



1. Como  $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{7}$ , considerando  $\rho = |z|$ , temos que  $z = \rho e^{i\frac{\pi}{7}}$ .

Como  $2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ , então:

$$2iz = 2i \times z = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \times \rho e^{i\frac{\pi}{7}} = 2\rho e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7})} = 2\rho e^{i(\frac{7\pi}{14} + \frac{2\pi}{14})} = 2\rho e^{i\frac{9\pi}{14}}$$

Ou seja,  $\text{Arg}(2iz) = \frac{9\pi}{14}$ .

Resposta: **Opção B**

Exame – 2023, Ép. especial

2. Como  $\text{Im}(z) = \text{Re}(z)$ , e  $\text{Re}(z) > 0$ , então o afixo de  $z$  é um ponto do primeiro quadrante que pertence à bissetriz dos quadrante ímpares, ou seja,  $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$

Como  $\widehat{AOB} = \frac{5\pi}{8}$ , então  $\text{Arg}(w) = \text{Arg}(z) + \widehat{AOB} = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{8} = \frac{2\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$

Logo, temos que:

$$\text{Arg}(w \times z) = \text{Arg}(w) + \text{Arg}(z) = \frac{7\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{8} + \frac{2\pi}{8} = \frac{9\pi}{8}$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2023, 1.ª Fase

3. Como  $z = ee^{ie}$ , temos que:

- $|z| = e$ , pelo que o afixo de  $z$  é um ponto pertencente à circunferência de centro na origem e raio  $e$
- $\text{Arg}(z) = e$ , como  $e \approx 2,7$  temos que  $\pi < \text{Arg}(z) < \frac{\pi}{2}$ , pelo que o afixo de  $z$  é um ponto do 2.º quadrante.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2022, Ép. especial

4. Como  $\text{Im}(w) = -\text{Re}(w)$ , então  $w$  é um número complexo da forma  $\rho e^{i(-\frac{\pi}{4})}$  e como  $\text{Re}(w) > 1$ , então  $\rho > 1$

Assim, como  $-i = e^{i(\frac{3\pi}{2})}$  temos que:

$$-iw^2 = e^{i(\frac{3\pi}{2})} \times \left(\rho e^{i(-\frac{\pi}{4})}\right)^2 = e^{i\pi} \times \rho e^{i(-\frac{\pi}{4})} \times \rho e^{i(-\frac{\pi}{4})} = (1 \times \rho \times \rho) e^{i(\frac{3\pi}{2} + (-\frac{\pi}{4}) + (-\frac{\pi}{4}))} = \rho^2 e^{i(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2})} = \rho^2 e^{i\pi}$$

Como  $\rho > 1$  então  $\rho^2 > \rho$ , então o afixo de  $iw^2$  deve estar a uma distância da origem superior ao afixo de  $w$ , e como o afixo pertence ao semieixo real positivo (porque  $\text{Arg}(-iw^2) = \pi$ ), o ponto  $C$  é o único que pode representar o afixo de  $-iw^2$ .

Resposta: **Opção C**

Exame – 2022, 1.ª Fase

5. Escrevendo  $z_1$  e  $z_2$  na forma algébrica, com o objetivo de fazer a adição, temos:

- $z_1 = e^{i\theta} = \cos \theta + i \text{sen } \theta$
- $z_2 = 2e^{i(\theta+\pi)} = 2(\cos(\theta + \pi) + i \text{sen}(\theta + \pi)) = 2(-\cos \theta + i(-\text{sen } \theta)) = -2 \cos \theta - 2i \text{sen } \theta$

E assim, vem que:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= e^{i\theta} = \cos \theta + i \text{sen } \theta + (-2 \cos \theta - 2i \text{sen } \theta) = \cos \theta - 2 \cos \theta + i \text{sen } \theta - 2i \text{sen } \theta = \\ &= -\cos \theta - i \text{sen } \theta = -(\cos \theta + i \text{sen } \theta) = -z_1 \end{aligned}$$

Assim, temos que:

$$\arg(z_1 + z_2) = \arg(-z_1) = \pi + \theta$$

E como  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , o afixo do número complexo  $z_1 + z_2$  pertence ao 3.º quadrante.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2021, Ép. especial

6. Como  $z \times w = i \Leftrightarrow w = \frac{i}{z}$ , logo temos que uma expressão do número complexo  $w$ , é:

$$w = \frac{i}{z} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\frac{3\pi}{5}}} = \frac{1}{2} e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{5})} = \frac{1}{2} e^{i(\frac{5\pi}{10} - \frac{6\pi}{10})} = \frac{1}{2} e^{i(-\frac{\pi}{10})}$$

Assim, como  $\arg(w) = -\frac{\pi}{10}$ , temos que  $-\frac{\pi}{10} + 2\pi$  também é um argumento do número complexo  $w$ , ou seja:

$$\arg(w) = -\frac{\pi}{10} + 2\pi = -\frac{\pi}{10} + \frac{20\pi}{10} = \frac{19\pi}{10}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2021, 2.ª Fase



7. Calculando o produto  $z_1 \times z_2$ , vem:

$$z_1 \times z_2 = (-3 + 2i) \times (1 + 2i) = -3 - 6i + 2i + 4i^2 = -3 - 4i + 4(-1) = -3 - 4i - 4 = -7 - 4i$$

