

MATEMÁTICA A - 12º Ano

Nºs Complexos - Operações e simplificação de expressões

Propostas de resolução

Exercícios de exames e testes intermédios

1. Sabemos que, como $i^0 + i^1 + i^2 + i^3 = 1 + i - 1 - i = 0$ e como $i^n = i^{n+4} (\forall n \in \mathbb{N})$, então a soma de quaisquer quatro parcelas consecutivas é nula.

O valor pedido é a soma de 2019 parcelas (porque inclui i^0), pelo que, como $2019 = 4 \times 504 + 3$, temos que:

$$i^0 + i^1 + i^2 + \underbrace{i^3 + i^4 + i^5 + i^6}_{0} + \dots + \underbrace{i^{2017} + i^{2016} + i^{2017} + i^{2018}}_0 = i^0 + i^1 + i^2 = 1 + i - 1 = i$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2018, Ép. especial

2. Simplificando a expressão de z , como $i^{15} = i^{4 \times 3 + 3} = i^3 = -i$, temos que:

$$\begin{aligned} z &= \frac{(2-i)^2 + 1 + i}{1-2i} + 3i^{15} = \frac{4 - 2 \times 2i + i^2 + 1 + i}{1-2i} + 3(-i) = \frac{4 - 4i - 1 + 1 + i}{1-2i} - 3i = \\ &= \frac{4 - 3i}{1-2i} - 3i = \frac{(4-3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} - 3i = \frac{4 + 8i - 3i - 6i^2}{1+2i-2i-4i^2} - 3i = \frac{4 + 5i - 6(-1)}{1-4(-1)} - 3i = \\ &= \frac{4 + 5i + 6}{1+4} - 3i = \frac{10 + 5i}{5} - 3i = 2 + i - 3i = 2 - 2i \end{aligned}$$

Assim, vem que $\bar{z} = 2 + 2i$, pelo que:

$$-\frac{1}{2} \times \bar{z} = -\frac{1}{2} \times (2 + 2i) = -1 - i$$

Escrevendo $-\frac{1}{2} \times \bar{z}$ na forma trigonométrica ($\rho e^{i\theta}$) temos:

- $\rho = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{-1}{-1} = 1$; como $\operatorname{sen} \theta < 0$ e $\operatorname{cos} \theta < 0$, θ é um ângulo do 3º quadrante, logo $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

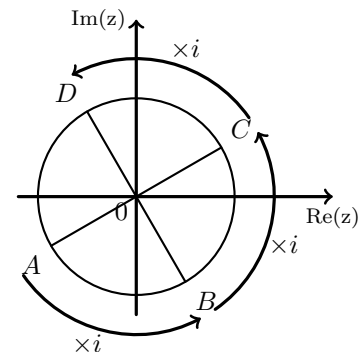
Assim $-\frac{1}{2} \times \bar{z} = \sqrt{2} e^{i(\frac{5\pi}{4})}$

Exame – 2018, 2ª Fase

3. Como a multiplicação de um número complexo por i corresponde a uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ rad da imagem geométrica desse número complexo, temos que:

- B é a imagem geométrica de iz
- C é a imagem geométrica de $i \times i \times z = i^2 z$
- D é a imagem geométrica de $i \times i \times i \times z = i^3 z$

Resposta: **Opção D**



Exame – 2017, Ép. especial



4. Temos que:

- os argumentos dos complexos z e $5z$ são iguais

$$\text{Arg}(5z) = \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{5}$$

- os argumentos de complexos simétricos, $-5z$ e $5z$, diferem de π

$$\text{Arg}(-5z) = \text{Arg}(5z) - \pi = \frac{\pi}{5} - \pi = -\frac{4\pi}{5}$$

- a multiplicação por i de um complexo corresponde a somar $\frac{\pi}{2}$ ao seu argumento

$$\text{Arg}(-5iz) = \text{Arg}(-5z) + \frac{\pi}{2} = -\frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{10} + \frac{5\pi}{10} = -\frac{3\pi}{10}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2017, 2ª Fase

5. Escrevendo o número complexo -3 na forma trigonométrica, vem $-3 = 3e^{i(-\pi)}$

Desta forma, temos que:

$$z = -3e^{i\theta} = 3e^{i(-\pi)} \times e^{i\theta} = 3e^{i(-\pi+\theta)} = 3e^{i(\theta-\pi)}$$

Logo, como $\theta \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$, então $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, pelo que:

$$\pi - \pi < \theta - \pi < \frac{3\pi}{2} - \pi \Leftrightarrow 0 < \theta - \pi < \frac{\pi}{2}$$

Ou seja, $\arg(z) \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, logo a imagem geométrica do número complexo z é um ponto do primeiro quadrante.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2016, 1ª Fase

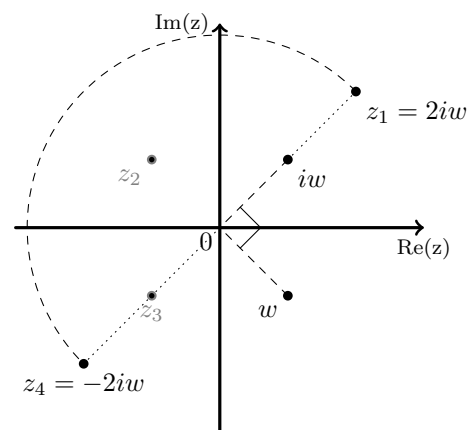


6. A operação "multiplicar por i " corresponde a "fazer uma rotação de centro em O e amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos", pelo que a imagem geométrica de iw está no primeiro quadrante a igual distância da origem do que a imagem geométrica de w

A operação "multiplicar por 2" corresponde a "fazer duplicar a distância à origem, mantendo o argumento do número complexo", pelo que $2iw = z_1$

Finalmente, a imagem geométrica de um número complexo, e do seu simétrico correspondem a rotações de centro em O e amplitude π radianos, pelo que $-2iw = z_4$

