MATEMÁTICA A - 12º Ano
Nºs Complexos - Potências e raízes
Propostas de resolução

Exercícios de exames e testes intermédios

1. Simplificando a expressão de z na f.a., como $i^{23} = i^{4\times 5+3} = \left(i^4\right)^5 \times i^3 = 1^5 \times i^3 = i^3 = -i$, temos:

$$z = \frac{2i}{1-i} + 2i^{23} = \frac{2i}{1-i} - 2i = \frac{2i}{1-i} - \frac{2i(1-i)}{(1-i)} = \frac{2i}{1-i} - \frac{2i-2i^2}{1-i} = \frac{2i-2i+2i^2}{1-i} = \frac{-2}{1-i}$$

Considerando $1 - i = \rho \operatorname{cis} \theta$, com o objetivo de escrever z na f.t., vem que:

- $\rho = |1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{-1}{1} = -1$; como $\operatorname{sen} \theta < 0$ e $\cos \theta > 0$, θ é um ângulo do 4º quadrante, logo $\theta = -\frac{\pi}{4}$

Como $-2 = 2 \operatorname{cis} \pi$, temos que:

$$z = \frac{2i}{1-i} + 2i^{23} = \frac{-2}{1-i} = \frac{2 \operatorname{cis} \pi}{\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{cis}\left(\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{2\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4}$$

Pelo que o conjugado de z, é:

$$\overline{z} = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$$

E assim, usando a fórmula de Moivre, temos que:

$$w^3 = \overline{z} \Leftrightarrow w^3 = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{4}\right) \Leftrightarrow w = \sqrt[3]{\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow w = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{5\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right), k \in \{0,1,2\}$$

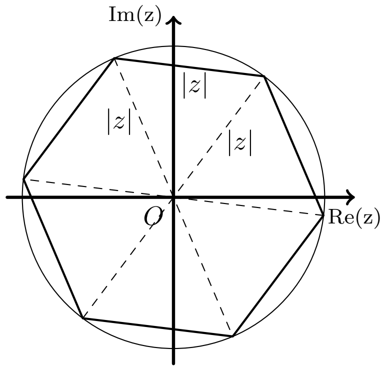
Ou seja, temos 3 números complexos w tais que $w^3 = \overline{z}$:

- $k = 0 \rightarrow w_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{5\pi}{4} + 0}{3}\right) = \sqrt[6]{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$
- $k = 1 \rightarrow w_2 = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{5\pi}{4} + 2\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{12} + \frac{8\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$
- $k = 2 \rightarrow w_3 = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{5\pi}{4} + 4\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{12} + \frac{16\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{2} \operatorname{cis} \frac{11\pi}{12}$

Exame – 2016, Ép. especial

2. O polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 6 de um qualquer número complexo, é um hexágono regular.

Como qualquer hexágono regular pode ser decomposto em 6 triângulos equiláteros, temos que, o comprimento do lado do hexágono é igual ao raio da circunferência em que o hexágono está inscrito.



Assim, podemos determinar o raio da circunferência como a distância à origem do ponto que é a representação geométrica do número complexo z, ou seja $|z|$

Desta forma vem que o perímetro do hexágono regular é:

$$P_H = 6 \times |z| = 6 \times \sqrt{3^2 + 4^2} = 6 \times \sqrt{25} = 6 \times 5 = 30$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2016, 2ª Fase

3. Escrevendo $1+i$ na f.t. temos $1+i=\rho\operatorname{cis}\theta$, onde:

- $\rho=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{1}{1}=1$; como $\operatorname{sen}\theta>0$ e $\cos\theta>0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

E assim $1+i=\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{4}$, pelo que, recorrendo à fórmula de Moivre, temos

$$z_1=(1+i)^6=\left(\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right)^6=\left(\sqrt{2}\right)^6\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\times 6\right)=\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^3\operatorname{cis}\frac{6\pi}{4}=2^3\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}=8\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}$$

Como $8i=8\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{2}$, calculando o quociente de complexos na f.t., temos:

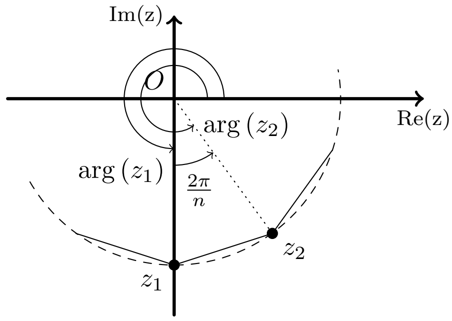
$$z_2=\frac{8i}{\operatorname{cis}\left(-\frac{6\pi}{5}\right)}=\frac{8\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}}{\operatorname{cis}\left(-\frac{6\pi}{5}\right)}=\frac{8}{1}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{6\pi}{5}\right)\right)=8\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{6\pi}{5}\right)=$$

$$=8\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{10}+\frac{12\pi}{10}\right)=8\operatorname{cis}\frac{17\pi}{10}$$

Como um polígono regular de n lados, pode ser dividido em n triângulos isósceles, em que a soma dos ângulos adjacentes, junto da origem é 2π, então cada um destes ângulo tem amplitude $\dfrac{2\pi}{n}$

Como as imagens geométricas de z_1 e z_2 são vértices de um destes triângulos então os respetivos argumentos diferem de $\dfrac{2\pi}{n}$, ou seja

$$\arg(z_2)-\arg(z_1)=\frac{2\pi}{n}$$



Assim, temos que

$$\arg(z_2)-\arg(z_1)=\frac{2\pi}{n}\Leftrightarrow\frac{17\pi}{10}-\frac{3\pi}{2}=\frac{2\pi}{n}\Leftrightarrow\frac{17\pi}{10}-\frac{15\pi}{10}=\frac{2\pi}{n}\Leftrightarrow\frac{2\pi}{10}=\frac{2\pi}{n}\Leftrightarrow n=\frac{2\pi\times 10}{2\pi}\Leftrightarrow n=10$$

Exame – 2015, Ép. especial

4. Escrevendo $-1+i$ na f.t. temos $-1+i = \rho \operatorname{cis}\theta$, onde:

- $\rho = |-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{1}{-1} = -1$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 2º quadrante, logo $\theta = -\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{4\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$

E assim $-1+i = \sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{3\pi}{4}$

Simplificando a expressão de z_1 temos:

$$z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right) = 1\operatorname{cis}\left(\frac{9\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{8\pi}{12}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

