

MATEMÁTICA A - 12º Ano

Nºs Complexos - Potências e raízes

Exercícios de exames e testes intermédios

1. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, seja $z = \frac{2i}{1-i} + 2i^{23}$

Determine, sem recorrer à calculadora, os números complexos w tais que $w^3 = \bar{z}$
Apresente os valores pedidos na forma trigonométrica.

Exame – 2016, Ép. especial

2. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, seja $z = 3 + 4i$

Sabe-se que z é uma das raízes de índice 6 de um certo número complexo w

Considere, no plano complexo, o polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 6 desse número complexo w

Qual é o perímetro do polígono?

- (A) 42 (B) 36 (C) 30 (D) 24

Exame – 2016, 2ª Fase

3. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, seja $z_1 = (1 + i)^6$ e $z_2 = \frac{8i}{\text{cis}\left(-\frac{6\pi}{5}\right)}$

Sabe-se que as imagens geométricas dos complexos z_1 e z_2 e são vértices consecutivos de um polígono regular de n lados, com centro na origem do referencial.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de n

Exame – 2015, Ép. especial

4. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, seja $z_1 = \frac{-1 + i}{\sqrt{2} \text{cis} \frac{\pi}{12}}$

Determine os números complexos z que são solução da equação $z^4 = \bar{z}_1$, sem utilizar a calculadora.
Apresente esses números na forma trigonométrica.

Exame – 2015, 2ª Fase



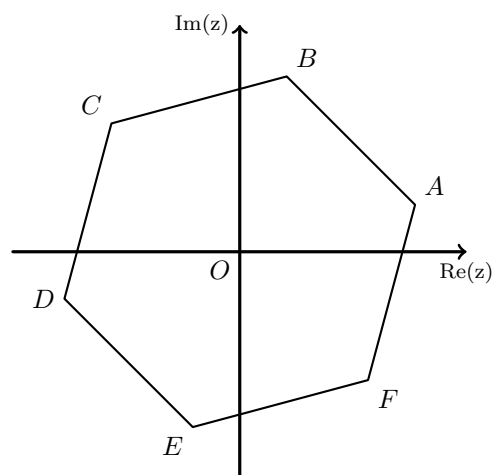
5. Na figura ao lado, está representado, no plano complexo, um polígono regular $[ABCDEF]$

Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das n raízes de índice n de um número complexo z

O vértice C tem coordenadas $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice E ?

- (A) $2\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{13}{12} \pi \right)$ (B) $4 \operatorname{cis} \left(\frac{13}{12} \pi \right)$
 (C) $2\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{17}{12} \pi \right)$ (D) $4 \operatorname{cis} \left(\frac{17}{12} \pi \right)$



Exame – 2014, 1ª Fase

6. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere $z_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{12} \right)$

As imagens geométricas de z_2 e do seu conjugado, $\overline{z_2}$, são vértices consecutivos de um polígono regular.

Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice n de um certo número complexo w

Determine w na forma algébrica, sem utilizar a calculadora.

Comece por calcular n

Exame – 2013, Ép. especial

7. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \sqrt{2} + 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$ e $z_2 = 1 + i$

Sabe-se que $\frac{z_1}{z_2}$ é uma raiz quarta de um certo número complexo w

Determine w na forma algébrica, sem utilizar a calculadora.

Exame – 2013, 1ª Fase

8. Seja \mathbb{C} o conjunto dos números complexos.

Considere o número complexo $z = 8\sqrt{3} - 8i$

Determine, sem recorrer à calculadora, as raízes de índice 4 de z

Apresente as raízes na forma trigonométrica.

Exame – 2012, Ép. especial

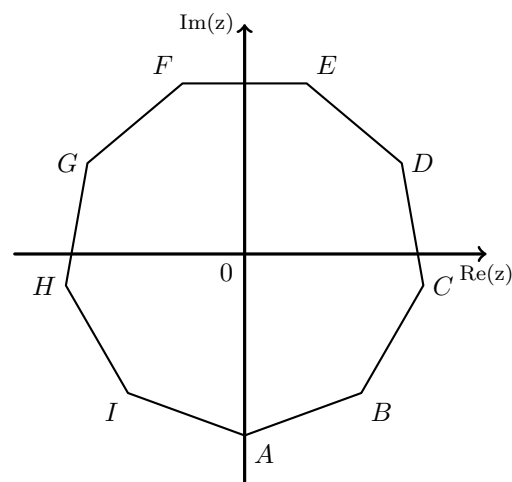
9. Na figura ao lado, está representado, no plano complexo, um polígono regular $[ABCDEFGHI]$

Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice n de um número complexo z

O vértice A tem coordenadas $(0, -3)$

Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice F ?