Resposta: **Opção D**



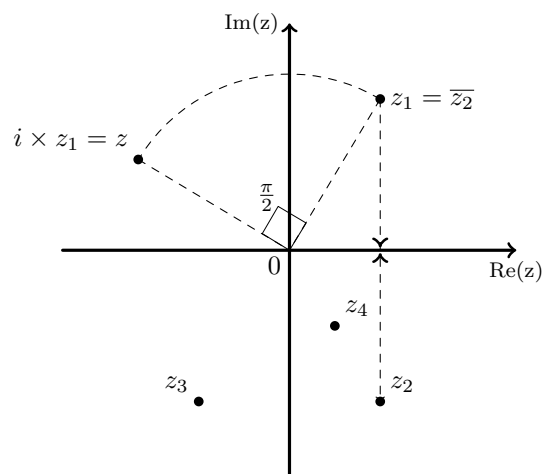
Exame – 2014, Ép. especial

7. As operações "multiplicar por i " e "transformar no conjugado" correspondem geometricamente a "fazer uma rotação de centro em O e amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos" e "encontrar o ponto simétrico relativamente ao eixo real", respetivamente.

Assim, se considerarmos as operações inversas, pela ordem inversa, a partir da imagem geométrica de z , (como indicado na figura), obtemos como resposta a imagem geométrica de z_2 .

Ou, dizendo de outra forma, se $w = z_2$, temos que $\bar{w} = \bar{z}_2 = z_1$ e $i \times \bar{w} = i \times z_1 = z$, pelo que $w = z_2$.

Resposta: **Opção C**



Exame – 2013, Ép. especial

8. Se $z = 2 + bi$, então $\bar{z} = 2 - bi$

Assim temos $\text{Re}(\bar{z}) > 0$ e como $b < 0$, $\text{Im}(\bar{z}) > 0$, pelo que sabemos que a representação geométrica de \bar{z} pertence ao primeiro quadrante, logo $\text{Arg}(\bar{z})$ não pode ser $-\alpha$

Por outro lado $|\bar{z}| = \sqrt{2^2 + b^2}$, como $b^2 > 0$, temos que $|\bar{z}| > 2$, logo $|\bar{z}|$ não pode ser $\frac{3}{2}$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2013, 2ª Fase

- 9.

$$\begin{aligned} \frac{\cos(\pi - \alpha) + i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos \alpha + i \sin \alpha} &= \frac{\cos(\pi - \alpha) + i \sin \alpha}{\cos \alpha + i \sin \alpha} \\ &= \frac{\cos(\pi - \alpha) + i \sin(\pi - \alpha)}{\cos \alpha + i \sin \alpha} \\ &= \frac{e^{i(\pi - \alpha)}}{e^{i\alpha}} \\ &= e^{i(\pi - \alpha - \alpha)} \\ &= e^{i(\pi - 2\alpha)} \end{aligned}$$

Porque $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$

Porque $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$

Fazendo a divisão na forma trigonométrica

Como queríamos mostrar

Exame – 2013, 2ª Fase



10. Temos que: $|z| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$
e sabemos que $\text{Arg}(z) = \alpha$, pelo que podemos escrever que $z = 10e^{i\alpha}$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} w &= \frac{-i \times z^2}{\bar{z}} && \text{(do enunciado)} \\ &= \frac{-i \times 10^2 e^{i(2\alpha)}}{10e^{i(-\alpha)}} && \text{(calculado } z^2 \text{ e escrevendo } \bar{z} \text{ na f.t.)} \\ &= -i \times 10e^{i(2\alpha - (-\alpha))} && \text{(fazendo a divisão na f.t.)} \\ &= e^{i(-\frac{\pi}{2})} \times 10e^{i(3\alpha)} && \text{(escrevendo } -i \text{ na f.t.)} \\ &= 10e^{i(-\frac{\pi}{2} + 3\alpha)} && \text{(fazendo o produto na f.t.)} \\ &= 10e^{i(3\alpha - \frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2013, 1ª Fase

11. Sabemos que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, e que é válida a igualdade $i^n = i^k$, onde k é o resto da divisão inteira de n por 4.

Assim,

- como $8n = 4 \times 2n + 0$, temos que $i^{8n} = i^0 = 1$
- como $8n - 1 = 8n - 4 + 3 = 4(2n - 1) + 3$ temos que $i^{8n-1} = i^3 = -i$
- como $8n - 2 = 8n - 4 + 2 = 4(2n - 1) + 2$ temos que $i^{8n-2} = i^2 = -1$

Temos que $i^{8n} \times i^{8n-1} + i^{8n-2} = i^0 \times i^3 + i^2 = 1 \times (-i) + (-1) = -i - 1$

Logo a imagem geométrica de $i^{8n} \times i^{8n-1} + i^{8n-2}$ pertence ao terceiro quadrante.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2013, 1ª Fase

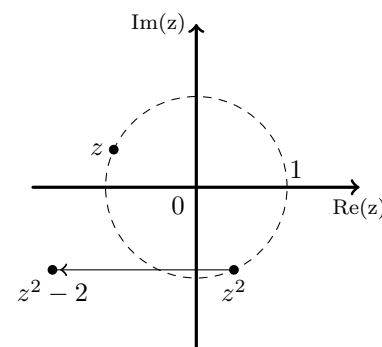
12. Como $z = e^{i\theta}$, então $z^2 = e^{i(2\theta)}$.

Como $\frac{3\pi}{4} < \theta < \pi$, então $2 \times \frac{3\pi}{4} < 2\theta < 2 \times \pi$, ou seja $2\theta \in \left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right[$

Logo z^2 pertence ao 4º quadrante e $|z^2| = 1$, ou seja z^2 é da forma $a + bi$, com $0 < a < 1$ e $-1 < b < 0$.

Assim $z^2 - 2 = (a - 2) + bi$, em que $a - 2 < 0$ e $b < 0$, pelo que $z^2 - 2$ pertence ao 3º quadrante.

