Números Complexos (12.º ano)

Conjuntos de pontos e condições

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução

1. Considerando o número complexo z escrito na forma algébrica, $z = x + yi$, temos:

   $z \times \overline{z} = 4 \Leftrightarrow (x+yi) \times (x-yi) = 4 \Leftrightarrow x^2 - xyi + xyi - y^2i^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - y^2(-1) = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2^2$

   Ou seja, a condição $z \times \overline{z} = 4$ define uma circunferência de centro na origem e raio 2 .

   Resposta: **Opção A**

   Exame – 2022, 1.ª Fase

2. Observando a condição, temos que:

   $$\mathrm{Re}\,(z) \times \mathrm{Im}\,(z) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\,(z) = \frac{1}{\mathrm{Re}\,(z)}$$

   Ou seja, o conjunto de afixos que verificam a condição, são os afixos de números complexos, cujas partes real e imaginária são inversamente proporcionais, ou seja, o conjunto de pontos é uma hipérbole.

   Podemos ainda verificar que estes afixos pertencem ao 1.º e 3.º quadrantes, porque os números complexos correspondentes têm as partes real e imaginária, ambas positivas, ou ambas negativas.

   Assim, de entre as opções apresentadas, a única onde pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição, é a opção D.

   Resposta: **Opção D**

   Exame – 2020, 1.ª Fase

3. Simplificando a expressão de w, como $i^7 = i^{4+3} = i^4 \times i^3 = 1 \times (-i) = -i$, e $\overline{z_2} = 1 + 2i$, temos que:

$$w = \frac{3(2-3i) - i(1+2i)}{1+(-i)} = \frac{6-9i-i-2i^2}{1-i} = \frac{6-10i-2(-1)}{1-i} = \frac{6-10i+2}{1-i} = \frac{8-10i}{1-i} =$$

$$= \frac{(8-10i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{8+8i-10i-10i^2}{1^2-i^2} = \frac{8-2i-10(-1)}{1-(-1)} = \frac{8-2i+10}{1+1} = \frac{18-2i}{2} = 9-i$$

Calculando a distância entre os afixos de z_1 e w, temos:

$$|w - z_1| = |9 - i - (2-3i)| = |9 - i - (2-3i)| = |9 - i - 2 + 3i| = |7 + 2i| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$$

Como a distância entre os afixos de z_1 e w é igual a $\sqrt{53}$, o afixo do número complexo w pertence à circunferência de centro no afixo (imagem geométrica) de z_1 e raio igual a $\sqrt{53}$

Exame – 2019, 2.ª Fase

4. Simplificando a expressão de w, como $i^6 = i^{4+2} = i^4 \times i^2 = 1 \times (-1) = -1$, e $\overline{z_1} = 3 - 4i$ temos que:

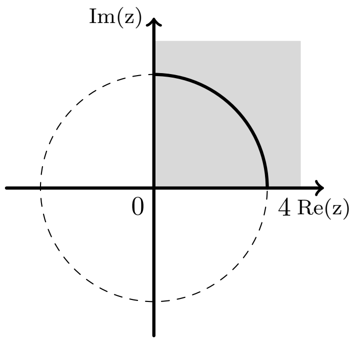
$$w = \frac{3+4i+(-1)+2(3-4i)}{3+4i-(4+6i)} = \frac{3+4i-1+6-8i}{3+4i-4-6i} = \frac{8-4i}{-1-2i} = \frac{(8-4i)(-1+2i)}{(-1-2i)(-1+2i)} =$$

$$= \frac{-8+16i+4i-8i^2}{(-1)^2-(2i)^2} = \frac{-8+20i-8(-1)}{1-4i^2} = \frac{-8+20i+8}{1-4(-1)} = \frac{20i}{1+4} = \frac{20i}{5} = 4i$$

Assim, temos que:

$$|w| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$$

E a condição $|z| = |w| \Leftrightarrow |z| = 4$ define uma circunferência de centro na origem e raio 4, pelo que a condição $|z| = |w| \wedge \operatorname{Im} z \geq 0 \wedge \operatorname{Re} z \geq 0$ corresponde a um quarto da circunferência anterior.



Desta forma o comprimento da linha definido pela condição é um quarto do perímetro da circunferência:

$$\frac{P_\circ}{4} = \frac{2\pi r}{4} = \frac{2\pi \times 4}{4} = 2\pi$$

Exame – 2019, 1.ª Fase

5. Como $-16 = 16e^{i(\pi)}$, resolvendo a equação $z^4 + 16 = 0$, temos que:

$$z^4 + 16 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -16 \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{-16} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{16}e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)}, k \in \{0,1,2,3\}$$

Ou seja, temos 4 números complexos z tais que $z^4 + 16 = 0$:

- $k = 0 \rightarrow z_1 = \sqrt[4]{16}e^{i\left(\frac{\pi+0}{4}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$
- $k = 1 \rightarrow z_2 = \sqrt[4]{16}e^{i\left(\frac{\pi+2\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$
- $k = 2 \rightarrow z_3 = \sqrt[4]{16}e^{i\left(\frac{\pi+4\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$
- $k = 3 \rightarrow z_4 = \sqrt[4]{16}e^{i\left(\frac{\pi+6\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(\frac{7\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

Como $\text{Re}(z) < 0 \Leftrightarrow \left(-\pi < \arg(z) < -\frac{\pi}{2} \vee \frac{\pi}{2} < \arg(z) < \pi\right)$, os elementos do conjunto A são os números z_2 e z_3, ou seja:

- $z_2 = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$
- $z_3 = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

Exame – 2018, Ép. especial

6. Escrevendo $1 - i$ na f.t. temos $i - i = \rho e^{i\alpha}$, onde:

- $\rho = |i - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
- $\text{tg}\,\alpha = \frac{-1}{1} = -1$; como $\text{sen}\,\alpha < 0$ e $\cos\alpha > 0$, α é um ângulo do 4º quadrante, logo $\alpha = -\frac{\pi}{4}$

Logo $1 - i = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$, e por isso:

$$z_1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}e^{i\theta}} = \frac{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\theta}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}-\theta\right)} = e^{i\left(-\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$$

Desta forma, temos que:

- Como $|\overline{w}| = |w|$ e $\arg(\overline{w}) = -\arg(w)$, então: $\overline{z_1} = e^{i\left(-\left(-\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}$
- $z_1^4 = e^{i\left(4\times\left(-\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right)} = e^{i(-\pi-4\theta)}$

E assim, vem que:

$$w = \overline{z_1} \times z_1^4 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)} \times e^{i(-\pi-4\theta)} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\theta+(-\pi-4\theta)\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\theta-\pi-4\theta\right)} = e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}-3\theta\right)}$$