Como se $w = \rho\operatorname{cis}\theta$ então $\overline{w} = \rho\operatorname{cis}(-\theta)$, então

$$\overline{z_1} = \operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

E assim, usando a fórmula de Moivre, temos que:

$$z^4 = \overline{z_1} \Leftrightarrow z^4 = \operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{\operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{1}\operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right), k \in \{0,1,2,3\}$$

Ou seja, temos 4 soluções da equação:

- $k=0 \rightarrow w_1 = \sqrt[4]{1}\operatorname{cis}\left(\dfrac{-\frac{2\pi}{3}+0}{4}\right) = \operatorname{cis}\left(-\dfrac{2\pi}{12}\right) = \operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$
- $k=1 \rightarrow w_2 = \sqrt[4]{1}\operatorname{cis}\left(\dfrac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}\right) = \operatorname{cis}\left(-\dfrac{2\pi}{12} + \dfrac{2\pi}{4}\right) = \operatorname{cis}\left(-\dfrac{2\pi}{12} + \dfrac{6\pi}{12}\right) = \operatorname{cis}\dfrac{4\pi}{12} = \operatorname{cis}\dfrac{\pi}{3}$
- $k=2 \rightarrow w_3 = \sqrt[4]{1}\operatorname{cis}\left(\dfrac{-\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}\right) = \operatorname{cis}\left(-\dfrac{2\pi}{12} + \dfrac{4\pi}{4}\right) = \operatorname{cis}\left(-\dfrac{2\pi}{12} + \dfrac{12\pi}{12}\right) = \operatorname{cis}\dfrac{10\pi}{12} = \operatorname{cis}\dfrac{5\pi}{6}$
- $k=3 \rightarrow w_4 = \sqrt[4]{1}\operatorname{cis}\left(\dfrac{-\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}\right) = \operatorname{cis}\left(-\dfrac{2\pi}{12} + \dfrac{6\pi}{4}\right) = \operatorname{cis}\left(-\dfrac{2\pi}{12} + \dfrac{18\pi}{12}\right) = \operatorname{cis}\dfrac{16\pi}{12} = \operatorname{cis}\dfrac{4\pi}{3}$

Exame – 2015, 2ª Fase

5. Como os vértices do hexágono são as imagens geométricas das 6 raízes de índice 6 de um número complexo z, então estão sobre uma circunferência centrado na origem.

   Desta forma, sendo $w_5 = \rho \operatorname{cis} \theta$ o número complexo cuja imagem geométrica é o vértice E, temos que:

$$\rho = |-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i| = \sqrt{\left(-2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2^2 \times 2 + 2^2 \times 2} = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$$

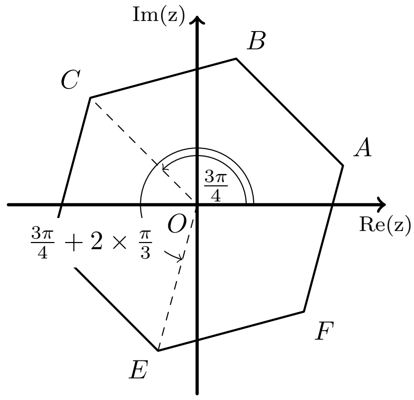
   Como o vértice C pertence ao segundo quadrante é a imagem geométrica de um número complexo w_3, tal que $\operatorname{Re}(w_3) = -\operatorname{Im}(w_3)$, temos que $\arg(w_3) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

   Assim, como os argumentos dos números complexos que são raízes índice 6 de um mesmo número complexo diferem de $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, temos que:

$$\theta = \arg(w_5) = \arg(w_3) + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{9\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} = \frac{17\pi}{12}$$

   Logo $w_5 = 4 \operatorname{cis}\left(\frac{17}{12}\pi\right)$

   Resposta: **Opção D**



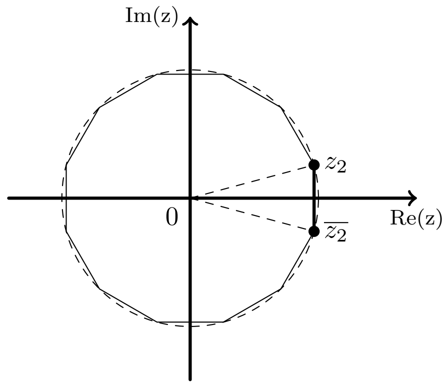
Exame – 2014, 1ª Fase

6. Sabemos que $|\overline{z_2}| = |z_2|$ e que $\arg(\overline{z_2}) = -\arg(z_2)$, logo $\overline{z_2} = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

   Assim, temos que o polígono regular pode ser decomposto em n triângulos isósceles, congruentes com o triângulo OAA', em que o ponto A é a imagem geométrica de z_2 e A' é a imagem geométrica de $\overline{z_2}$. Como a amplitude do ângulo AOA' é $2 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$, sabemos que $\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{2\pi \times 6}{\pi} = n \Leftrightarrow 12 = n$

   Assim temos que z_2 (e também $\overline{z_2}$) são raízes de índice 12 de w, ou seja $w = (z_2)^{12}$, logo usando a fórmula de Moivre e escrevendo o resultado da potência na f.a., temos:

   $w = (z_2)^{12} = \left(\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^{12} = (\sqrt{2})^{12} \operatorname{cis}\left(12 \times \frac{\pi}{12}\right) = 64 \operatorname{cis} \pi = -64$



Exame – 2013, Ép. especial

7. Começamos por simplificar a expressão de z_1 fazendo a soma na f.a.:

$$z_1 = \sqrt{2} + 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} + 2\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2}i = \sqrt{2}i$$

   Escrevendo os números complexos na f.t. temos

   $z_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$ e

   $z_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$, porque $|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ e para $\theta = \arg(z_2)$ temos $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{1} = 1$ e $\theta \in 1^{\text{o}}$ Q

   Assim $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}}{\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$

   Como $\frac{z_1}{z_2}$ é uma raiz quarta de w, aplicando a fórmula de Moivre e escrevendo w na f.a., temos que:

   $w = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4 = \left(\operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right)^4 = 1^4 \operatorname{cis}\left(4 \times \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{cis} \pi = -1$