Resposta: **Opção C**



Teste Intermédio 12º ano – 24.05.2013

13. Sabemos que $i^6 = i^2 = -1$ e que $i^7 = i^3 = -i$.

$$\text{Logo } \frac{i^6 + 2i^7}{2 - i} = \frac{-1 + 2(-i)}{2 - i} = \frac{(-1 - 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{-2 - i - 4i - 2i^2}{2^2 - i^2} = \frac{-2 - 5i + 2}{4 + 1} = \frac{-5i}{5} = -i$$

Teste Intermédio 12º ano – 24.05.2013



14. Se z e w são inversos um do outro, temos que $\frac{1}{z} = w$

$$\text{Por um lado } \frac{1}{z} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-i}{1^2-i^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Por outro lado, como $11 = 4 \times 2 + 3$, sabemos que $i^{11} = i^3 = -i$ e assim $w = (k-1) + 2pi^{11} = (k-1) + 2p(-i) = (k-1) - (2p)i$

$$\text{Como } \frac{1}{z} = w \text{ temos que } \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = (k-1) - (2p)i$$

$$\text{Logo } \frac{1}{2} = k-1 \wedge \frac{1}{2} = 2p \Leftrightarrow \frac{1}{2} + 1 = k \wedge \frac{1}{4} = p \Leftrightarrow \frac{3}{2} = k \wedge \frac{1}{4} = p$$

$$\text{Assim temos que } k+p = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{6}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2012, Ép. especial

15. Como $\overline{z_2} = 3 + ki$ temos:

$$z_1 \times \overline{z_2} = (2+i)(3+ki) = 6 + 2ki + 3i + ki^2 = 6 - 1 \times k + i(2k+3) = (6-k) + (2k+3)i$$

Para que $z_1 \times \overline{z_2}$ seja um imaginário puro $\text{Re}(z_1 \times \overline{z_2}) = 0$

$$\text{Logo } 6 - k = 0 \Leftrightarrow 6 = k$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2012, 2ª Fase

16. Sabemos que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, e que é válida a igualdade $i^n = i^k$, onde k é o resto da divisão inteira de n por 4.

Assim, como $4n - 6 = 4n - 8 + 2 = 4(n-2) + 2$ temos que $i^{4n-6} = i^2 = -1$

Devemos escrever $2e^{i(-\frac{\pi}{6})}$ na f.a. para podermos somar as parcelas do numerador:

$$2e^{i(-\frac{\pi}{6})} = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

Assim temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3} \times i^{4n-6} + 2e^{i(-\frac{\pi}{6})}}{2e^{i(\frac{\pi}{5})}} &= \frac{\sqrt{3} \times (-1) + 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)}{2e^{i(\frac{\pi}{5})}} = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3} - \frac{2}{2}i}{2e^{i(\frac{\pi}{5})}} = \frac{-i}{2e^{i(\frac{\pi}{5})}} = \\ &= \frac{e^{i(-\frac{\pi}{2})}}{2e^{i(\frac{\pi}{5})}} = \frac{1}{2}e^{i(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5})} = \frac{1}{2}e^{i(-\frac{7\pi}{10})} = \frac{1}{2}e^{i(\frac{13\pi}{10})} \end{aligned}$$

Exame – 2012, 2ª Fase

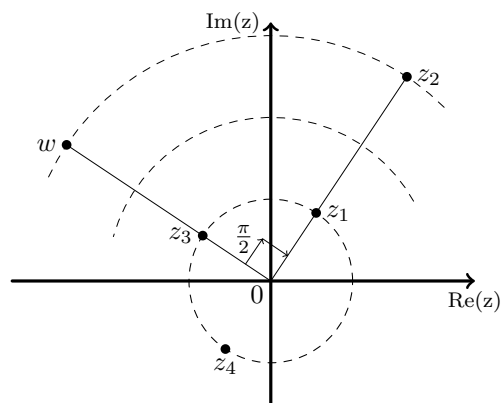


17. As operações "dividir por i " e "dividir por 3" correspondem geometricamente a "fazer uma rotação de centro em O e amplitude $-\frac{\pi}{2}$ radianos" e "dividir a distância ao centro por 3", respetivamente.

Assim, podemos fazer as operações por qualquer ordem e, por isso, temos duas alternativas:

- $\frac{w}{i} = z_2$ e $\frac{z_2}{3} = z_1$, ou então
- $\frac{w}{3} = z_3$ e $\frac{z_3}{i} = z_1$

Resposta: **Opção A**



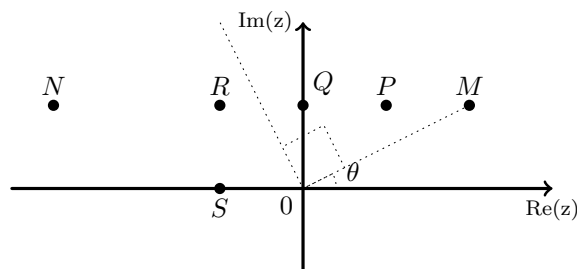
Exame – 2012, 1ª Fase

18. Como o ponto M é a imagem geométrica do número complexo z_1 que vamos designar por $z_1 = \rho_1 e^{i\theta}$, em que $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ porque M é um ponto do primeiro quadrante e $\text{Re}(z_1) > \text{Im}(z_1)$.