Pelo que, como $\theta \in \left]\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right[$, então:

$$\frac{\pi}{12} < \theta < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{12} > -3\theta > -\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{12} > -\frac{3\pi}{4} - 3\theta > -\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} > \arg(w) > -\frac{6\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{4\pi}{4} > \arg(w) > -\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{2} < \arg(w) < -\pi$$

Ou seja, a imagem geométrica de w é um ponto do segundo quadrante, e assim temos que:

- $\text{Re}(w) < 0$
- $\text{Im}(w) > 0$
- $|w| = 1$

Ou seja, o número complexo w pertence ao conjunto A

Exame – 2017, Ép. especial

7. Como $z_1 \times \overline{z_2} = 4 - 3i \Leftrightarrow \overline{z_2} = \dfrac{4-3i}{z_1}$, calculando o valor de $\overline{z_2}$, temos:

$$\overline{z_2} = \frac{4-3i}{2+i} = \frac{(4-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{8-4i-6i+3i^2}{2^2-i^2} = \frac{8-10i-3}{4-(-1)} = \frac{5-10i}{5} = 1-2i$$

E assim, temos que: $\overline{z_2} = 1-2i \Leftrightarrow z_2 = 1+2i$

Escrevendo $\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ na forma algébrica, temos:

$$\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right) = \frac{2}{2} + \frac{2}{2}\,i = 1+i$$

Assim, o número complexo anterior verifica a condição $|z - z_1| = |z - z_2|$, porque:

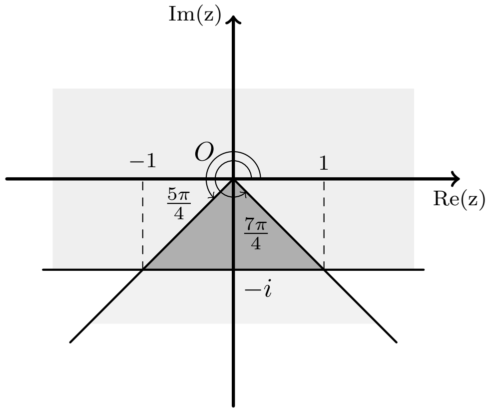
- $|(1+i)-(2+i)| = |1+i-2-i| = |1-2+0i| = |-1| = 1$
- $|(1+i)-(1+2i)| = |1+i-1-2i| = |1-1-i| = |-i| = 1$

Como o número complexo $\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ verifica a condição $|z-z_1| = |z-z_2|$, então a representação geométrica deste número complexo está a igual distância das representações geométricas dos complexos z_1 e z_2

Exame – 2017, 2.ª Fase

8. A região é defina pela conjunção de duas condições, cujas representações gráficas no plano complexo são:

- a região dos 3º e 4º quadrantes limitada pelas bissetrizes destes quadrantes $\left(\dfrac{5\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \dfrac{7\pi}{4}\right)$
- o semiplano acima da reta horizontal defina por $\mathrm{Im}\,(z) \geq -1$



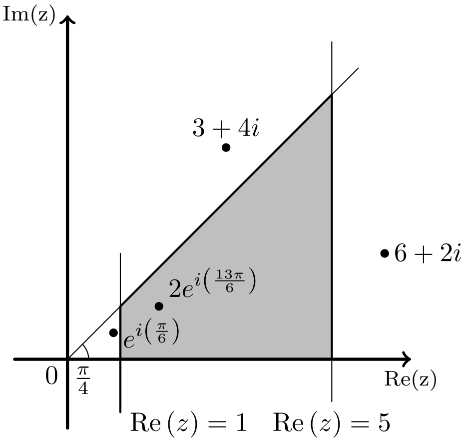
Assim, a região definida pela conjunção é um triângulo, cujos vértices são a origem e os pontos de coordenadas $(-1,-1)$ e $(1,-1)$, ou seja, a medida da base é 2 e da altura é 1, pelo que, a área (A_Δ) é:

$$A_\Delta = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2017, 1.ª Fase

9. Analisando cada um dos números complexos das hipóteses apresentadas, podemos verificar que:



- $3+4i$ não pertence à região definida pela condição porque

$$\arg(3+4i) > \frac{\pi}{4}$$

- $6+2i$ não pertence à região definida pela condição porque

$$\operatorname{Re}(6+2i) > 5$$

- Como $\operatorname{Re}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, então $e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$ não pertence à região definida pela condição porque

$$\operatorname{Re}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right) < 1$$

Assim, podemos concluir que o número complexo $2e^{i\left(\frac{13\pi}{6}\right)}$, pertence à região definida pela condição, porque:

- $\operatorname{Re}\left(2e^{i\left(\frac{13\pi}{6}\right)}\right) = 2\cos\frac{13\pi}{6} = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, logo $1 < \operatorname{Re}\left(2e^{i\left(\frac{13\pi}{6}\right)}\right) < 5$
- $\arg\left(2e^{i\left(\frac{13\pi}{6}\right)}\right) = \arg\left(2e^{i\left(\frac{13\pi}{6}-2\pi\right)}\right) = \arg\left(2e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right) = \frac{\pi}{6}$, logo $0 < \arg\left(2e^{i\left(\frac{13\pi}{6}\right)}\right) < \frac{\pi}{4}$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2016, Ép. especial

10. Analisando cada uma das afirmações temos

- **(A)** $|z_3 - z_1| = |z_4 - z_2|$ é uma afirmação **verdadeira** porque $|z_3 - z_1|$ é a distância entre os vértices correspondentes ao complexos z_3 e z_1, (ou seja a medida da diagonal do quadrado), tal como $|z_4 - z_2|$ representa a medida da outra diagonal do quadrado.
  Como as medidas das diagonais do quadrado são iguais, a afirmação é verdadeira.
- $z_1 + z_4 = 2\operatorname{Re}(z_1)$ é uma afirmação **verdadeira** porque como o centro do quadrado está centrado na origem e os lados são paralelos aos eixos, os vértices do quadrado estão sobre as bissetrizes dos quadrantes, ou seja, $z_1 = a + ai$ e $z_4 = a - ai$, com $a \in \mathbb{R}^+$
  Assim, vem que $z_1 + z_4 = a + ai + a - ai = 2a = 2\operatorname{Re}(z_1)$
- **(C)** $\frac{z_4}{i} = z_1$ é uma afirmação **falsa** porque $\frac{z_4}{i} = z_1 \Leftrightarrow z_4 = z_1 \times i$ e $z_1 = a + ai$ e $z_4 = a - ai$, com $a \in \mathbb{R}^+$
  Como $z_1 \times i = (a+ai)\times i = ai + ai^2 = ai + a(-1) = ai - a = -a + ai = z_2$
  Ou seja, multiplicar por i corresponde geometricamente a fazer uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos, no sentido positivo. Assim, fazendo a uma rotação deste tipo da imagem geométrica de z_1, obtemos a imagem geométrica de z_2 e não a imagem geométrica de z_4
- **(D)** $-\overline{z_1} = z_2$ é uma afirmação **verdadeira** porque $z_1 = a + ai$ e $z_2 = -a + ai$, com $a \in \mathbb{R}^+$
  Logo $-\overline{z_1} = -\left(\overline{a+ai}\right) = -(a - ai) = -a + ai = z_2$