Exame – 2013, 1ª Fase

8. Escrevendo z na f.t. temos $z = \rho \operatorname{cis} \theta$, onde:

   - $\rho = |z| = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 + (-8)^2} = \sqrt{64 \times 3 + 64} = \sqrt{64 \times 4} = 8 \times 2 = 16$
   - $\operatorname{tg} \theta = \dfrac{-8}{8\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
     como $\operatorname{sen} \theta < 0$ e $\cos \theta > 0$, θ é um ângulo do 4º quadrante, logo $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$

   Assim $z = 16 \operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$, e por isso, usando a fórmula de Moivre, temos:

   $\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16} \operatorname{cis}\left(\dfrac{-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi}{4}\right)$, $k \in \{0,1,2,3\}$, ou seja, temos 4 raízes de índice 4:

   - $k = 0 \rightarrow z_1 = 2 \operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{24}\right)$
   - $k = 1 \rightarrow z_2 = 2 \operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{2\pi}{4}\right) = 2 \operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{12\pi}{24}\right) = 2 \operatorname{cis} \dfrac{11\pi}{24}$
   - $k = 2 \rightarrow z_3 = 2 \operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{4\pi}{4}\right) = 2 \operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{24\pi}{24}\right) = 2 \operatorname{cis} \dfrac{23\pi}{24}$
   - $k = 3 \rightarrow z_4 = 2 \operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{6\pi}{4}\right) = 2 \operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{36\pi}{24}\right) = 2 \operatorname{cis} \dfrac{35\pi}{24}$

Exame – 2012, Ép. especial

9. Designado por z e w os números complexos que têm por imagens geométricas os pontos F e A, respetivamente. Assim temos que $|z| = |w| = 3$, porque os pontos A e F estão a igual distância da origem.

   Sabemos que o ângulo FOA tem amplitude $\dfrac{4}{9} \times 2\pi = \dfrac{8\pi}{9}$, porque os vértices do polígono dividem o ângulo giro em 9 partes iguais.

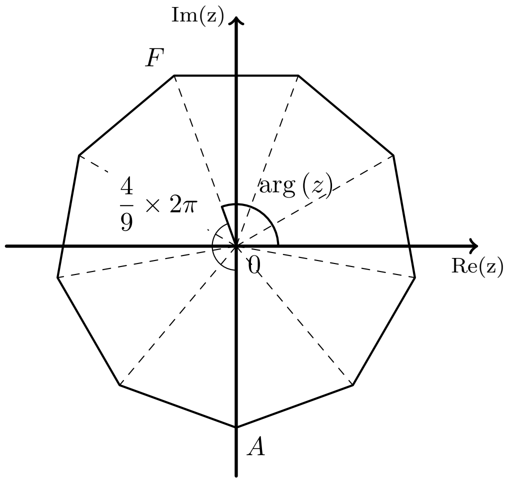
   Logo $\arg(w) = \arg(z) + \dfrac{10\pi}{9}$

   Como o ponto A está dobre a parte negativa do eixo imaginário temos que $\arg(w) = \dfrac{3\pi}{2}$, pelo que, substituindo na igualdade anterior, vem:

   $\dfrac{3\pi}{2} = \arg(z) + \dfrac{8\pi}{9} \Leftrightarrow \dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{8\pi}{9} = \arg(z) \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \dfrac{27\pi}{18} - \dfrac{16\pi}{18} = \arg(z) \Leftrightarrow \dfrac{11\pi}{18} = \arg(z)$

   Resposta: **Opção B**



Exame – 2012, 2ª Fase

10. Usando a fórmula de Moivre para a radiciação temos que:

$\sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{8}\,\text{cis}\left(\dfrac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{6}\right)$, $k \in \{0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}5\}$, temos que

- $|w| = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
- Para cada $k \in \{0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}5\}$, $\arg(w) = \dfrac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{6} = \dfrac{\pi}{36} + \dfrac{2k\pi}{6} = \dfrac{\pi}{36} + \dfrac{12k\pi}{36} = \dfrac{\pi + 12k\pi}{36}$

Assim, se $k = 2$, temos que $\arg(w) = \dfrac{\pi + 24\pi}{36} = \dfrac{25\pi}{36}$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2011, Prova especial

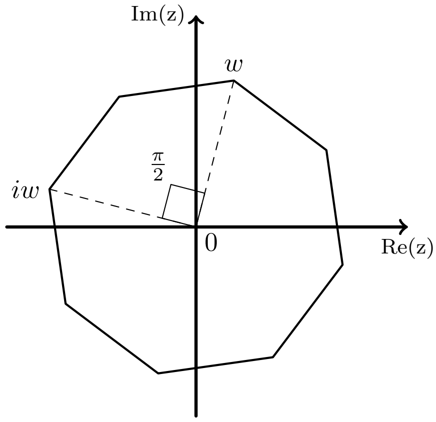
11. Sendo a imagem geométrica de w o vértice A do octógono, designemos por z a imagem geométrica do vértice C do octógono.

Como os dois números complexos são raízes de índice 8 de um mesmo número complexo, temos que $|w| = |z|$.

Como o octógono está centrado na origem, e tem oito lados, o ângulo AOB tem de amplitude $\dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$ radianos. Como o ângulo BOC tem a mesma amplitude, temos que o ângulo AOC tem de amplitude $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ radianos.

Ou seja $\arg(z) = \arg(w) + \dfrac{\pi}{2}$, e como $|w| = |z|$ podemos afirmar que $z = w \times i$

Resposta: **Opção C**



Exame – 2011, Ép. especial

12. Como $i^{4n+2014} = i^{4n+4\times 53+2} = i^{4(n+53)+2} = i^2 = -1$, temos que $z_1 = 2 + \sqrt{3}i + (-1) = 1 + \sqrt{3}i$

Escrevendo z_1 na f.t. temos $z_1 = \rho\,\text{cis}\,\theta$, onde:

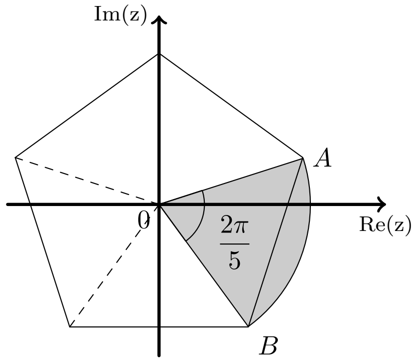
- $\rho = |z_1| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\text{tg}\,\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ como $\text{sen}\,\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