- Podemos excluir o ponto da opção (D), o ponto S porque é a imagem geométrica de um número complexo z da forma $z = \rho_3 e^{i\pi}$, e assim, $z_1 \times z = (\rho_1 \rho_3) e^{i(\pi+\theta)}$; e como $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ então a imagem geométrica de $z_1 \times z$ seria um ponto do 3º quadrante e não o ponto N
- Podemos excluir o ponto da opção (B), o ponto Q porque é a imagem geométrica de um número complexo z da forma $z = \rho_4 e^{i(\frac{\pi}{2})}$, e assim, $z_1 \times z = (\rho_1 \rho_3) e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$; ou seja a imagem geométrica de $z_1 \times z$ seria um ponto sobre a reta perpendicular a à reta OM pelo ponto O e não o ponto N
- Podemos excluir o ponto da opção (A), o ponto P porque é a imagem geométrica de um número complexo z da forma $z = \rho_5 e^{i\alpha}$, e assim, $z_1 \times z = (\rho_1 \rho_5) e^{i(\theta+\alpha)}$; e como $\alpha < \frac{\pi}{2}$, então a imagem geométrica de $z_1 \times z$ seria um ponto do quadrante definido pela reta OM e pela perpendicular pelo ponto O e não o ponto N

Logo o ponto R é o único, de entre as opções apresentadas, que pode ser a imagem geométrica do número complexo z_2

Resposta: **Opção C**



Exame – 2011, Prova especial



19. Para que z_1 seja igual ao conjugado de z_2 , tem que se verificar a condição $\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) \wedge \text{Im}(z_1) = -\text{Im}(z_2)$

Logo:

$$\begin{cases} \text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) \\ \text{Im}(z_1) = -\text{Im}(z_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k + 2 = 3p - 4 \\ p = -(2 - 5k) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k + 6 = 3p \\ p = 5k - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 2 = p \\ k + 2 = 5k - 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k + 2 = p \\ 2 + 2 = 5k - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 2 = p \\ 4 = 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2 = p \\ 1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = p \\ 1 = k \end{cases}$$

Resposta: **Opção B**

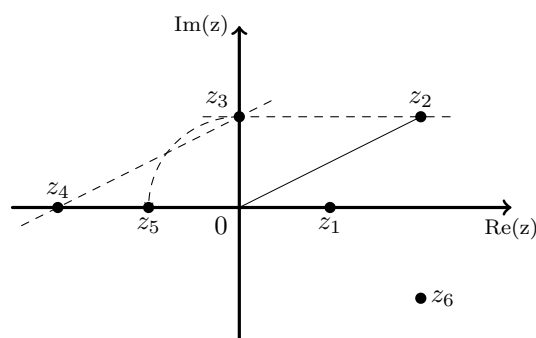
Exame – 2011, Ép. especial

20. Pela observação da figura podemos adicionar geometricamente os afixos de z_2 e de z_4 e temos que $z_2 + z_4 = z_3$

A operação "multiplicar por i " corresponde geometricamente a "fazer uma rotação de centro em O e amplitude $\frac{\pi}{2}$ ", pelo que $z_3 \times i = z_5$.

Logo $(z_2 + z_4) \times i = z_3 \times i = z_5$.

Resposta: **Opção C**



Exame – 2011, 2ª Fase

21. Sabemos que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, e que é válida a igualdade $i^n = i^k$, onde k é o resto da divisão inteira de n por 4.

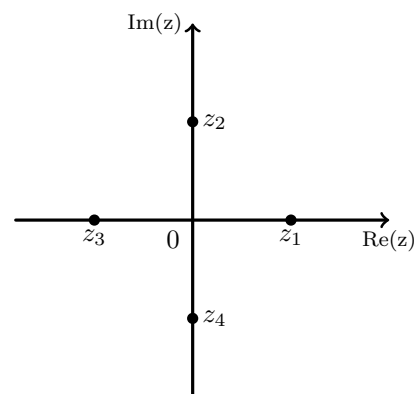
Assim,

- como $4n = 4 \times n + 0$, temos que $i^{4n} = i^0 = 1$
- como $4n + 1 = 4 \times n + 1$ temos que $i^{4n+1} = i^1 = i$
- como $4n + 2 = 4 \times n + 2$ temos que $i^{4n+2} = i^2 = -1$

Assim temos que:

$i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} = 1 + i - 1 = i$, pelo que, de acordo com a figura, temos que $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} = z_2$

Resposta: **Opção B**



Exame – 2011, 1ª Fase



22. Designando por w , z_1 e z_2 os números complexos cujas imagens geométricas são os pontos B , A e C , respetivamente, temos que

- $|w| = |z_1|$, porque os pontos A e B estão à mesma distância da origem; logo

$$|w| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

- $\arg(w) = \arg(z_2) - \frac{\pi}{9}$, como $\arg(z_2) = \frac{3\pi}{2}$, temos que

$$\arg(w) = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{9} = \frac{27\pi}{18} - \frac{2\pi}{18} = \frac{25\pi}{18}$$

Assim temos que $w = 5e^{i(\frac{25\pi}{18})}$

Resposta: **Opção B**

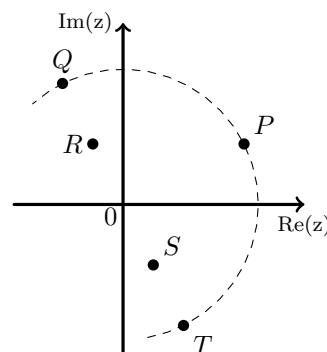
Teste Intermédio 12º ano – 26.05.2011

23. A operação "multiplicar por i " corresponde geometricamente a "fazer uma rotação de centro em O e amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos".

Assim temos que $i \times z = w$, sendo w o número complexo que tem por imagem geométrica o ponto Q .

Logo $-i \times z = -w$, ou seja o número complexo que tem por imagem geométrica o ponto T .