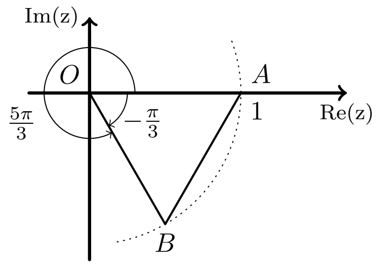
Resposta: **Opção C**

Exame – 2015, Ép. especial

11. Como o triângulo $[OAB]$ é equilátero, temos que

$$|z| = \overline{OB} = \overline{OA} = 1$$

Por outro lado, como a amplitude de cada um dos ângulos internos do triângulo equilátero é $\frac{\pi}{3}$, e o ponto B está no 4º quadrante, temos que $\arg(z) = -\frac{\pi}{3}$, ou então



$$\arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

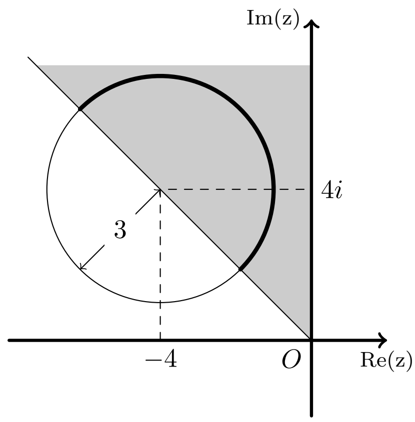
E assim, vem que

$$z = 1e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2015, 2.ª Fase

12. A linha é defina pela conjunção de duas condições, cujas representações gráficas no plano complexo são:



- a circunferência de centro no afixo do número complexo $z = -4 + 4i$ e raio 3 ($|z + 4 - 4i| = 3 \Leftrightarrow |z - (4 + 4i)| = 3$)
- a região do 3º quadrante limitada pelo semieixo imaginário positivo e a bissetriz dos quadrantes pares $\left(\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{2}\right)$

Assim, a linha definida pela conjunção é uma semicircunferência de raio 3, cujo comprimento C é o semiperímetro da circunferência de raio 3:

$$C = \frac{P_\circ}{2} = \frac{2\pi r}{2} = \pi r = 3\pi$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2015, 1.ª Fase

13. Os pontos da zona sombreada pertencem ao exterior da circunferência de centro na imagem geométrica do número complexo $2i$ e raio $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, ou seja, a distância à imagem geométrica de $2i$ é superior a $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, ou seja, os números complexos z verificam a condição $|z-2i| > \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Como os pontos da região sombreada representam números complexos cujo argumento está comprendido entre $\arg\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+2i\right)$ e $\arg\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}+2i\right)$ vamos determinar estes argumentos.
Seja $\theta_1 = \arg\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+2i\right)$, assim temos que $\operatorname{tg}(\theta_1) = \frac{2}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

Como θ_1 é um ângulo do 1º quadrante, temos que $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$
Analogamente temos que $\theta_2 = \arg\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}+2i\right) = \frac{2\pi}{3}$
E assim, os números complexos z verificam a condição condição anterior, e cumulativamente, a condição $\frac{\pi}{3} < \arg(z) < \frac{2\pi}{3}$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2014, 2.ª Fase

14. Escrevendo $(1+i)$ na f.t. temos $(1+i) = \rho e^{i\theta}$, onde:
   - $\rho = |(1+i)| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
   - $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{1} = 1$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{4}$

Logo $(1+i) = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

Calculando a potência temos que:

Como $w = (1+i)^{2013} = \left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{2013} = \sqrt{2}^{2013} e^{i\left(2013\times\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}^{2013} e^{i\left(\frac{2013\pi}{4}\right)}$

Assim:
$\arg(w) = \frac{2013\pi}{4} = \frac{(4\times 503+1)\pi}{4} = \frac{4\times 503\pi+\pi}{4} = \frac{4\times 503\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 503\pi + \frac{\pi}{4}$
Descontando as voltas completas temos $\arg(w) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Ou seja, a representação geométrica de w é um ponto do 3º quadrante que pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, pelo que $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2013, Ép. especial

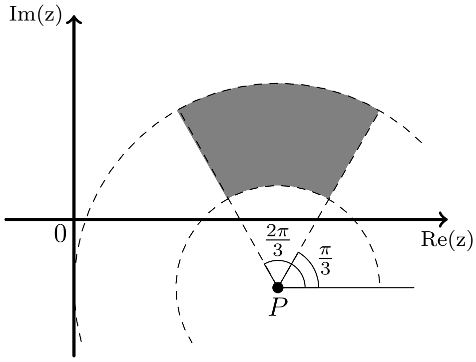
15. Podemos reescrever a condição dada na forma:

$$\frac{3}{2} \leq |z-3+i| \leq 3 \ \wedge \ \frac{\pi}{3} \leq \arg(z-3+i) \leq \frac{2\pi}{3} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{3}{2} \leq |\mathbf{z\text{-}(3\text{-}i)}| \leq 3 \ \wedge \ \frac{\pi}{3} \leq \arg(\mathbf{z\text{-}(3\text{-}i)}) \leq \frac{2\pi}{3}$$

Assim, sendo o ponto P a representação geométrica do número complexo $3-i$, a condição define o conjunto de pontos do plano complexo que:

- estão a uma distância do ponto P compreendida entre $\frac{3}{2}$ e 3
- definem com a semirreta paralela ao eixo real com origem no ponto P e que se prolonga no sentido positivo do eixo, um ângulo compreendido entre $\frac{\pi}{3}$ *rad* e $\frac{2\pi}{3}$*rad*

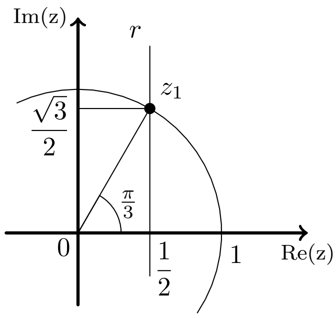


Resposta: **Opção A**

Exame – 2013, 2.ª Fase

16. Seja $\theta = \arg(z_1)$. Como $\text{Re}(z_1) = \frac{1}{2} = \cos\theta$, $|z_1| = 1$ e θ é um ângulo do 1º quadrante, temos que $\theta = \frac{\pi}{3}$