- (A) $3 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{18}$ (B) $3 \operatorname{cis} \frac{11\pi}{18}$
 (C) $3 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$ (D) $3 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{9}$



Exame – 2012, 2ª Fase



10. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere $z = 8 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$
Qual dos números complexos seguintes é uma das raízes de índice seis de z ?

(A) $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{25\pi}{36}$ (B) $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{-\pi}{36}$ (C) $2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{25\pi}{36}$ (D) $2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{-\pi}{36}$

Exame – 2011, Prova especial

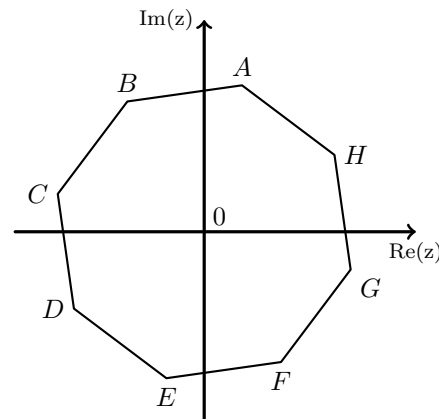
11. Considere, em \mathbb{C} , um número complexo w

No plano complexo, a imagem geométrica de w é o vértice A do octógono $[ABCDEFGH]$, representado na figura ao lado.

Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice 8 de um certo número complexo.

Qual dos números complexos seguintes tem como imagem geométrica o vértice C do octógono $[ABCDEFGH]$?

(A) $-w$ (B) $w + 1$
(C) $i \times w$ (D) $i^3 \times w$



Exame – 2011, Ép. especial

12. Seja \mathbb{C} o conjunto dos números complexos.
Considere $z_1 = 2 + \sqrt{3}i + i^{4n+2014}$, $n \in \mathbb{N}$
Sabe-se que z_1 é uma das raízes cúbicas de um certo complexo z
Determine z , sem recorrer à calculadora.
Apresente o resultado na forma algébrica.

Exame – 2011, Ép. especial

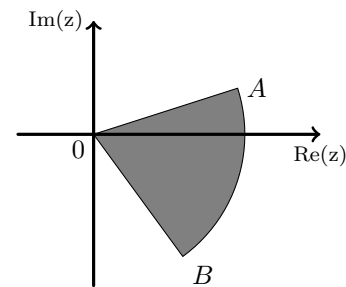
13. Na figura ao lado, está representado, no plano complexo, a sombreado, um setor circular.

Sabe-se que:

- o ponto A está situado no 1º quadrante;
- o ponto B está situado no 4º quadrante;
- $[AB]$ é um dos lados do polígono regular cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 5 do complexo $32 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{2} \right)$
- o arco AB está contido na circunferência de centro na origem e raio igual a \overline{OA}

Qual dos números seguintes é o valor da área do setor circular AOB ?

(A) $\frac{\pi}{5}$ (B) $\frac{4\pi}{5}$ (C) $\frac{2\pi}{5}$ (D) $\frac{8\pi}{5}$



Exame – 2011, 1ª Fase



14. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere o número complexo

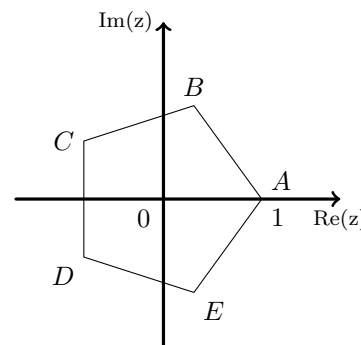
$$z = \frac{(-1 - i)^8}{\left(\text{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2} \times \text{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right)$$

14.1. Verifique, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, que $z = 16 \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

14.2. Determine a área do polígono cujos vértices, no plano complexo, são as imagens geométricas das raízes quartas de z

Exame – 2010, Ép. especial

15. A figura ao lado representa um pentágono $[ABCDE]$ no plano complexo. Os vértices do pentágono são as imagens geométricas das raízes de índice n de um número complexo w . O vértice A tem coordenadas $(1, 0)$. Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice D do pentágono?