Resposta: **Opção D**



Exame – 2010, Ép. especial

24. z é um imaginário puro, se $\arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Assim temos que:

$$\frac{\pi}{8} - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} - k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{8} - \frac{4\pi}{8} - k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = -\frac{3\pi}{8} - k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo valores a k , temos:

- Se $k = 0$, $\theta = -\frac{3\pi}{8}$
- Se $k = -1$, $\theta = -\frac{3\pi}{8} + \pi = -\frac{3\pi}{8} + \frac{8\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2010, 1ª Fase

25. Como

- $i^6 = i^{4+2} = i^2 = -1$
- $i^7 = i^{4+3} = i^3 = -i$
- $(1 + 2i)(3 + i) = 3 + i + 6i + 2i^2 = 3 + 2(-1) + 7i = 1 + 7i$

Temos que:

$$\frac{(1 + 2i)(3 + i) - i^6 + i^7}{3i} = \frac{1 + 7i - (-1) - i}{3i} = \frac{2 + 6i}{3i} = \frac{(2 + 6i) \times i}{3i \times i} = \frac{2i + 6i^2}{3i^2} = \frac{2i - 6}{-3} = \frac{-6}{-3} + \frac{2i}{-3} = 2 - \frac{2}{3}i$$

Teste Intermédio 12º ano – 19.05.2010



26. Como $i = e^{i(\frac{\pi}{2})}$, podemos fazer a multiplicação na forma trigonométrica:

$$z = i \cdot e^{i\theta} = e^{i(\frac{\pi}{2})} \times e^{i\theta} = e^{i(\frac{\pi}{2} + \theta)}$$

Assim o conjugado de z é:

$$\bar{z} = e^{i(-(\frac{\pi}{2} + \theta))} = e^{i(-\frac{\pi}{2} - \theta)}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2009, Ép. especial

27. Temos que $i^{43} = i^{4 \times 10 + 3} = i^3 = -i$

$$\text{Calculando } z_1^2 \text{ temos: } z_1^2 = (3 - 2i)^2 = 3^2 - 2 \times 3(2i) + (2i)^2 = 9 - 12i + 4i^2 = 9 - 4 - 12i = 5 - 12i$$

Como $8e^{i(\frac{3\pi}{2})} = -8i$, calculando z na forma algébrica, temos:

$$\begin{aligned} z &= \frac{z_1 + z_1^2 + 2i^{43}}{8e^{i(\frac{3\pi}{2})}} = \frac{(3 - 2i) + (5 - 12i) + 2(-i)}{-8i} = \frac{8 - 16i}{-8i} = \frac{1 - 2i}{-i} = \\ &= \frac{(1 - 2i) \times i}{-i \times i} = \frac{i - 2i^2}{-i^2} = \frac{i - 2(-1)}{-(-1)} = 2 + i \end{aligned}$$

Exame – 2009, Ép. especial

28. Se $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$ então $\arg(\bar{z}) = -\frac{\pi}{3}$

$$\text{Escrevendo } 2i \text{ na f.t. temos } 2i = 2e^{i(\frac{\pi}{2})}$$

Assim, sendo $\rho = |z|$ (e por isso também $\rho = |\bar{z}|$) e fazendo a divisão na f.t. temos que:

$$\frac{2i}{\bar{z}} = \frac{2e^{i(\frac{\pi}{2})}}{\rho e^{i(-\frac{\pi}{3})}} = \frac{2}{\rho} e^{i(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{3}))} = \frac{2}{\rho} e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})} = \frac{2}{\rho} e^{i(\frac{3\pi}{6} + \frac{2\pi}{6})} = \frac{2}{\rho} e^{i(\frac{5\pi}{6})}$$

$$\text{Logo } \arg\left(\frac{2i}{\bar{z}}\right) = \frac{5}{6}\pi$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2009, 1ª Fase

29. Como $i^{18} = i^{4 \times 4 + 2} = i^2 = -1$, temos que:

$$z_1 = \frac{i}{1 - i} - i^{18} = \frac{i(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} - (-1) = \frac{i + i^2}{1^2 - i^2} + 1 = \frac{-1 + i}{1 + 1} + 1 = \frac{-1 + i}{2} + 1 = \frac{-1 + i + 2}{2} = \frac{1 + i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Escrevendo z_1 na f.t. temos $z_1 = \rho e^{i\theta}$, onde:

$$\bullet \rho = |z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\bullet \text{tg } \theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1; \text{ como } \text{sen } \theta > 0 \text{ e } \text{cos } \theta > 0, \theta \text{ é um ângulo do } 1^\circ \text{ quadrante, logo } \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Logo } z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{\pi}{4})}$$

Exame – 2009, 1ª Fase

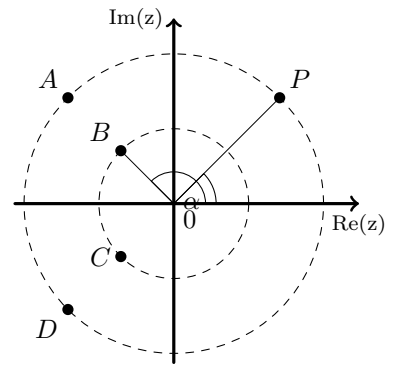


30. A imagem geométrica do número complexo $\frac{\rho}{2}e^{i(2\alpha)}$ é um número complexo w tal que:

- $|w| = \frac{|z|}{2}$ (apenas os pontos B e C verificam esta condição)
- $\arg(w) = 2 \times \arg(z)$ (apenas os pontos A e B verificam esta condição)

Assim o ponto B é a imagem geométrica de $\frac{\rho}{2}e^{i(2\alpha)}$

Resposta: **Opção B**



Teste Intermédio 12º ano – 27.05.2009

31. Como $i^{35} = i^{8 \times 4 + 3} = i^3 = -i$, e

$$(2+i)^2 = (2+i)(2+i) = 4 + 2i + 2i + i^2 = 4 - 1 + 4i = 3 + 4i$$

temos que:

$$\begin{aligned} \frac{(2+i)^2 + 1 + 6i^{35}}{1+2i} &= \frac{3 + 4i + 1 + 6(-i)}{1+2i} = \frac{3 + 1 + 4i - 6i}{1+2i} = \frac{4 - 2i}{1+2i} = \frac{(4-2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \\ &= \frac{4 - 8i - 2i + 4i^2}{1^2 - 4i^2} = \frac{4 - 4 - 10i}{1 + 4} = \frac{-10i}{5} = -2i \end{aligned}$$

