que podemos usar a regra de Ruffini para fazer a divisão e obter um polinómio de grau 2.

	1	-3	6	-4
1		1	-2	4
	1	-2	4	$\boxed{0}$

E assim temos que
$x^3-3x^2+6x-4=(x-1)(x^2-2x+4)+0=(x-1)(x^2-2x+4)$

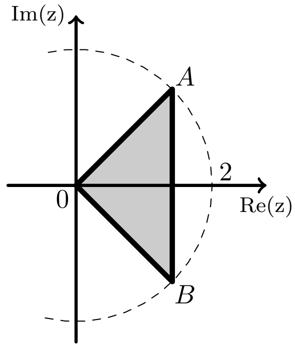
Podemos agora determinar as raízes do polinómio x^2-2x+4 (que também são raízes do polinómio x^3-3x^2+6x-4) resolvendo a equação $x^2-2x+4=0$:

$$x^2-2x+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(4)}}{2\times 1} \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-16}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{-12}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4\times 3\times(-1)}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{2\pm 2i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{3}i$$

Logo as raízes do polinómio são 1 , $1+\sqrt{3}i$ e $1-\sqrt{3}i$

43.2.
- como $\overline{z}$ é o conjugado de z, sabemos que $\arg(z)=-\arg(\overline{z})$
- como o ângulo AOB é reto, temos que $\arg(z)+-(\arg(\overline{z}))=\frac{\pi}{2}$



Logo,

$$\arg(z)+-(\arg(\overline{z}))=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg(z)+-(-\arg(z))=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \arg(z)+\arg(z)=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\arg(z)=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg(z)=\frac{\pi}{4}$$

Logo $z=2\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$

Assim, como $i=\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$, fazendo a divisão na forma trigonométrica. e escrevendo o resultado na forma algébrica vem que:

$$\frac{z}{i}=\frac{2\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}}=2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{4}\right)=2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\left(-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$$

Exame – 2000, Prova modelo