Logo $\text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{Im}(z)$



Resposta: **Opção B**

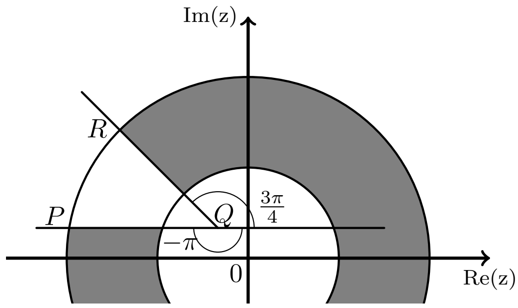
Exame – 2012, Ép. especial

17. A coroa circular representada é o conjunto dos pontos que distam da origem entre 3 e 6 unidades, ou seja a representação dos números complexos z, tais que $3 \leq |z| \leq 6$

Os pontos assinalados devem ainda satisfazer a condição de que o ângulo (medido a partir da representação geométrica do complexo $-1+i$ está compreendido entre $-\pi$ *rad* e $\frac{3\pi}{4}$*rad.*

Ou seja: $-\pi \leq \arg\left(z-(-1+i)\right) \leq \frac{3\pi}{4} \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad -\pi \leq \arg\left(z+1-i\right) \leq \frac{3\pi}{4}$$



Resposta: **Opção C**

Exame – 2012, 1.ª Fase

18. **A opção (I) não representa a região** definida pela condição porque não satisfaz a condição $\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq 2\pi$.
Os números complexos que verificam esta condição têm as respetivas representações geométricas nos 2º, 3º e 4º quadrantes, ao contrário dos pontos assinalados na opção (I).

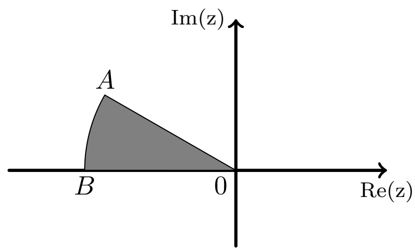
A opção (II) não representa a região definida pela condição porque não satisfaz a condição $|z| \geq |z - z_2|$.
Os números complexos que satisfazem esta condição têm as respetivas representações geométricas no semiplano delimitado pela bissetriz do segmento de reta $[OC]$ e que contém o ponto C, ou seja os pontos cuja distância à origem é não inferior à distância ao ponto C. Os pontos assinalados na opção (II) estão mais perto da origem do que do ponto C.

A opção (III) não representa a região definida pela condição porque não satisfaz a condição $|z - z_2| \leq 1$.
Os números complexos que verificam esta condição têm as respetivas representações geométricas no interior da circunferência de raio 1 e centro em C, e alguns pontos assinalados na opção (III) estão no exterior desta circunferência (pertencem ao interior da circunferência com o mesmo raio, mas centrada na origem).

Logo **a opção correta é a opção (IV)**.

Exame – 2011, Ép. especial

19. A região apresentada na figura é definida pelo interior da circunferência de centro na origem e raio $\overline{OA}$ e pelo conjuntos de pontos que representam números complexos com argumentos compreendidos entre $\arg(-\sqrt{3}+i)$ e π. Assim temos que:



$$\overline{OA} = |-\sqrt{3}+i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^{+}1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

E, sendo $\theta = \arg(-\sqrt{3}+i)$, vem que:
$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 2º quadrante,
logo $\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$
Desta forma $|z| < |-\sqrt{3}+i| \wedge \arg(-\sqrt{3}+i) \leq \arg(z) \leq \pi \quad \Leftrightarrow \quad |z| \leq 2 \wedge \frac{5\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \pi$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2011, 2.ª Fase

20. Considerando $z = a + bi$ (com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$), temos que:
- $\overline{z} = a - bi$
- $z + \overline{z} = a + bi + a - bi = 2a$
- $i \times (z + \overline{z}) = i(2a) = 2ia$
- $i \times (z + \overline{z}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2ia = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$

Ou seja o conjunto A é o conjunto dos números complexos z, tais que $\operatorname{Re}(z) = 0$, ou seja a sua representação geométrica coincide com o eixo imaginário.

Resposta: **Opção B**

Exame – 2010, Ép. especial

21. Começamos por escrever z_1 na f.a.:

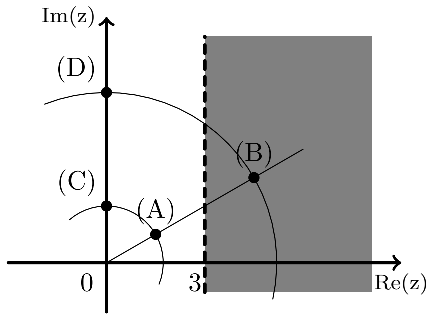
$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{2}{2} + \frac{2}{2}i = 1 + i$$

O raio da da circunferência é $|z_2 - z_1|$, ou seja, a distância entre as representações geométricas dos dois números complexos. Logo temos que :
$|z_2 - z_1| = |3 - (1+i)| = |3 - 1 - i| = |2 - i| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$
Assim a circunferência que tem centro na imagem geométrica de z_2 e que passa na imagem geométrica de z_1 é definida por:

$$|z - z_2| = |z_2 - z_1| \quad \Leftrightarrow \quad |z - 3| = \sqrt{5}$$

Exame – 2010, 2.ª Fase

22. Os números complexos das opções (A) e (C) não pertencem ao semiplano apresentado, porque as respetivas representações geométricas distam menos de 3 unidades da origem. Como o número complexo da opção (D) está sobre o eixo imaginário, também não pertence ao semiplano apresentado.



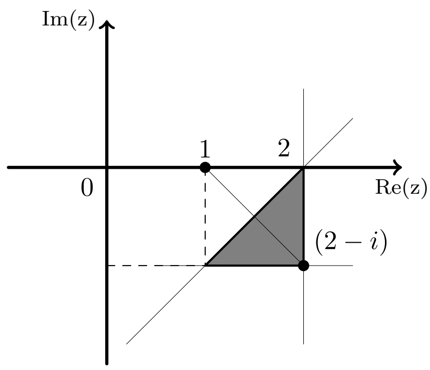
Como $\text{Re}\left(3\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right) = 3\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} = 3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\times 3}{2} = \frac{9}{2}$

Temos que $\text{Re}\left(3\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right) > 3$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2010, 1.ª Fase