Teste Intermédio 12º ano – 27.05.2009

32. Como $e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = i$, temos que:

$$z_1 = (1-i) \cdot (1+i) = 1^2 - i^2 = 1 + 1 = 2$$

$$\text{Na f.t.: } z_1 = 2e^{i \times 0}$$

Fazendo a divisão na f.t.:

$$w = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i \times 0}}{8e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} = \frac{2}{8}e^{i\left(0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} = \frac{1}{4}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

Exame – 2008, Ép. especial

33. Os números complexos z e $-z$, têm argumentos que diferem de π radianos, logo, temos que:

$$\arg(-z) = \pi + \arg(z) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2008, 2ª Fase

34. Como $i^{18} = i^{4 \times 2 + 2} = (i^2)^4 \times i^2 = (-1)^4 \times (-1) = -1$, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{2z_1 - i^{18} - 3}{1-2i} &= \frac{2(1-i) - (-1) - 3}{1-2i} = \frac{2-2i+1-3}{1-2i} = \frac{-2i}{1-2i} = \frac{-2i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-2i-4i^2}{1^2 - (2i)^2} = \\ &= \frac{-2i+4}{1+4} = \frac{4-2i}{5} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i \end{aligned}$$

Exame – 2008, 2ª Fase



35. O número complexo $3i$ tem a sua representação geométrica sobre a parte positiva do eixo imaginário, pelo que define um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ radianos com o semieixo real positivo, logo $\arg(z) = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\pi$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2008, 1ª fase

36. Sabemos que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, e que é válida a igualdade $i^p = i^k$, onde k é o resto da divisão inteira de p por 4.

Assim, como $i^n = -i$, temos que $i^n = -i = i^3 = i^{4 \times p + 3}$, para $p \in \mathbb{N}$.

Logo $i^{n+1} = i^{(4 \times p + 3) + 1} = i^{4 \times p + 4} = i^{4 \times (p+1)} = i^{4 \times (p+1) + 0} = i^0 = 1$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2007, 2ª fase

37. Como $\arg(z_1) = \alpha$, temos que $z_1 = \rho e^{i\alpha}$
Como $z_2 = 4iz_1$, temos que $-z_2 = -4iz_1$

Como $-4i = 4e^{i(\frac{3\pi}{2})}$, fazendo a multiplicação na f.t. temos que:

$$-z_2 = -4iz_1 = 4e^{i(\frac{3\pi}{2})} \times \rho e^{i\alpha} = (4\rho)e^{i(\frac{3\pi}{2} + \alpha)}$$

Assim, como $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, temos que $\arg(-z_2) = \frac{3\pi}{2} + \alpha$

Exame – 2007, 2ª fase

38. Designando por w , z_1 e z_2 os números complexos cujas imagens geométricas são os pontos C , A e B , respetivamente, temos que

- $|w| = |z_1|$, porque os pontos A e C estão à mesma distância da origem; logo

$$|w| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

- Como $18^\circ = 18 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 18 \times \frac{\pi}{18 \times 10} \text{ rad} = \frac{\pi}{10} \text{ rad}$, então:

$$\arg(w) = \arg(z_2) + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10} = \frac{5\pi}{10} + \frac{\pi}{10} = \frac{6\pi}{10} = \frac{3\pi}{5}$$

Assim temos que $w = 5e^{i(\frac{3\pi}{5})}$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2006, Ép. especial

39. Como $e^{i(\frac{\pi}{2})} = i$ temos que:

$$z_1 = (2 - i) \left(2 + e^{i(\frac{\pi}{2})} \right) = (2 - i)(2 + i) = 2^2 - i^2 = 4 - (-1) = 5$$

Escrevendo z_1 na f.t. temos $z_1 = 5 = 5e^{i \times 0}$

Fazendo a divisão na f.t. vem:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5e^{i \times 0}}{\frac{1}{5}e^{i(-\frac{\pi}{7})}} = \frac{5}{\frac{1}{5}}e^{i(0 - (-\frac{\pi}{7}))} = 25e^{i(\frac{\pi}{7})}$$

Exame – 2006, 2ª fase



40. Seja $z = a + bi$ com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, cuja imagem geométrica é o ponto A .

Assim $\bar{z} = a - bi$, cuja imagem geométrica é o ponto A' , simétrico do ponto A relativamente ao eixo real.

Logo $-\bar{z} = -(a - bi) = -a + bi$, cuja imagem geométrica é o ponto B , simétrico do ponto A relativamente ao eixo imaginário.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2005, Ép. especial

41. Escrevendo w_1 na f.t. temos $w_1 = \rho e^{i\theta}$, onde:

- $\rho = |w_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{1} = 1$; como $\operatorname{sen} \theta > 0$ e $\operatorname{cos} \theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{4}$

Assim $w_1 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})}$

Calculando o produto $w_1 \times w_2$ na f.t., e escrevendo o resultado na f.a. vem:

$$\begin{aligned} w_1 \times w_2 &= \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})} \times \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{12})} = (\sqrt{2} \times \sqrt{2})e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12})} = 2e^{i(\frac{3\pi}{12} + \frac{\pi}{12})} = 2e^{i(\frac{4\pi}{12})} = 2e^{i(\frac{\pi}{3})} = \\ &= 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} \right) \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 1 + \sqrt{3}i \end{aligned}$$

Podemos ainda escrever w_3 na f.a.: $w_3 = \sqrt{3}e^{i(-\frac{\pi}{2})} = -\sqrt{3}i$

Assim temos que:

$$\begin{aligned} \frac{w_1 \times w_2 - 2}{w_3} &= \frac{1 + \sqrt{3}i - 2}{-\sqrt{3}i} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{-\sqrt{3}i} = \frac{(-1 + \sqrt{3}i) \times i}{-\sqrt{3}i \times i} = \frac{-i + \sqrt{3}i^2}{-\sqrt{3}i^2} = \frac{-i - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}i = \\ &= -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i \end{aligned}$$

Exame – 2005, 2ª fase

$$42. w = \frac{2+i}{1-i} - i = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} - i = \frac{2+2i+i+i^2}{1^2-i^2} - i = \frac{2+3i-1}{1-(-1)} - i = \frac{1+3i}{2} - \frac{2i}{2} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Escrevendo w na f.t. temos $w = \rho e^{i\theta}$, onde:

- $\rho = |w| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$; como $\operatorname{sen} \theta > 0$ e $\operatorname{cos} \theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{4}$

Assim $w = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{\pi}{4})}$

Exame – 2005, 1ª fase



43.