Assim $z_1 = 2\,\text{cis}\,\dfrac{\pi}{3}$, e como $\sqrt[3]{z} = z_1$, recorrendo à fórmula de Moivre para a potência, temos que:

$z = (z_1)^3 = \left(2\,\text{cis}\,\dfrac{\pi}{3}\right)^3 = 2^3\,\text{cis}\left(3 \times \dfrac{\pi}{3}\right) = 8\,\text{cis}\,\pi = -8$

Exame – 2011, Ép. especial

13. Como a área do setor circular é dada por $\frac{\alpha r^2}{2}$, onde α é a amplitude do ângulo ao centro do setor circular e r o raio da circunferência, e designado por w o número complexos que tem por imagem geométrica o ponto A, temos que:



- $r = |w| = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$ (usando a fórmula de Moivre);
- α é a amplitude do ângulo AOB e como A e B são vértices adjacentes de um pentágono regular centrado na origem (por serem raízes de índice 5 de um mesmo número complexo) temos que $\alpha = \frac{2\pi}{5}$

Logo o valor da área do setor circular AOB é

$$\frac{\alpha r^2}{2} = \frac{\frac{2\pi}{5} \times 2^2}{2} = \frac{2\pi}{5} \times 2 = \frac{4\pi}{5}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2011, 1ª Fase

14.

14.1. Começamos por escrever $(-1-i)$ na f.t.:
Seja $-1-i = \rho \operatorname{cis} \theta$:

- $\rho = |-1-i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
- $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$, porque $\operatorname{tg} \theta = \frac{-1}{-1} = 1$, logo $\theta = \frac{\pi}{4} \vee \theta = \pi + \frac{\pi}{4}$, mas como $\operatorname{sen} \theta < 0$ e $\cos \theta < 0$, logo θ é um ângulo do 3º quadrante.

Assim, aplicando a fórmula de Moivre para a potência, temos que
$(-1-i)^8 = \left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4}\right)^8 = (\sqrt{2})^8 \operatorname{cis} \left(8 \times \frac{5\pi}{4}\right) = 16 \operatorname{cis} \frac{40\pi}{4} = 16 \operatorname{cis}(10\pi) = 16 \operatorname{cis} 0$

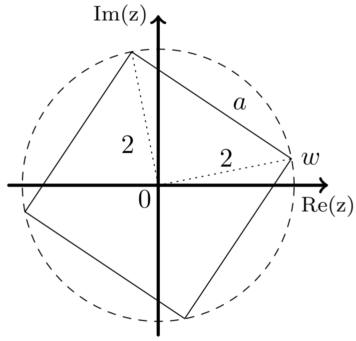
Da mesma forma temos que $\left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2 = \operatorname{cis}\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Assim temos que $z = \frac{(-1-i)^8}{\left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2} \times \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{16 \operatorname{cis} 0}{\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)} \times \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 16 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \times \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right) =$

$= 16 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{2}\right) = 16 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{10\pi}{4}\right) = 16 \operatorname{cis}\left(\frac{9\pi}{4}\right) = 16 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = 16 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$

14.2. Sabemos que as quatro raízes quartas de z são números complexos cujas imagens geométricas são os vértices de um quadrado, centrado na origem.

Seja w uma das raízes quartas de z, como $z = 16\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$, recorrendo à fórmula de Moivre, temos que $|w| = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$, ou seja a distância dos vértices do quadrado ao centro é 2.

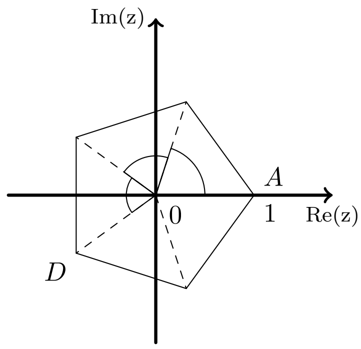


Assim, podemos calcular o lado a do quadrado, recorrendo ao teorema de Pitágoras:
$a^2 = 2^2+2^2 \;\Leftrightarrow\; a^2 = 4+4 \;\Leftrightarrow\; a^2 = 8 \;\Leftrightarrow\; a = \sqrt{8}$ (consideramos apenas a raiz positiva por se tratar de uma medida).

Temos assim que a área A do polígono cujos vértices, no plano complexo, são as imagens geométricas das raízes quartas de z é dada por $A = (\sqrt{8})^2 = 8$

Exame – 2010, Ép. especial

15. Os vértices do pentágono são a representação geométrica de 5 números complexos, que são raízes de índice 5 do mesmo número complexo. Sejam z e w os números complexos que têm por imagens geométricas os pontos A e D, respetivamente.



Como o ponto A tem de coordenadas (1,0), temos que $z = \text{cis}\,0$.

Como $|z| = |w|$ e $\arg(w) = 3 \times \frac{2\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$, porque os vértices do pentágono dividem o ângulo giro em 5 partes iguais, temos que $w = \text{cis}\,\frac{6\pi}{5}$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2010, 2ª fase

16. Como a representação geométrica de w está sobre a parte negativa do eixo imaginário, sabemos que $w = \rho\,\text{cis}\,\frac{3\pi}{2}$.

Assim, recorrendo à fórmula de Moivre, temos que $w^6 = \rho^6\,\text{cis}\left(6 \times \frac{3\pi}{2}\right) = \rho^6\,\text{cis}\,\frac{18\pi}{2} = \rho^6\,\text{cis}\,(9\pi)$

Descontando as voltas completas, temos que $w^6 = \rho^6\,\text{cis}\,(9\pi) = \rho^6\,\text{cis}\,(9\pi - 8\pi) = \rho^6\,\text{cis}\,\pi$, logo podemos concluir que w^6 é um número real negativo.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2010, 2ª fase

17. Começamos por determinar z^4, recorrendo à fórmula de Moivre:
$z^4 = \left(\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^4 = (\sqrt{2})^4\,\text{cis}\left(4 \times \frac{\pi}{4}\right) = 4\,\text{cis}\,\pi = -4 + 0i = -4$

Assim temos que:
$w = \frac{z^4+4i}{i} = \frac{-4+4i}{i} = \frac{(-4+4i)\times i}{i \times i} = \frac{-4i+4i^2}{i^2} = \frac{-4-4i}{-1} = 4+4i$

Escrevendo w na f.t. temos $w = \rho\,\text{cis}\,\theta$, onde:

- $\rho = |w| = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{4^2 \times 2} = 4\sqrt{2}$
- $\text{tg}\,\theta = \frac{1}{1} = 1$; como $\text{sen}\,\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{4}$

Logo $w = 4\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$

Exame – 2010, 2ª Fase

18. Começamos por determinar $(z_1)^7$, recorrendo à fórmula de Moivre, e escrever o resultado na f.a.:

$$(z_1)^7 = \left(\text{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^7 = \text{cis}\left(7 \times \frac{\pi}{7}\right) = \text{cis}\,\pi = -1$$

Como $\overline{z_2} = 2 - i$, temos que:

$$w = \frac{3 - i \times (z_1)^7}{\overline{z_2}} = \frac{3 - i \times (-1)}{2 - i} = \frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6 + 3i + 2i + i^2}{2^2 - i^2} = \frac{6 - 1 + 5i}{4+1} = \frac{5+5i}{5} = 1 + i$$

Escrevendo w na f.t. temos $w = \rho\,\text{cis}\,\theta$, onde:

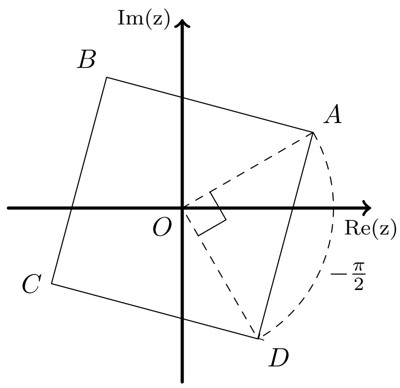
- $\rho = |w| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- $\text{tg}\,\theta = \frac{1}{1} = 1$; como $\text{sen}\,\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{4}$

Logo $w = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$

Exame – 2010, 1ª Fase

19. Como w é um dos vértices do quadrado, o número complexo que tem como imagem geométrica o ponto D, é um número complexo z, tal que:

- $|z| = |w| = 2$, porque o quadrado está centrado na origem, logo, todos os vértices estão a igual distância do centro
- $\arg(z) = \arg(w) - \frac{\pi}{2}$, porque a imagem geométrica do número complexo w é o ponto A, visto que $0 \leq \arg(w) \leq \frac{\pi}{2}$, ou seja é um ângulo do primeiro quadrante, e o ângulo AOD é reto



Assim, temos que:

$$z = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{6}\right) = 2\,\text{cis}\left(-\frac{2\pi}{6}\right) = 2\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

Acrescentando 2π ao argumento calculado temos:

$$z = 2\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = 2\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{6\pi}{3}\right) = 2\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2009, Ép. especial

20. Começamos por usar a fórmula de Moivre para calcular $\left(\text{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^7 = 1^7\,\text{cis}\left(7 \times \frac{\pi}{7}\right) = \text{cis}\,\pi = -1$

Como a adição deve ser feita na f.a. vamos optar por calcular $(2+i)^3$ também na f.a.:

$$(2+i)^3 = (2+i)(2+i)^2 = (2+i)(4+4i-1) = (2+i)(3+4i) = 6 + 8i + 3i + 4i^2 = 6 - 4 + 11i = 2 + 11i$$

Escrevendo $4\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ na f.a. temos: $4\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -4i$

Assim, simplificando a expressão de z, vem:

$$z = \frac{\left(\text{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^7 + (2+i)^3}{4\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{-1 + 2 + 11i}{-4i} = \frac{(1+11i) \times i}{-4i \times i} = \frac{i + 11i^2}{-4i^2} = \frac{-11 + i}{-4(-1)} = \frac{-11+i}{4} = -\frac{11}{4} + \frac{1}{4}i$$

Exame – 2009, 2ª Fase

21. Seja $w = 2\,\text{cis}\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$. Como $-\pi < \arg(w) < -\frac{\pi}{2}$, a imagem geométrica de w pertence ao 3º quadrante, logo o único vértice do polígono que pode ser a imagem geométrica do número complexo w, é o vértice H

Resposta: **Opção C**

Exame – 2008, Ép. especial

22. Escrevendo z_1 na f.t. temos $z_1 = \rho\,\text{cis}\,\theta$, onde:

- $\rho = |z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\text{tg}\,\theta = \frac{-1}{1} = -1$; como $\text{sen}\,\theta < 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 4º quadrante, logo $\theta = -\frac{\pi}{4}$

Logo $z_1 = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Como existem 4 raízes quartas de z, cujas imagens geométricas são os vértices de um quadrado centrado na origem, temos que as outras 3 raízes quartas de z são:

- $z_2 = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$
- $z_3 = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{3\pi}{4}$
- $z_3 = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{4}$

Pelo que a raiz quarta de z cuja imagem geométrica é um ponto do 3º quadrante é $z_3 = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{4}$

Exame – 2008, 2ª Fase

23. Temos que $-z_1 = -(1 - \sqrt{3}i) = -1 + \sqrt{3}i$ e escrevendo $-z_1$ na f.t. temos $-z_1 = \rho\,\text{cis}\,\theta$, onde:

- $\rho = |-z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$
- $\text{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$; como $\text{sen}\,\theta > 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 2º quadrante, logo $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Logo $-z_1 = 2\,\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}$

Vamos agora recorrer à fórmula de Moivre para determinar $(-z_1)^3$:
$(-z_1)^3 = \left(2\,\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}\right)^3 = 2^3\,\text{cis}\left(3 \times \frac{2\pi}{3}\right) = 8\,\text{cis}\,(2\pi) = 8\,\text{cis}\,0$

Como $(-z_1)^3 = z_2$, podemos concluir que $(-z_1)$ é uma raiz cúbica de z_2

Exame – 2008, 1ª Fase

24. Sabemos que as representações geométricas de duas raízes quadradas de um mesmo número complexo, são os extremos de um diâmetro de uma circunferência centrada na origem, ou seja, os argumentos dessas raízes diferem de π radianos.

Nas opções A, B e C a diferença dos argumentos é de $\frac{\pi}{2}$ radianos. Na opção D as representações geométricas dos dois números complexos estão sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares, a igual distância do centro.

Resposta: **Opção D**

Exame – 2007, 1ª Fase

25. Sendo A a imagem geométrica de um número complexo $w = \rho \operatorname{cis} \theta$, temos que w é uma raiz quadrada de z se $z = w^2 = \rho^2 \operatorname{cis}(2\theta)$.