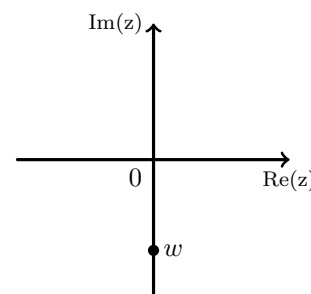
- (A) $5 \text{cis}\left(\frac{6\pi}{5}\right)$ (B) $\text{cis}\left(\frac{6\pi}{5}\right)$
 (C) $\text{cis}\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ (D) $\text{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Exame – 2010, 2ª fase

16. Seja w o número complexo cuja imagem geométrica está representada na figura ao lado.

A qual das rectas seguintes pertence a imagem geométrica de w^6 ?

- (A) Eixo real
 (B) Eixo imaginário
 (C) Bissetriz dos quadrantes ímpares
 (D) Bissetriz dos quadrantes pares



Exame – 2010, 2ª fase

17. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere $z = \sqrt{2} \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Determine, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, o número complexo $w = \frac{z^4 + 4i}{i}$. Apresente o resultado na forma trigonométrica.

Exame – 2010, 2ª Fase

18. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \text{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right)$ e $z_2 = 2 + i$

Determine o número complexo $w = \frac{3 - i \times (z_1)^7}{\overline{z_2}}$, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

(i designa a unidade imaginária, e $\overline{z_2}$ designa o conjugado de z_2)
 Apresente o resultado na forma trigonométrica.

Exame – 2010, 1ª Fase

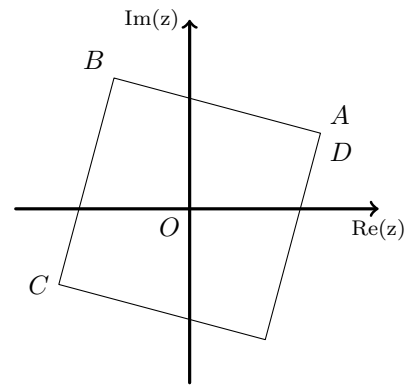


19. Considere, em \mathbb{C} , o número complexo $w = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{6} \right)$.

No plano complexo, a imagem geométrica de w é um dos vértices do quadrado $[ABCD]$, com centro na origem O , representado na figura ao lado.

Qual dos números complexos seguintes tem como imagem geométrica o vértice D do quadrado?

- (A) $2 \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{2} \right)$ (B) $2 \operatorname{cis} \left(\frac{7\pi}{4} \right)$
 (C) $2 \operatorname{cis} \left(\frac{11\pi}{6} \right)$ (D) $2 \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{3} \right)$



Exame – 2009, Ép. especial

20. No conjunto dos números complexos, seja $z = \frac{\left(\operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{7} \right) \right)^7 + (2 + i)^3}{4 \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{2} \right)}$.

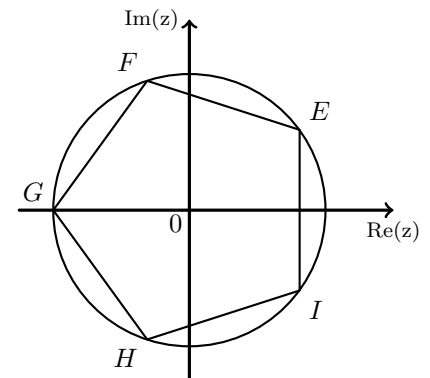
Determine z na forma algébrica, **sem recorrer à calculadora**.

Exame – 2009, 2ª Fase

21. Na figura ao lado está representado, no plano complexo, o polígono $[EFGHI]$, inscrito numa circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a 2. Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice 5 de um certo número complexo; um dos vértices pertence ao eixo real.

Qual é o vértice do polígono $[EFGHI]$ que é a imagem geométrica de $2 \operatorname{cis} \left(-\frac{3\pi}{5} \right)$?

- (A) E (B) F (C) H (D) I



Exame – 2008, Ép. especial

22. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - i$ (i designa a unidade imaginária). Considere z_1 uma das raízes quartas de um certo número complexo z . Determine uma outra raiz quarta de z , cuja imagem geométrica é um ponto pertencente ao 3.º quadrante. Apresente o resultado na forma trigonométrica.

Exame – 2008, 2ª Fase

23. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ e $z_2 = 8 \operatorname{cis} 0$ (i designa a unidade imaginária). Mostre, **sem recorrer à calculadora**, que $(-z_1)$ é uma raiz cúbica de z_2 .