23. Os pontos representado na região a sombreado satisfazem cumulativamente três condições:

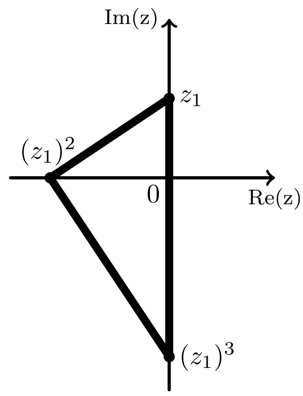


- $\text{Re}\,(z) \leq 2$, ou seja pertencem ao semiplano à direita da reta definida por $\text{Re}\,(z) = 2$
- $\text{Im}\,(z) \geq -1$, ou seja pertencem ao semiplano acima da reta definida por $\text{Im}\,(z) = -1$
- $|z-1| \geq |z-(2-i)|$, ou seja pertencem ao semiplano definido pela reta definida por $|z-1| = |z-(2-i)|$ que contém a representação geométrica de $(1-2i)$, porque queremos considerar os pontos cuja distância ao ponto (1,0) é maior que a distância ao ponto $(2,-1)$.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2009, 2.ª Fase

24.
- Como $z_1 = bi$, ou seja z_1 é um número imaginário puro, com a respetiva representação geométrica sobre o eixo imaginário.
- Logo $(z_1)^2 = (bi)^2 = b^2i^2 = b^2 \times (-1) = -b^2$ é um número real negativo com a respetiva representação geométrica sobre a parte negativa do eixo real.
- Logo $(z_1)^3 = (bi)^3 = b^3i^3 = b^3 \times (-i) = -b^3i$ é um número imaginário puro, com a respetiva representação geométrica sobre o eixo imaginário.



A única opção em que triângulo tem dois vértices sobre o eixo imaginário e o terceiro sobre a parte negativa do eixo real é a opção (C).

Resposta: **Opção C**

Exame – 2009, 1.ª Fase

25. Analisando cada uma das opções apresentadas, temos que:

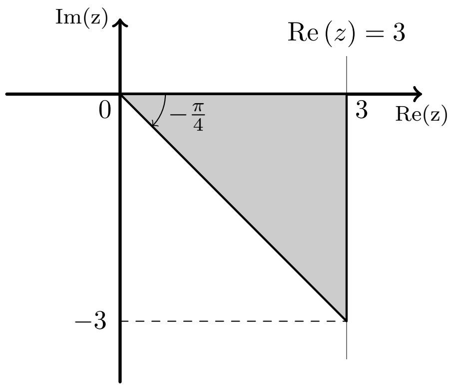
- A condição $|z+4| = 5$ pode ser escrita como $|z-(-4)| = 5$ e define os pontos do plano complexo, cuja distância à representação geométrica do número complexo $w = -4$ é igual a 5. Ou seja, a circunferência de centro no ponto de coordenadas $(-4{,}0)$ e raio 5.
- A condição $|z| = |z+2i|$ pode ser escrita como $|z-0| = |z-(-2i)|$ e define os pontos do plano complexo, que são equidistantes das representações geométricas do números complexos $w_1 = 0$ e $w_2 = -2i$. Ou seja, a mediatriz do reta cujos extremos são os pontos de coordenadas $(0{,}0)$ e $(0,-2)$.
- A condição $0 \leq \arg(z) \leq \pi$ define todos os números complexos cuja representação geométrica define com a origem e a parte positiva do eixo real um ângulo compreendido entre 0 e π radianos. Ou seja, a totalidade dos 1º e 2º quadrantes.
- A condição $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 2$ define todos os números complexos da forma $w = a + (2-a)i$, com $a \in \mathbb{R}$. Ou seja a reta paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares que contém o ponto de coordenadas $(0,-2)$.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2008, Ép. especial

26. Os pontos representado na região a sombreado satisfazem cumulativamente duas condições:

- $\operatorname{Re}(z) \leq 3$, ou seja, pertencem ao semiplano à direita da reta definida por $\operatorname{Re}(z) = 3$
- $-\dfrac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$, ou seja, os pontos que são imagens geométricas de números complexos cujo argumento está compreendido entre $-\dfrac{\pi}{4}$ e 0



Resposta: **Opção A**

Exame – 2008, 2.ª Fase

27. Sendo $z = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, vem que $\overline{z} = a - bi$.

Assim, temos que $z + \overline{z} = 2 \;\Leftrightarrow\; a + bi + a - bi = 2 \;\Leftrightarrow\; 2a = 2 \;\Leftrightarrow\; a = 1$

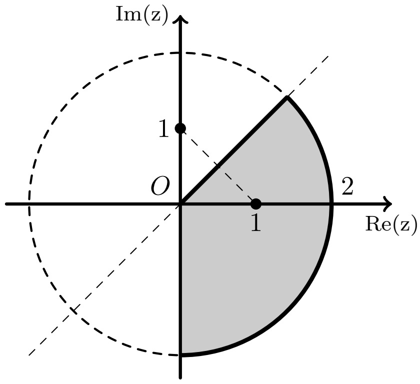
Ou seja, a condição $z + \overline{z} = 2$ pode ser escrita como $\operatorname{Re}(z) = 1$, e a sua representação geométrica é a reta paralela ao eixo imaginário que contém a representação geométrica do número complexo $w = 1$.

Resposta: **Opção B**

Exame – 2008, 1.ª Fase

28. Na figura ao lado está representado, a sombreado, a região B, que é a interseção de três condições:

- $|z| \leq 2$, o interior da circunferência centrada na origem e raio 2
- $\operatorname{Re}(z) \geq 0$, o semiplano à direita do eixo imaginário, ou o conjunto dos pontos com a parte real não nula
- $|z-1| \leq |z-i|$, o semiplano limitado superiormente pela bisetriz dos quadrantes ímpares



A região B pode ser decomposta num quarto do círculo de raio 2 e num setor circular que corresponde a metade de um quarto de círculo, pois é delimitada pela bissetriz dos quadrantes ímpares.

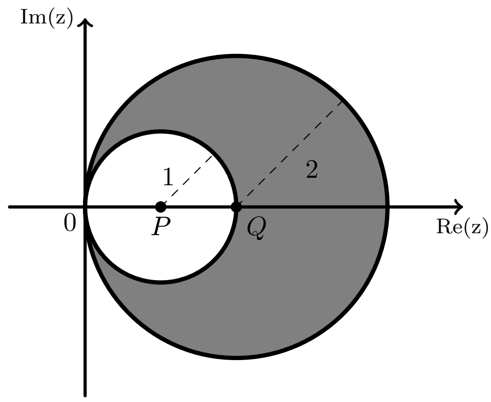
Assim, a área pode ser calculada como:

$$A = \frac{A_\circ}{4} + \frac{\frac{A_\circ}{4}}{2} = \frac{A_\circ}{4} + \frac{A_\circ}{8} = \frac{2 \times A_\circ}{8} + \frac{A_\circ}{8} = \frac{3 \times A_\circ}{8} = \frac{3 \times \pi \times 2^2}{8} = \frac{3 \times 4 \times \pi}{8} = \frac{12\pi}{8} = \frac{3\pi}{2}$$