43.1. Como $w^2 = (4 - 3i)(4 - 3i) = 16 - 12i - 12i + 9i^2 = 16 - 24i - 9 = 7 - 24i$

$$2i + \frac{w^2}{i} = 2i + \frac{7 - 24i}{i} = 2i + \frac{(7 - 24i) \times i}{i \times i} = 2i + \frac{7i - 24i^2}{i^2} = 2i + \frac{7i + 24}{-1} = 2i - 7i - 24 = -24 - 5i$$

43.2. Se $\arg(w) = \alpha$ então $w = \rho e^{i\alpha}$, sendo $\rho = |w| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

Assim $\bar{w} = 5e^{i(-\alpha)}$

Como $i = e^{i(\frac{\pi}{2})}$, fazendo o produto na f.t., temos:

$$i \times \bar{w} = e^{i(\frac{\pi}{2})} \times 5e^{i(-\alpha)} = 5e^{i(\frac{\pi}{2} - \alpha)}$$

Exame – 2004, 2ª fase

44. Como $i^{23} = i^{4 \times 5 + 3} = i^3 = -i$ temos que:

$$\begin{aligned} \frac{z_1 + i^{23}}{z_2} &= \frac{-6 + 3i + (-i)}{1 - 2i} = \frac{(-6 + 2i) \times (1 + 2i)}{(1 - 2i) \times (1 + 2i)} = \frac{-6 - 12i + 2i + 4i^2}{1^2 - (2i)^2} = \frac{-6 - 10i - 4}{1 - 4i^2} = \\ &= \frac{-10 - 10i}{1 + 4} = \frac{-10 - 10i}{5} = -2 - 2i \end{aligned}$$

Escrevendo $-2 - 2i$ na f.t. temos $-2 - 2i = \rho e^{i\theta}$, onde:

- $\rho = |-2 - 2i| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{-2}{-2} = 1$; como $\operatorname{sen} \theta < 0$ e $\operatorname{cos} \theta < 0$, θ é um ângulo do 3º quadrante, logo $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Assim $\frac{z_1 + i^{23}}{z_2} = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{4})}$

Exame – 2004, 1ª fase

45. Para que z seja um número real $\arg(z) = 0 \vee \arg(z) = \pi$

$$\text{Assim } \theta - \frac{\pi}{5} = 0 \vee \theta - \frac{\pi}{5} = \pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{5} \vee \theta = \pi + \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{5} \vee \theta = \frac{6\pi}{5}$$

Resposta: **Opção A**

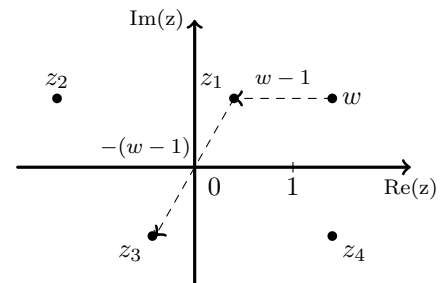
Exame – 2003, Prova para militares

46. Como $\operatorname{Re}(w) > 1$ então $\operatorname{Re}(w - 1) > 0$ e $\operatorname{Im}(w) = \operatorname{Im}(w - 1)$, pelo que é razoável admitir que $w - 1 = z_1$

Como $\operatorname{Re}(z_3) = -\operatorname{Re}(z_1) \wedge \operatorname{Im}(z_3) = -\operatorname{Im}(z_1)$, temos que $z_3 = -z_1$

Assim temos que $z_3 = -z_1 = -(w - 1) = 1 - w$

Resposta: **Opção C**



Exame – 2003, 2ª fase



47. Escrevendo z_1 na f.t. temos $z_1 = \rho e^{i\theta}$, onde:

- $\rho = |z_1| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{-2}{2} = -1$; como $\operatorname{sen} \theta < 0$ e $\operatorname{cos} \theta > 0$, θ é um ângulo do 4º quadrante,
 $\operatorname{logo} \theta = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{6\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

Assim $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{7\pi}{4})}$

Fazendo a divisão na f.t. e escrevendo o quociente na f.a., temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}e^{i(\frac{7\pi}{4})}}{\sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{4})}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{7\pi}{4}-\frac{5\pi}{4})} = 2e^{i(\frac{2\pi}{4})} = 2e^{i(\frac{\pi}{2})} = 2i$$

Exame – 2003, 1ª fase - 1ª chamada

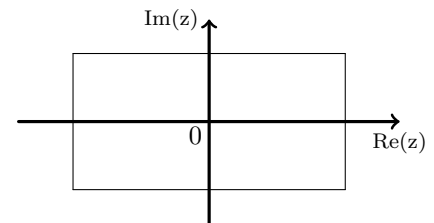
48. Como $-2 < \operatorname{Re}(z) < 2 \wedge -1 < \operatorname{Im}(z) < 1$ e

- $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\bar{z})$
- $\operatorname{Im}(z) = -\operatorname{Im}(\bar{z})$

Temos que, também, $-2 < \operatorname{Re}(\bar{z}) < 2 \wedge -1 < \operatorname{Im}(\bar{z}) < 1$

Logo a imagem geométrica de \bar{z} também pertence ao interior do retângulo.