Exame – 2008, 1ª Fase

24. Qual das opções seguintes apresenta duas raízes quadradas de um mesmo número complexo?

- (A) 1 e i (B) -1 e i (C) $1 - i$ e $1 + i$ (D) $1 - i$ e $-1 + i$

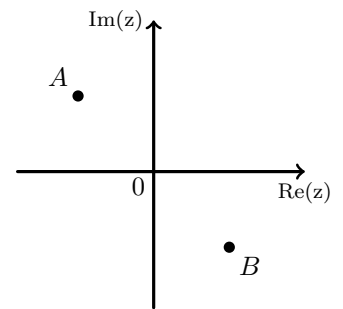
Exame – 2007, 1ª Fase



25. Os pontos A e B , representados na figura ao lado, são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quadradas de um certo número complexo z .

Qual dos números complexos seguintes pode ser z ?

- (A) 1 (B) i (C) -1 (D) $-i$



Exame – 2006, 1ª Fase

26. Seja \mathbb{C} o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

Sem recorrer à calculadora, determine $\frac{4 + 2i \left(\operatorname{cis} \frac{\pi}{6} \right)^6}{3 + i}$

apresentando o resultado final na forma trigonométrica.

Exame – 2006, 1ª Fase

27. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{6} \right)$

Sem utilizar a calculadora, determine o valor de $\frac{[i \times (z_1)^6 - 1]^2}{i}$

Apresentando o resultado na forma algébrica.

Exame – 2005, Ép. especial

28. Em qual das opções seguintes estão duas raízes cúbicas de um mesmo número complexo?

- (A) $\operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$ e $\operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}$ (B) $\operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$ e $\operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$ (C) $\operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$ e $\operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$ (D) $\operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$

Exame – 2005, 2ª fase

29. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} \right)$ e $z_2 = 2i$.

Sejam P_1 e P_2 as imagens geométricas, no plano complexo, de z_1 e z_2 , respetivamente.

Sabe-se que o segmento de reta $[P_1P_2]$ é um dos lados do polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice n de um certo número complexo w .

Qual é o valor de n ?

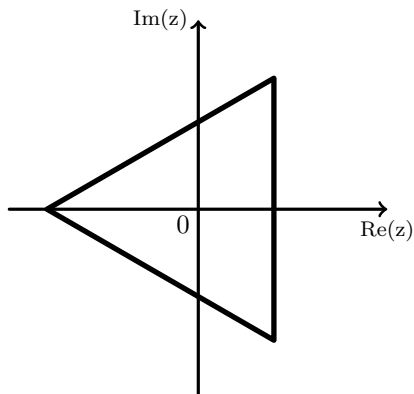
- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10

Exame – 2005, 1ª Fase

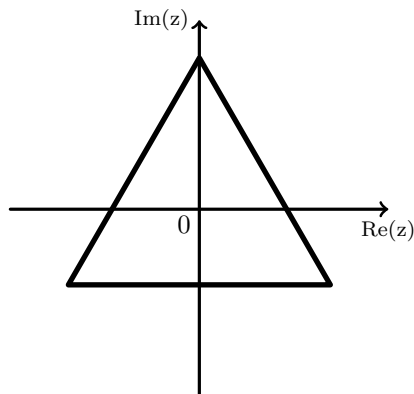


30. Um número complexo w tem a sua imagem geométrica na parte positiva do eixo imaginário. As imagens geométricas das raízes cúbicas de w são os vértices de um dos triângulos abaixo representados. Qual é esse triângulo?

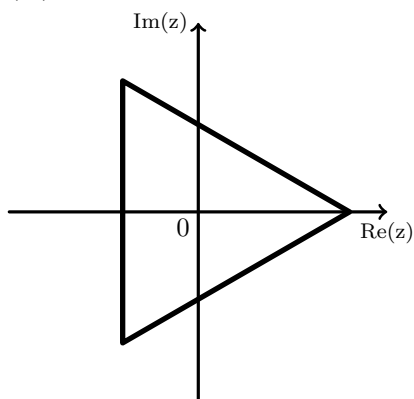
(A)



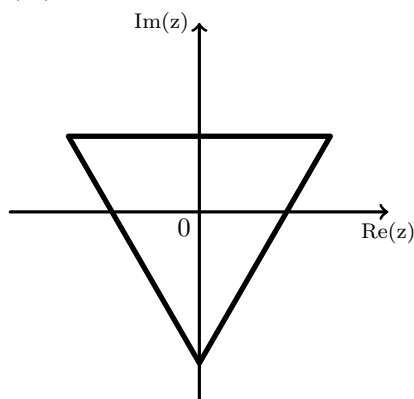
(B)



(C)



(D)



Exame – 2004, Ép. especial

31. De dois números complexos, z_1 e z_2 , sabe-se que um argumento de z_1 é $\frac{\pi}{4}$ e que o módulo de z_2 é $3\sqrt{2}$.