Exame – 2006, Ép. especial

29. Designando por P e Q as representações geométricas dos números complexos $w_1 = 1$ e $w_2 = 2$, respetivamente, temos que a região sombreada é o conjunto dos pontos do plano complexo que satisfazem cumulativamente duas condições:

- estão a uma distância superior a 1 do ponto P
- estão a uma distância inferior a 2 do ponto Q



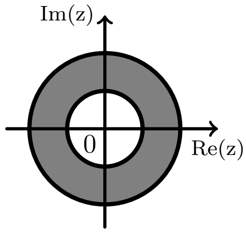
Assim temos que a região sombreada é definida por

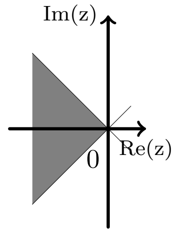
$$|z-1| \geq 1 \ \wedge \ |z-2| \leq 2$$

Resposta: **Opção A**

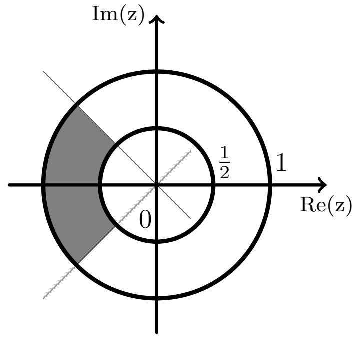
Exame – 2006, 2.ª Fase

30. A condição $\frac{1}{2} \leq |z| < 1$ define a coroa circular delimitada pelas circunferências centradas na origem e de raios $\frac{1}{2}$ e $|z| < 1$; e a condição $\frac{3\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{5\pi}{4}$ define a região do plano complexo, dos 2º e 3º quadrantes compreendido entre as bissetrizes dos quadrantes, como nas figuras ao lado.





A condição $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 1 \ \wedge \ \frac{3\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{5\pi}{4}$, é a interseção das duas regiões definidas, pelo que a sua representação geométrica é a zona representada a sombreado na figura ao lado.



A área da coroa circular pode ser calculada como a diferença das áreas dos dois círculos:

- Área do círculo de raio 1: $A = \pi \times 1^2 = \pi$
- Área do círculo de raio $\frac{1}{2}$: $A = \pi \times \left(\frac{1}{1}\right)^2 = \pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$
- Área da coroa circular $A = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Como as bissetrizes dos quadrantes dividem a coroa circular em quatro partes iguais, a área da região defina pela condição é

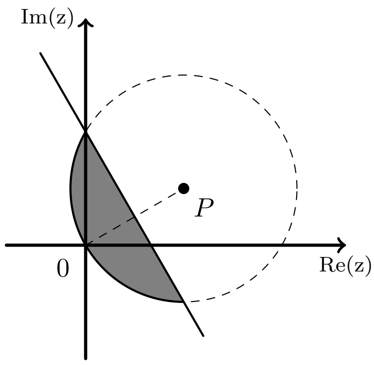
$$A = \frac{\frac{3\pi}{4}}{4} = \frac{3\pi}{16}$$

Exame – 2006, 1.ª Fase

31. Sendo P a representação geométrica do número complexo z_1, a condição $|z - z_1| \leq 1 \ \wedge \ |z| \leq |z - z_1|$, define uma região do plano complexo que é a interseção de duas regiões distintas:

- o interior da circunferência de centro em P e raio 1 ($|z - z_1| \leq 1$)
- o semiplano cuja fronteira é a mediatriz do segmento de reta, cujos extremos são a origem e o ponto P e que contém a origem; ou seja o conjunto dos pontos que estão mais perto da origem do que do ponto P
($|z| \leq |z - z_1|$)

Assim, na figura ao lado, a sombreado, está a representação geométrica da região definida pela condição.



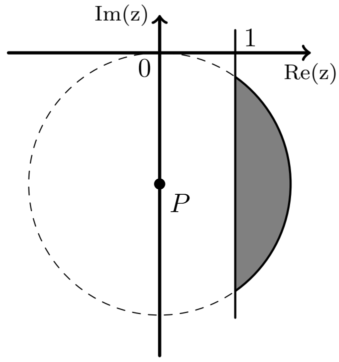
Para o traçado da figura pode ser útil considerar que a circunferência deve passar pela origem porque tem raio 1 e $|z_1| = 1$; que a reta que define o semiplano é perpendicular ao segmento de reta $[OP]$ e contém o ponto médio desse segmento de reta; e que o ponto P tem de coordenadas $(0{,}87; \frac{1}{2})$, arredondando a abcissa às décimas.

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)

32. Sendo P a representação geométrica do número complexo w_2, e observando que $\text{Re}(w_1) = \text{Re}(1+i) = 1$ a condição $\text{Re}(z) \geq \text{Re}(w_1) \quad \wedge \quad |z-w_2| \leq \sqrt{3}$, define uma região do plano complexo que é a interseção de duas regiões distintas:

- o interior da circunferência de centro em P e raio $\sqrt{3}$ ($|z-z_1| \leq 1$)
- o semiplano à direita da reta definida pela condição $\text{Re}(z) = 1$

Assim, na figura ao lado, a sombreado, está a representação geométrica da região definida pela condição.

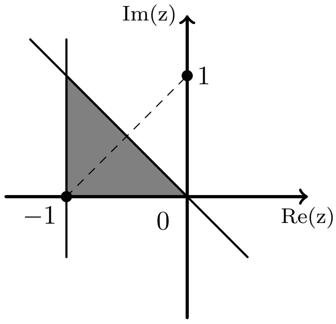


Para o traçado da figura pode ser útil considerar que a circunferência deve passar pela origem porque tem raio $\sqrt{3}$ e $|w_2| = \sqrt{3}$; que a reta que define o semiplano é perpendicular ao eixo real e passa no ponto de coordenadas (1,0); e que o ponto P tem de coordenadas $(0;-1.73)$, arredondando a ordenada às décimas.