    Se $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, então $\pi < 2\theta < 2\pi$ e das quatro hipóteses de resposta, apenas o número complexo $-i = \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$ satisfaz esta condição.

    Resposta: **Opção D**

Exame – 2006, 1ª Fase

26. Começamos por usar a fórmula de Moivre para calcular $\left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^6 = 1^6 \operatorname{cis}\left(6 \times \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{cis} \pi = -1$

    Substituindo na expressão dada temos:
    $$\frac{4+2i\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)^6}{3+i} = \frac{4+2i(-1)}{3+i} = \frac{4-2i}{3+i} = \frac{(4-2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{12-4i-6i+2i^2}{9-i^2} = \frac{12-2-10i}{9-(-1)} =$$
    $$= \frac{10-10i}{10} = 1-i$$

    Escrevendo $1-i$ na f.t. temos $1-i = \rho \operatorname{cis} \theta$, onde:

    - $\rho = |1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
    - $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{-1} = -1$; como $\operatorname{sen} \theta < 0$ e $\cos \theta > 0$, θ é um ângulo do 4º quadrante, logo $\theta = -\frac{\pi}{4}$

    Logo $1-i = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Exame – 2006, 1ª Fase

27. Começamos por usar a fórmula de Moivre para calcular $\left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^6 = 1^6 \operatorname{cis}\left(6 \times \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{cis} \pi = -1$

    Substituindo na expressão dada temos:
    $$\frac{\left[i \times (z_1)^6 - 1\right]^2}{i} = \frac{(i \times (-1) - 1)^2}{i} = \frac{(-1-i)^2}{i} = \frac{(-1)^2 + 2(-1)(-i) + (-i)^2}{i} = \frac{1+2i+(-1)}{i} = \frac{2i}{i} = 2$$

Exame – 2005, Ép. especial

28. A imagens geométricas de números complexos que sejam raízes cúbicas de um mesmo número complexo estão sobre os vértices de um triângulo equilátero centrado na origem.
    Logo os argumentos de quaisquer dois, dos três números complexos, diferem de $\frac{2\pi}{3}$.

    Na opção D, a diferença dos argumentos é $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$; na opção C, a mesma diferença é $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ e na opção B, a diferença dos argumentos é $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$. A opção A, é a única que verifica a condição estabelecida para a diferença dos argumentos: $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

    Resposta: **Opção A**

Exame – 2005, 2ª fase

29. Começamos por escrever z_2 na forma trigonométrica: $z_2 = 2i = 2\,\text{cis}\,\frac{\pi}{2}$.

Como as raízes de índice n de um número complexo são os vértices de um polígono regular, se $[P_1P_2]$ é um lado desse polígono, então os argumentos de z_1 e z_2 diferem de $\frac{2\pi}{n}$.

Assim temos que $\arg(z_2) - \arg(z_1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

Logo $\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{8\pi}{\pi} = n \Leftrightarrow 8 = n$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2005, 1ª Fase

30. Escrevendo w na f.t. temos $w = \rho\,\text{cis}\,\frac{\pi}{2}$, onde $\rho = |w|$.
Recorrendo à fórmula de Moivre para a radiciação, podemos calcular as 3 raízes de índice 3 de w: $\sqrt[3]{w} = \sqrt[3]{\rho}\,\text{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right), k \in \{0,1,2\}$, ou seja, as 3 raízes são:

- $k = 0 \rightarrow z_1 = \sqrt[3]{\rho}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{6}$
- $k = 1 \rightarrow z_2 = \sqrt[3]{\rho}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{\rho}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{\rho}\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{6}$
- $k = 2 \rightarrow z_2 = \sqrt[3]{\rho}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{\rho}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{8\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{\rho}\,\text{cis}\,\frac{9\pi}{6} = \sqrt[3]{\rho}\,\text{cis}\,\frac{3\pi}{2}$

Desta forma temos que $z_2 == \sqrt[3]{\rho}\,\text{cis}\,\frac{3\pi}{2}$ é uma raiz cúbica de w e tem a sua representação geométrica sobre a parte negativa do eixo imaginário, pelo que a opção D é a única que é compatível com esta conclusão.

Resposta: **Opção D**

Exame – 2004, Ép. especial

31. Sabemos que $z_1 = \rho\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$, logo $|z_1| = \rho = \rho\,\text{cis}\,0$,
e que
$z_2 = 3\sqrt{2}\,\text{cis}\,\theta$, logo $\overline{z_2} = 3\sqrt{2}\,\text{cis}\,(-\theta)$

Podemos assim calcular:
$z_2 \times \overline{z_2} = (3\sqrt{2}\,\text{cis}\,\theta) \times (\overline{z_2} = 3\sqrt{2}\,\text{cis}\,(-\theta)) = (3\sqrt{2})^2\,\text{cis}\,(\theta - \theta) = (9 \times 2)\,\text{cis}\,0 = 18\,\text{cis}\,0 = 18$
e
$\left(\frac{z_1}{|z_1|}\right)^8 = \left(\frac{\rho\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}}{\rho\,\text{cis}\,0}\right)^8 = \left(\frac{\rho}{\rho}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right)\right)^8 = \left(1\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}\right)^8 = 1^8\,\text{cis}\left(8 \times \frac{\pi}{4}\right) = 1\,\text{cis}\,\frac{8\pi}{4} = \text{cis}\,(2\pi) = 1$

Substituindo os valores calculados, na expressão dada, vem:
$\frac{z_2 \times \overline{z_2}}{9} + \left(\frac{z_1}{|z_1|}\right)^8 = \frac{18}{9} + 1 = 2 + 1 = 3$

Exame – 2004, Ép. especial

32. Sabemos que as representações geométricas das raízes de índice n de um número complexo, são os vértices de um polígono regular de n lados, inscrito numa circunferência de centro na origem.
Assim, as imagens geométricas das raízes quartas de w são os vértices de um quadrado centrado na origem.

Resposta: **Opção B**

Exame – 2004, 2ª Fase

33. Se w é uma raiz quarta de z, então a representação geométrica de w e das restantes raízes quartas z, estão sobre os vértices de um quadrado centrado na origem.