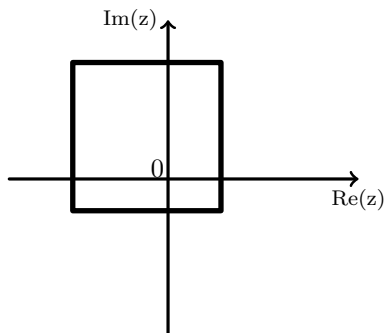
Sem recorrer à calculadora, determine $\frac{z_2 \times \bar{z}_2}{9} + \left(\frac{z_1}{|z_1|}\right)^8$

Exame – 2004, Ép. especial

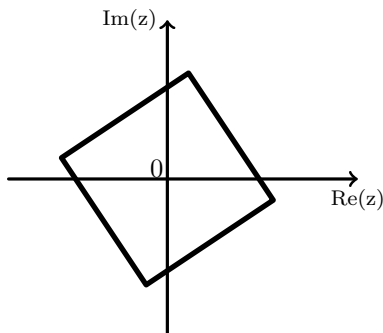


32. Os quatro vértices de um dos quadriláteros seguintes são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quartas de um certo número complexo w . Qual poderá ser esse quadrilátero?

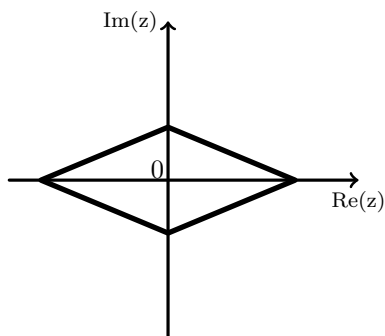
(A)



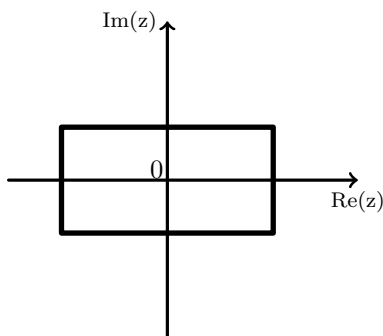
(B)



(C)



(D)



Exame – 2004, 2ª Fase

33. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere $w = 1 + 2i$. Sabendo que w é uma raiz quarta de um certo número complexo z , determine, **sem recorrer à calculadora**, as restantes raízes quartas de z .

Exame – 2003, Prova para militares

34. • \mathbb{C} é conjunto dos números complexos
• i designa a unidade imaginária

Sem recorrer à calculadora, calcule, na forma trigonométrica, as raízes quartas do número complexo $1 + \sqrt{3}i$, simplificando o mais possível as expressões obtidas.

Exame – 2003, 2ª Fase

35. \mathbb{C} é o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

35.1. **Sem recorrer à calculadora**, determine $\frac{(\sqrt{3} - 2i)^2 + \left(2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{9}\right)^3}{\operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}}$ apresentando o resultado na forma algébrica.

35.2. Seja α um número real.

Sejam z_1 e z_2 dois números complexos tais que:

- $z_1 = \operatorname{cis} \alpha$
- $z_2 = \operatorname{cis} (\alpha + \pi)$

Mostre que z_1 e z_2 não podem ser ambos raízes cúbicas de um mesmo número complexo.

Exame – 2003, 1ª fase - 2ª chamada



36. Seja w um número complexo diferente de zero, cuja imagem geométrica pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

A imagem geométrica de w^4 pertence a uma das retas a seguir indicadas.

A qual delas?

(A) Eixo real

(B) Eixo imaginário

(C) Bissetriz dos quadrantes pares

(D) Bissetriz dos quadrantes ímpares

Exame – 2003, 1ª fase - 1ª chamada

37. Seja w um número complexo cuja representação geométrica pertence à parte negativa do eixo real.

As representações geométricas das raízes quadradas de w pertencem a uma das retas abaixo indicadas.

A qual delas?

(A) Eixo real

(B) Eixo imaginário

(C) Bissetriz dos quadrantes pares

(D) Bissetriz dos quadrantes ímpares

Exame – 2002, Prova para militares

38. De dois números complexos z_1 e z_2 sabe-se que:

- um argumento de z_1 é $\frac{\pi}{3}$
- o módulo de z_2 é 4

z_1 e z_2 são duas das raízes quartas de um certo número complexo z .