Exame – 2005, 2.ª fase (cód. 435)

33. A região assinalada na figura a sombreado, é o conjunto dos pontos do plano complexo que verificam cumulativamente três condições:

- são representações geométricas de números complexos que têm parte real superior a -1; ou seja pertencem ao semiplano à direita da reta definida pela condição $\text{Re}(z) = 1$, $(\text{Re}(z) \geq 1)$
- são representações geométricas de números complexos que têm parte imaginária superior a 0; ou seja pertencem ao semiplano acima da reta definida pela condição $\text{Im}(z) = 0$, $(\text{Im}(z) \geq 0)$
- estão mais perto do ponto $(-1,0)$ do que do ponto (0,1); ou seja pertencem ao semiplano definido pela mediatriz do segmento de reta cujos extremos são as representações geométricas dos números complexos -1 e i e que contém a representação geométrica de -1, $(|z-(i)| \geq |z-(-1)| \quad \Leftrightarrow \quad |z-i| \geq |z+1|)$



Assim, a conjunção das três condições é $\text{Re}(z) \geq -1 \ \wedge \ \text{Im}(z) \geq 0 \ \wedge \ |z-i| \geq |z+1|$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2004, 1.ª Fase (cód. 435)

34. A circunferência de centro na imagem geométrica de w e que passa na origem do referencial é definda pela condição $|z-w| = |w|$; como $w = 1+2i$ e $|w| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, vem que:

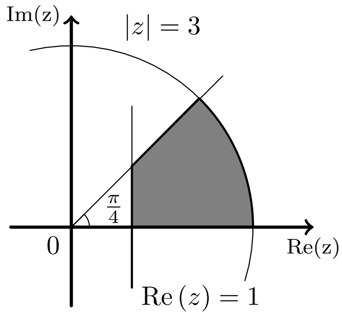
$$|z-w| = |w| \quad \Leftrightarrow \quad |z-(1+2i)| = \sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad |z-1-2i| = \sqrt{5}$$

Para que seja considerada apenas a parte da cirunferência que etá contida no quarto quadrante, temos que definir cumulativamente que os pontos devem obedecer à condição $\text{Re}(z) > 0 \ \wedge \ \text{Im}(z) < 0$, ou seja que só consideramos pontos que sejam representações geométricas de números complexos com parte real positiva e parte imaginária negativa.

Assim a condição é $\quad |z-1-2i| = \sqrt{5} \ \wedge \ \text{Re}(z) > 0 \ \wedge \ \text{Im}(z) < 0$

Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)

35. A condição indicada é a conjunção de três condições distintas, ou seja, os pontos que pertencem à região assinalada satisfazem cumulativamente as condições:



- $|z| \leq 3$, ou seja, os pontos que pertencem ao interior da circunferência de centro na origem e raio 3
- $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$, ou seja, os pontos que são representações geométricas de números complexos, cujo argumento está entre zero e $\frac{\pi}{4}$, ou seja os pontos do primeiro quadrante situados abaixo da mediatriz dos quadrantes ímpares
- $\mathrm{Re}\, z \geq 1$, ou seja, os pontos que estão à direita da reta vertical definida pela condição $\mathrm{Re}\, z = 1$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2003, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

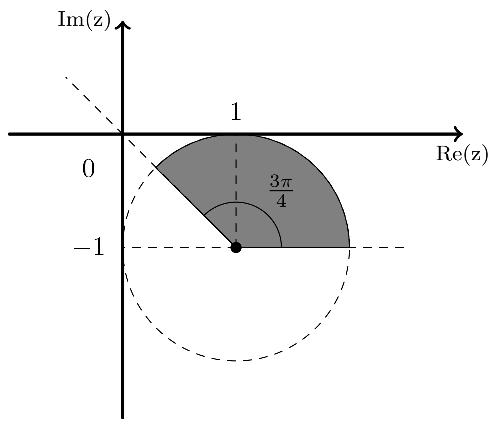
36. Uma condição que define no plano complexo a circunferência que tem centro na imagem geométrica de z_1 e que passa na imagem geométrica de z_3, é da forma $|z - z_1| = |z_1 - z_3|$, uma vez que $|z_1 - z_3|$ é a distância entre as imagens geométricas de z_1 e z_3.

Desta forma $|z_1 - z_3| = |2 - 2i - (-1 + i)| = |2 - 2i + 1 - i| = |3 - 3i| = \sqrt{3^3 + (-3)^2} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$

Assim temos que $|z - z_1| = |z_1 - z_3| \quad \Leftrightarrow \quad |z - (2 - 2i)| = 3\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad |z - 2 + 2i| = 3\sqrt{2}$

Exame – 2003, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

37. A condição indicada é a conjunção de duas condições distintas, ou seja, os pontos pertencentes à região definida pela condição satisfazem cumulativamente as condições:

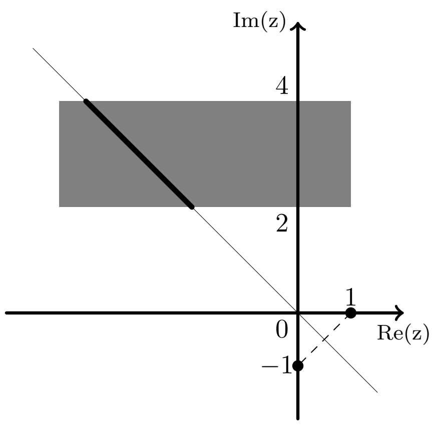


- $|z - z_1| \leq 1$, ou seja, são os pontos que pertencem ao interior da circunferência de centro em z_1 e raio 1
- $0 \leq \arg(z - z_1) \leq \dfrac{3\pi}{4}$, ou seja, são os pontos que definem com a semirreta paralela ao eixo real com origem na representação geométrica do ponto z_1 um ângulo entre zero e $\frac{3\pi}{4}$ radianos.

Assim, na figura ao lado está, a sombreado, a representação geométrica da região definida pela condição.

Exame – 2002, Prova para militares (cód. 435)

38. A condição indicada é a conjunção de duas condições distintas, ou seja, os pontos que pertençem à região assinalada satisfazem cumulativamente as condições:



- $|z+1| = |z-i| \quad \Leftrightarrow \quad |z-1| = |z-(-i)|$, ou seja, os pontos que pertencem à mediatriz do segmento de reta cujos extremos são as representações geométricas dos números complexos 1 e $-i$, que é a bissetriz dos quadrantes pares
- $2 \leq \mathrm{Im}\,(z) \leq 4$, ou seja, os pontos que pertencem à região do plano compreendida entre as retas definidas pelas condições $\mathrm{Im}\,(z) \geq 2$ e $\mathrm{Im}\,(z) \leq 4$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2002, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

39. Resposta: **Opção A**

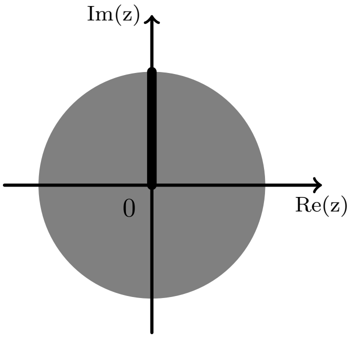
- Sendo $z = a + bi$ (com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$), temos que $\overline{z} = a - bi$, assim a condição $z + \overline{z} = 0$ pode ser escrita como $a + bi + a - bi = 0 \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou seja a condição $z + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,(z) = 0$ define os números complexos imaginários puros, ou seja o eixo imaginário.
- A condição $\mathrm{Im}\,(z) = 1$ define os números complexos da forma $z = a + i$ (com $a \in \mathbb{R}$) ou seja a reta paralela ao eixo real que contém o ponto de coordenadas (0,1)
- A condição $|z| = 0$ define os pontos que estão à distância zero da origem, ou seja define apenas a origem do referencial.
- Sendo $z = a - bi$ (com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$), temos que $\overline{z} = a - bi$, assim a condição $z + \overline{z} = 0$ pode ser escrita como $a + bi - (a - bi) = 0 \Leftrightarrow a + bi - a + bi) = 0 \Leftrightarrow 2bi = 0 \Leftrightarrow b = 0$ ou seja a condição $z - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\,(z) = 0$ define os números reais, ou seja o eixo Real.