Como a operação *multiplicar por* i corresponde a fazer uma rotação de amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos e centro na origem, se multiplicarmos sucessivamente w por i obtemos as restantes raízes quartas de z. Assim temos que as restantes 3 raízes quartas de z são:

- $w_1 = w \times i = (1+2i)i = i + 2i^2 = -2 + i$
- $w_2 = w \times i^2 = (1+2i)i^2 = (1+2i)(-1) = -1 - 2i$
- $w_3 = w \times i^3 = (1+2i)i^3 = (1+2i)(-i) = -i - 2i^2 = 2 - i$

Exame – 2003, Prova para militares

34. Escrevendo $1+\sqrt{3}i$ na f.t. temos $1+\sqrt{3}i = \rho \operatorname{cis}\theta$, onde:

- $\rho = |1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

Logo $1+\sqrt{3}i = 2\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{3}$

Vamos agora recorrer à fórmula de Moivre para determinar as raízes quartas de $1+\sqrt{3}i$:

$\sqrt[4]{1+\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)$, $k \in \{0,1,2,3\}$, ou seja, temos 4 raízes de índice 4:

- $k=0 \rightarrow z_1 = \sqrt[4]{2}\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{12}$
- $k=1 \rightarrow z_2 = \sqrt[4]{2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{2\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{6\pi}{12}\right) = \sqrt[4]{2}\operatorname{cis}\dfrac{7\pi}{12}$
- $k=2 \rightarrow z_3 = \sqrt[4]{2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{4\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{12\pi}{12}\right) = \sqrt[4]{2}\operatorname{cis}\dfrac{13\pi}{12}$
- $k=3 \rightarrow z_4 = \sqrt[4]{2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{6\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{18\pi}{12}\right) = \sqrt[4]{2}\operatorname{cis}\dfrac{19\pi}{12}$

Exame – 2003, 2ª Fase

35.

35.1. Começamos por calcular

- $(\sqrt{3}-2i)^2 = (\sqrt{3}-2i)(\sqrt{3}-2i) = \sqrt{3}^2 - \sqrt{3}\times 2i - \sqrt{3}\times 2i + (2i)^2 = 3 - 4\sqrt{3}i - 4 = -1 - 4\sqrt{3}i$
- $\left(2\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{9}\right)^3 = 2^3\operatorname{cis}\left(3\times\dfrac{\pi}{9}\right) = 8\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{3} = 8\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right) = 8\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4 + 4\sqrt{3}i$
- $\operatorname{cis}\dfrac{3\pi}{2} = -i$

Substituindo na expressão dada, temos:

$$\frac{\left(\sqrt{3}-2i\right)^2 + \left(2\operatorname{cis}\frac{\pi}{9}\right)^3}{\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}} = \frac{-1-4\sqrt{3}i+4+4\sqrt{3}i}{-i} = \frac{3\times i}{-i\times i} = \frac{3i}{-i^2} = \frac{3i}{-(-1)} = 3i$$

35.2. Se z_1 e z_2 forem raízes cúbicas de um mesmo número complexo, as suas representações serão os vértices de um triângulo equilátero, inscrito numa circunferência centrada na origem.

Ou seja $|\arg(z_2) - \arg(z_1)| = \dfrac{2\pi}{3}$

Como $|\arg(z_2) - \arg(z_1)| = \alpha + \pi - \alpha = \pi \neq \dfrac{2\pi}{3}$, logo z_1 e z_2 não são raízes cúbicas de um mesmo número complexo.

Exame – 2003, 1ª fase - 2ª chamada

36. Se w um número complexo diferente de zero, cuja imagem geométrica pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, temos que $w = \rho \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \ \vee \ w = \rho \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$

    Logo, pela fórmula de Moivre para a potência, temos que:
    $w^4 = \rho^4 \operatorname{cis} \left(4 \times \frac{\pi}{4}\right) \ \vee \ w^4 = \rho^4 \operatorname{cis} \left(4 \times \frac{3\pi}{4}\right) \ \Leftrightarrow \ w^4 = \rho^4 \operatorname{cis} \pi \ \vee \ w^4 = \rho^4 \operatorname{cis} (3\pi)$

    Ou seja, w^4 é um número real negativo, logo a sua representação geométrica pertence à parte negativa do eixo real.

    Resposta: **Opção A**

Exame – 2003, 1ª fase - 1ª chamada

37. Se w é um número complexo cuja representação geométrica pertence à parte negativa do eixo real, temos que $w = \rho \operatorname{cis} \pi$ $(\rho = |w|)$.

    $\sqrt{w} = \sqrt{\rho} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi + 2k\pi}{2}\right), k \in \{0,1\}$, ou seja, as 2 raízes quadrada de w são:

    - $k = 0 \ \rightarrow \ z_1 = \sqrt{\rho} \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$
    - $k = 1 \ \rightarrow \ z_2 = \sqrt{\rho} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$

    Logo as duas raízes quadradas de w são números imaginários puros (um positivo e outro negativo), e as respetivas representações geométricas pertence ao eixo imaginário..

    Resposta: **Opção B**

Exame – 2002, Prova para militares

38. Como z_1 e z_2 são duas das raízes quartas de um mesmo número complexo z, temos que $(z_1)^4 = (z_2)^4$.
    Também sabemos que as representações geométricas de z_1 e z_2 são dois vértices de um quadrado inscrito numa circunferência centrada na origem. Como $\arg(z_1) = \frac{\pi}{3}$, e a imagem geométrica de z_2 pertence ao segundo quadrante, então $\arg(z_2) = \arg(z_1) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

    Sabendo que $|z_2| = 4$, podemos escrever z_2 na f.t. e depois na $f.a.$:
    $z_2 = 4 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6} = 4 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{4\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{2}i = -2\sqrt{3} + 2i$

Exame – 2002, 1ª fase - 2ª chamada

39. Começando por escrever z_1 na f.t., temos $z_1 = \rho \operatorname{cis} \theta$, onde:

    - $\rho = |z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
    - $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{1} = 1$; como $\operatorname{sen} \theta > 0$ e $\cos \theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{4}$

    Logo $z_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$

    z_1 e z_2 são raízes quartas de um mesmo número complexo se $(z_1)^4 = (z_2)^4$. Recorrendo à fórmula de Moivre para a potência, temos:

    $(z_1)^4 = \left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right)^4 = (\sqrt{2})^4 \operatorname{cis} \left(4 \times \frac{\pi}{4}\right) = 4 \operatorname{cis} \pi = -4$

    $(z_2)^4 = \left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}\right)^4 = (\sqrt{2})^4 \operatorname{cis} \left(4 \times \frac{3\pi}{4}\right) = 4 \operatorname{cis} (3\pi) = -4$

    Logo, como $(z_1)^4 = (z_2)^4 = z$, z_1 e z_2 são raízes quartas de $z = -4$.