Sabendo que, no plano complexo, a imagem geométrica de z_2 pertence ao segundo quadrante, determine z_2 na forma algébrica.

Exame – 2002, 1ª fase - 2ª chamada

39. Em \mathbb{C} , considere os números complexos: $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$

Verifique que z_1 e z_2 são raízes quartas de um mesmo número complexo.

Determine esse número, apresentando-o na forma algébrica.

Exame – 2002, 1ª fase - 1ª chamada

40. Qual dos seguintes números complexos tem a sua imagem geométrica no interior do círculo de centro na origem e de raio 1?

(A) $\left(\frac{1}{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{7}\right)^3$

(B) $\left(2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{7}\right)^3$

(C) $1 + i$

(D) $2i$

Exame – 2001, Prova para militares

41. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = \rho \operatorname{cis} \frac{\pi}{3} \quad \rho \in (\mathbb{R}^+)$$

Determine, na forma trigonométrica, as raízes quadradas de $\frac{z_1}{|z_1|}$

Exame – 2001, Prova para militares



42. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere

$$w = 2 + i \quad (i \text{ designa a unidade imaginária}).$$

Determine $(w - 2)^{11}(1 + 3i)^2$ na forma algébrica.

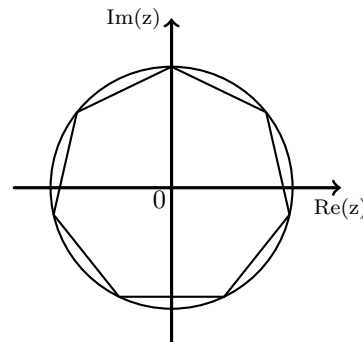
Exame – 2001, 2ª fase

43. Na figura ao lado está representado, no plano complexo, um heptágono regular inscrito numa circunferência de centro na origem e raio 1. Um dos vértices do heptágono pertence ao eixo imaginário.

Os vértices do heptágono são, para um certo número natural n , as imagens geométricas das raízes de índice n de um número complexo z .

Qual é o valor de z ?

- (A) $1 + i$ (B) $1 - i$ (C) i (D) $-i$



Exame – 2001, 1ª fase - 2ª chamada

44. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, seja $z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$

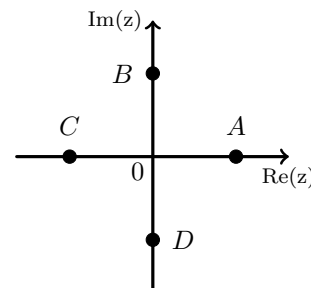
Sem recorrer à calculadora, verifique $\frac{z_1^3 + 2}{i}$ é um imaginário puro.

Exame – 2001, 1ª fase - 1ª chamada

45. Seja $z = yi$, com $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, um número complexo (i designa a unidade imaginária).

Qual dos quatro pontos representados na figura ao lado (A , B , C ou D) pode ser a imagem geométrica de z^4 ?

- (A) O ponto A (B) O ponto B
 (C) O ponto C (D) O ponto D



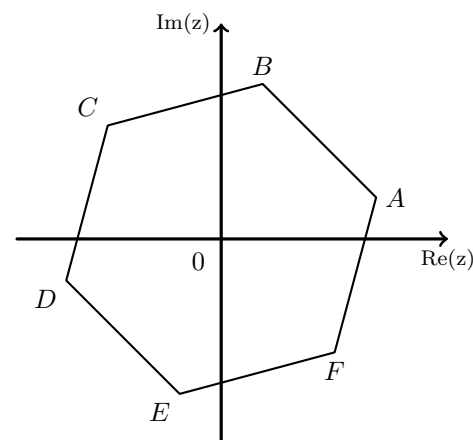
Exame – 2001, Prova modelo

46. Na figura ao lado está representado um hexágono cujos vértices são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes de índice 6 de um certo número complexo.

O vértice C é a imagem geométrica do número complexo $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$

Qual dos seguintes números complexos tem por imagem geométrica o vértice D ?

- (A) $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6}$ (B) $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{13\pi}{12}$
 (C) $\sqrt[6]{2} \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6}$ (D) $\sqrt[6]{2} \operatorname{cis} \frac{13\pi}{12}$



Exame – 2000, 1ª fase - 1ª chamada