Exame – 2002, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

40. A condição indicada é a conjunção de duas condições distintas, ou seja, os pontos pertencentes à região definida pela condição satisfazem cumulativamente as condições:

- $|z| \leq 1$, ou seja, são os pontos que pertencem ao interior da circunferência de centro na origem e raio 1
- $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}$, ou seja, são os pontos que pertencem à parte positiva do eixo imaginário

Resposta: **Opção A**



Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)

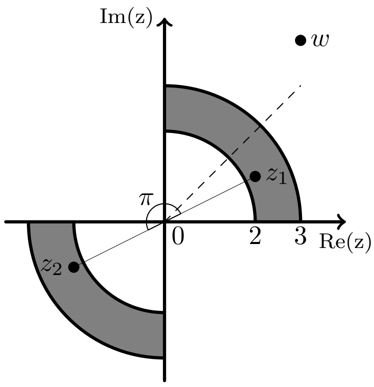
41. Seja w o número complexo $3 + 4i$, se escrevermos w na f.t. temos $w = \rho e^{i\theta}$, em que $\rho = |w| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ e sabemos ainda que θ é um ângulo do 1º quadrante, porque $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$

Logo, as raízes quadradas de w são:
$\sqrt{w} = \sqrt{5}e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right)}, k \in \{0,1\}$, ou seja, temos 2 raízes quadradas:

- $k = 0 \rightarrow z_1 = \sqrt{5}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+0\right)} = \sqrt{5}e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$
- $k = 1 \rightarrow z_2 = \sqrt{5}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2}\right)} = \sqrt{5}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$

Como $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, porque θ é um ângulo do 1º quadrante, $0 < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{\pi}{4}$,
logo $\dfrac{\theta}{2}$ também é um ângulo do 1º quadrante.
E se $\dfrac{\theta}{2}$ é um ângulo do 1º quadrante, $\dfrac{\theta}{2} + \pi$ é um ângulo do 3º quadrante.

Resposta: **Opção A**



Exame – 2001, 2.ª fase (cód. 435)

42. Como $z_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ logo $\arg(z_1) = \frac{\pi}{3}$, ou seja z_1 é número complexo, cuja representação geométrica é o vértice representado no 1º quadrante.

Como o pentágono é regular, sendo z_2 o número complexo cuja representação geométrica é o vértice representado no 2º quadrante, e $\arg(z_2) = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{5} = \frac{5\pi}{15} + \frac{6\pi}{15} = \frac{11\pi}{5}$

Assim a região indicada a sombreado é o conjunto dos pontos que são representação geométrica de pontos que satisfazem cumulativamente duas condições:

- os pontos devem pertencer ao interior da circunferência de centro na origem e raio $|z_1|$, ou seja $|z| < 2$
- os pontos devem definir com o semieixo real positivo um ângulo compreendido entre $\frac{\pi}{3}$ radianos e $\frac{11\pi}{5}$ radianos, ou seja $\frac{\pi}{3} < \arg(z) < \frac{11\pi}{5}$

Assim, temos que a condição que define a região a sombreado é:

$$|z| < 2 \ \wedge \ \frac{\pi}{3} < \arg(z) < \frac{11\pi}{5}$$

Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

43. Resposta: **Opção D**

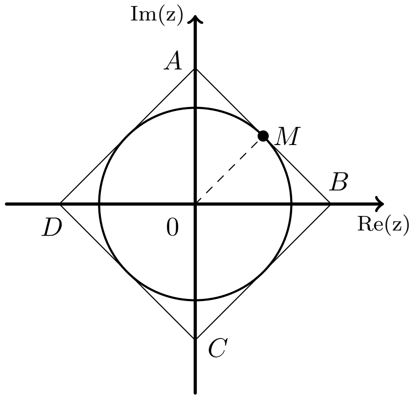
- Sendo $|z-1| = 4$ define os números complexos, cujas representações geométricas são pontos do plano complexo, cuja distância ao ponto que é a representação geométrica do número complexo 1 é 4, ou seja a circunferência de centro no ponto (1,0) e raio 4.
- A condição
$mathrmarg\,(z) = \frac{\pi}{2}$ os números complexos cujas representações geométricas são pontos que definem com o semieixo real positivo um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ radianos. Ous seja a semirreta que coincide com o semieixo positivo imaginário.
- Como a $3z + 2i = 0 \ \Leftrightarrow \ z = -\frac{2i}{3}$, a condição $3z + 2i = 0$ representa apenas o ponto (situado sobre a parte negativa do eixo imaginário) que é a representação geométrica do número complexo $z = \frac{2}{3}i$
- Como $|z-1| = |z+i| \ \Leftrightarrow \ |z-1| = |z-(-i)|$, a condição $|z-1| = |z+i|$ define os números complexos, cujas representações geométricas são pontos do plano complexo situados a igual distância das representações geométricas dos complexos 1 e $-i$, ou seja define a mediatriz do segmento de reta de extremos nestes dois pontos, que coincide com a bissetriz dos quadrantes pares.

Exame – 2000, 2.ª Fase (cód. 435)

44. Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$. Como A e B são as imagens geométrica dos números complexos 1 e i, M é a imagem geométrica do número complexo $w = \frac{1+i}{2}$

A circunferência inscrita no quadrado tem raio
$|w| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
e centro na origem, pelo que é definida pela condição:

$$|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Exame – 2000, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

45. A parte do conjunto A contida no segundo quadrante é o conjunto dos pontos que são representação geométrica de pontos que satisfazem cumulativamente duas condições:

- como devem ser pontos do 2º quadrante (excluíndo os eixos), os pontos devem definir com o semieixo real positivo um ângulo compreendido entre $\frac{\pi}{2}$ radianos e π radianos, ou seja $\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \pi$
- como devem pertencer ao conjunto A, os pontos devem estar a uma distância da origem, inferior a 1, ou seja $|z| < 1$

Assim, temos que a condição que define a região a sombreado é:

$$|z| < 1 \ \wedge \ \frac{\pi}{2} < \arg(z) < \pi$$

Exame – 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)