Exame – 2002, 1ª fase - 1ª chamada

40. Um número complexo z tem a sua imagem geométrica no interior do círculo de centro na origem e de raio 1, se $|z| < 1$

Podemos verificar que:

- $|2i| = 2$, logo $|2i| > 1$
- $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, logo $|1+i| > 1$
- $\left|\left(2\,\text{cis}\,\frac{\pi}{7}\right)^3\right| = 2^3 = 8$, logo $\left|\left(2\,\text{cis}\,\frac{\pi}{7}\right)^3\right| > 1$
- $\left|\left(\frac{1}{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{7}\right)^3\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, logo $\left|\left(\frac{1}{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{7}\right)^3\right| < 1$

Assim concluímos que $\left(\frac{1}{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{7}\right)^3$ tem a sua imagem geométrica no interior do círculo de centro na origem e de raio 1.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, Prova para militares

41. Como $|z_1| = \rho$ temos:

$$\frac{z_1}{|z_1|} = \frac{\rho\,\text{cis}\,\frac{\pi}{3}}{\rho} = \frac{\rho}{\rho}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3} - 0\right) = 1\,\text{cis}\,\frac{\pi}{3} = \text{cis}\,\frac{\pi}{3}$$

Logo, recorrendo à fórmula de Moivre para a radiciação, temos que as duas raízes quadradas são dadas por:

$$\sqrt{\frac{z_1}{|z_1|}} = \sqrt{1}\,\text{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}\right), k \in \{0,1\}, \text{ ou seja:}$$

- $k = 0 \rightarrow z_1 = \text{cis}\,\frac{\pi}{6}$
- $k = 1 \rightarrow z_2 = \text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{2}\right) = \text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{6\pi}{6}\right) = \text{cis}\,\frac{7\pi}{6}$

Exame – 2001, Prova para militares

42. Como $w - 2 = (2+i) - 2 = i$, temos que $(w-2)^{11} = i^{11} = i^{4\times 2+3} = i^3 = -i$

Simplificando $(1+3i)^2$, temos que:
$(1+3i)^2 = (1+3i)(1+3i) = 1^2 + 3i + 3i + (3i)^2 = 1 + 6i + 9i^2 = 1 - 9 + 6i = -8 + 6i$

Substituindo na expressão dada, vem:
$(w-2)^{11}(1+3i)^2 = (-i)(-8+6i) = 8i - 6i^2 = 8i - 6(-1) = 6 + 8i$

Exame – 2001, 2ª fase

43. Como a figura é um heptágono, tem 7 vértices, que correspondem a 7 raízes de índice n, ou seja $n = 7$.
Como um dos vértices do heptágono pertence à parte positiva do eixo imaginário e está sobre uma circunferência centrada na origem e de lado 1, é a representação geométrica de um número complexo w que pode ser escrito na f.t como $w = \text{cis}\,\frac{\pi}{2}$.
Como w é uma raiz indice 7 de z, temos que:

$$z = w^7 = \left(\text{cis}\,\frac{\pi}{2}\right)^7 = 1^7\,\text{cis}\left(7 \times \frac{\pi}{2}\right) = \text{cis}\,\frac{7\pi}{2} = \text{cis}\left(\frac{7\pi}{2} - 2\pi\right) = \text{cis}\left(\frac{7\pi}{2} - \frac{4\pi}{2}\right) = \text{cis}\,\frac{3\pi}{2} = -i$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2001, 1ª fase - 2ª chamada

44. Recorrendo à fórmula de Moivre para a potência, e escrevendo o resultado na f.a., temos:
$z_1^3 = \left(2\,\text{cis}\,\frac{\pi}{3}\right)^3 = 2^3\,\text{cis}\left(3\times\frac{\pi}{3}\right) = 8\,\text{cis}\,\pi = -8$

Substituindo na expressão dada e simplificando, vem:
$\frac{z_1^3+2}{i} = \frac{-8+2}{i} = \frac{-6\times i}{i\times i} = \frac{-6i}{(-1)} = 6i$

Como $\text{Re}\,(6i) = 0 \wedge \text{Im}\,(6i) \neq 0$, temos que $\frac{z_1^3+2}{i}$ é um número imaginário puro.

Exame – 2001, 1ª fase - 1ª chamada

45. Como $z = yi$, temos que:
$z^4 = (yi)^4 = y^4 \times i^4 = y^4 \times i^0 = y^4 \times 1 = y^4$, ou seja z é um número real positivo, pelo que a sua representação geométrica pertence à parte positiva do eixo imaginário, ou seja o ponto A.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, Prova modelo

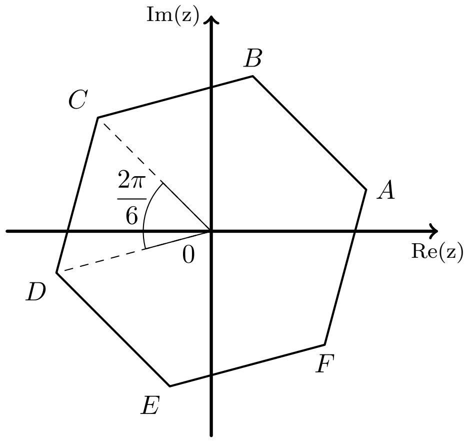
46. Como os vértices do hexágono são as imagens geométricas das raízes de índice 6 de um certo número complexo, os vértices estão sobre uma circunferência centrada na origem, logo cada par de vértices adjacentes definem com o semieixo real positivo, ângulos que diferem de $\frac{2\pi}{6}$.

Sejam w_1 e w_2 os números complexos cujas representações geométricas são os vértice C e D, respetivamente.

Temos que $\arg(w_1) = \frac{3\pi}{4}$ e que $\arg(w_2) = \arg(w_1) + \frac{2\pi}{6}$,
logo $\arg(w_2) = \arg(w_1) + \frac{2\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{6} = +\frac{9\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} = \frac{13\pi}{12}$

Como os vértices C e D estão a igual distância da origem, temos que $|(w_1)| = |(w_2)|$, pelo que $w_2 = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{13\pi}{12}$

Resposta: **Opção B**



Exame – 2000, 1ª fase - 1ª chamada