Resposta: **Opção B**



Exame – 2002, 2ª fase

49. $w = \frac{-1+i}{i} = \frac{(-1+i) \times i}{i \times i} = \frac{-i+i^2}{i^2} = \frac{-1-i}{-1} = 1+i$

Escrevendo w na f.t. temos $w = \rho e^{i\theta}$, onde:

- $\rho = |w| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{1} = 1$; como $\operatorname{sen} \theta > 0$ e $\operatorname{cos} \theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{4}$

Assim $w = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})}$, e por isso:

- $\arg(w) = \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{3} = \arg(z_1)$, pelo que $w \neq z_1$
- $|w| = \sqrt{2} \neq 4 = |z_2|$, pelo que $w \neq z_2$

Exame – 2002, 1ª fase - 2ª chamada

50. Como $i^{23} = i^{4 \times 5 + 3} = i^3 = -i$, temos que:

$$\frac{z_1 + i^{23} + 4}{2 - i} = \frac{1 + i + (-i) + 4}{2 - i} = \frac{5}{2 - i} = \frac{5(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{10 + 5i}{2^2 - i^2} = \frac{10 + 5i}{4 - (-1)} = \frac{10 + 5i}{5} = 2 + i$$

Exame – 2001, Ép. especial



51. Se $w = 2 + i$, então $\frac{1}{w} = \frac{1}{2+i} = \frac{1(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i}{2^2-i^2} = \frac{2-i}{4-(-1)} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$

Escrevendo $\sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4})}$ na f.a., temos que:

$$\sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4})} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -\frac{2}{2} + \frac{2}{2}i = -1 + i$$

Logo $\frac{1}{w} \neq \sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4})}$

Exame – 2001, 2ª fase

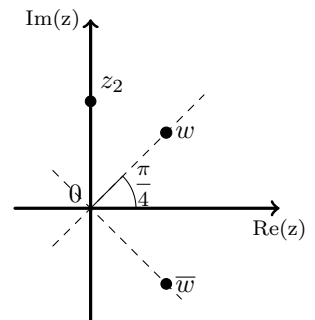
52. Se a imagem geométrica de w está no primeiro quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, então $\arg(w) = \frac{\pi}{4}$, e w é da forma $w = \rho e^{i(\frac{\pi}{4})}$

Assim temos que $\bar{w} = \rho e^{i(-\frac{\pi}{4})}$

Logo

$$\frac{w}{\bar{w}} = \frac{\rho e^{i(\frac{\pi}{4})}}{\rho e^{i(-\frac{\pi}{4})}} = \frac{\rho}{\rho} e^{i(\frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}))} = 1 \times e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4})} = e^{i(\frac{2\pi}{4})} = e^{i(\frac{\pi}{2})}$$

Logo a representação geométrica de $\frac{w}{\bar{w}}$ está sobre a parte positiva do eixo imaginário, como a imagem geométrica de z_2



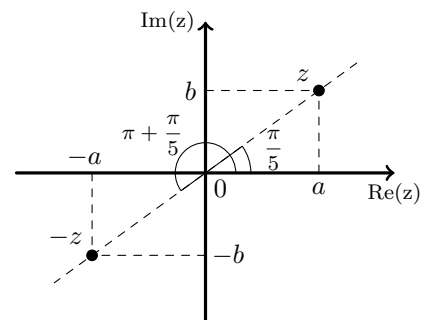
Resposta: **Opção B**

Exame – 2001, 1ª fase - 1ª chamada

53. Se $\arg(z) = \frac{\pi}{5}$, então z tem a imagem geométrica no 1º quadrante.

Se $z = a + bi$, com $a > 0 \wedge b > 0$, então $-z = -a - bi$, com $a > 0 \wedge b > 0$, logo $\arg(-z) = \pi + \frac{\pi}{5}$

Resposta: **Opção B**



Exame – 2000, 1ª fase - 2ª chamada

54. Sabemos que $z \in A$ se $|z| < 1$.

Como $|1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$, sendo $\theta = \arg(1 + \sqrt{3}i)$ podemos escrever $1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\theta}$,

Assim temos que :

$$\frac{1 + \sqrt{3}i}{4e^{i(\frac{\pi}{6})}} = \frac{2e^{i\theta}}{4e^{i(\frac{\pi}{6})}} = \frac{2}{4} e^{i(\theta - \frac{\pi}{6})} = \frac{1}{2} e^{i(\theta - \frac{\pi}{6})}$$

Logo, como $\left| \frac{1 + \sqrt{3}i}{4e^{i(\frac{\pi}{6})}} \right| = \frac{1}{2}$, e $\frac{1}{2} < 1$, podemos afirmar que $\frac{1 + \sqrt{3}i}{4e^{i(\frac{\pi}{6})}}$ pertence ao conjunto A .

Exame – 2000, 1ª fase - 1ª chamada

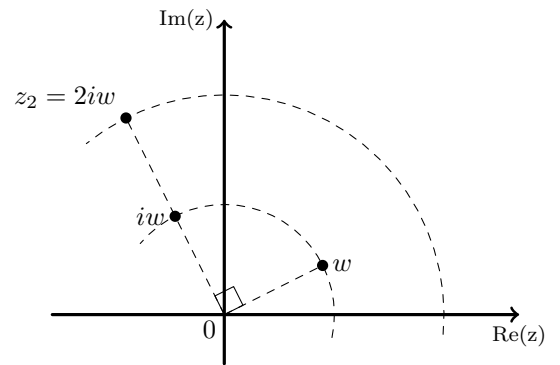


55. A operação "multiplicar por i " corresponde geometricamente a "fazer uma rotação de centro em O e amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos" pelo que a imagem geométrica de iw , está sobre a circunferência de centro na origem que contem w .

A operação "multiplicar por 2" corresponde a duplicar a distância à origem, mantendo o ângulo que com o sei-eixo real positivo.

Assim temos que $2iw = z_2$

Resposta: **Opção B**



Exame – 2000, Prova modelo