Simplificando a expressão de  $w$ , temos:

$$w = \frac{z_1 \times z_2}{z_3} = \frac{-7 - 4i}{2 - i} = \frac{(-7 - 4i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{-14 - 7i - 8i - 4i^2}{2^2 - i^2} = \frac{-14 + 4 - 15i}{4 + 1} = \frac{-10 - 15i}{5} = -2 - 3i$$

Desta forma, considerando  $\theta = \arg(w)$  temos que:

- $|w| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$ ; como  $\operatorname{sen} \theta < 0$  e  $\operatorname{cos} \theta < 0$ ,  $\theta$  é um ângulo do 3º quadrante.
- Como  $\operatorname{tg} \left( -\frac{3\pi}{4} \right) = 1$ , a função tangente é crescente e contínua no intervalo  $\left] -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right[$  e  $\frac{3}{2} > 1$  então  $\theta > -\frac{3\pi}{4}$
- Como  $\theta$  é um ângulo do 3º quadrante e  $\theta > -\frac{3\pi}{4}$ , então  $\arg(w) \in \left] -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right[$

Exame – 2021, 1.ª Fase

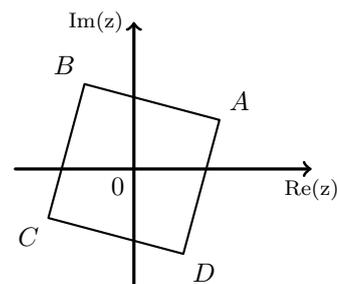
8. Como os pontos  $A$  e  $C$  são equidistantes da origem e o respetivo ponto médio é a origem, temos que são afijos de números complexos simétricos, ou seja,  $z_1 = -z_3$  (alternativamente podemos verificar que  $-z_1 = z_1 \times i^2 = z_1 \times i \times i = z_2 \times i = z_3$ )

De forma análoga temos que os pontos  $B$  e  $D$  são afijos de números complexos simétricos, ou seja,  $z_2 = -z_4$

Assim, temos que

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = z_1 + z_2 - z_1 - z_2 = 0$$

Resposta: **Opção A**



Exame – 2019, Ép. especial



9. Considerando  $\overline{AB} = \rho$  e o ângulo definido pelo semieixo positivo horizontal e a reta  $AD$  com amplitude  $\theta$ , temos que  $z = \rho e^{i\theta}$

Como  $[ABCD]$  é um quadrado, a diagonal  $\overline{BD} = \rho\sqrt{2}$  e  $\widehat{ADB} = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$ , pelo que o ângulo definido pelo semieixo positivo horizontal e a reta  $BD$  tem amplitude  $\theta + \frac{\pi}{4}$ . Assim, temos que o ponto  $B$  é o afixo do número complexo

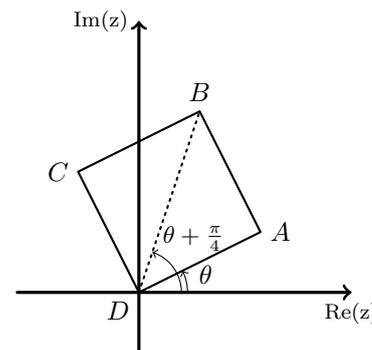
$$w = \rho\sqrt{2}e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}$$

Decompondo o número complexo num produto de dois números complexos, vem que:

$$w = \rho\sqrt{2}e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})} = \rho e^{i\theta} \times \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})} = z \times \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = z \times \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = z(1+i)$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2019, 2.ª Fase



10. Como  $z = -1 + 2i$ , temos que  $\bar{z} = -1 - 2i$

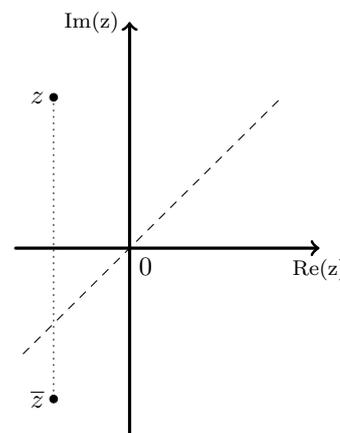
Como  $\text{Re}(z) < 0$  e  $\text{Im}(z) < 0$ , temos que  $\theta$  é um ângulo do 3.º quadrante, ou seja,  $\theta \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$ , pelo que  $\theta < \frac{3\pi}{2}$

Por outro lado, como  $\text{tg } \theta = \frac{-2}{-1} = 2$ , ou seja,  $\text{tg } \theta > 1$ , temos que  $\theta > \frac{5\pi}{4}$

Assim, vem que:

$$\theta \in \left] \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[$$

Resposta: **Opção D**



Exame – 2019, 1.ª Fase

11. Sabemos que, como  $i^0 + i^1 + i^2 + i^3 = 1 + i - 1 - i = 0$  e como  $i^n = i^{n+4} (\forall n \in \mathbb{N})$ , então a soma de quaisquer quatro parcelas consecutivas é nula.

O valor pedido é a soma de 2019 parcelas (porque inclui  $i^0$ ), pelo que, como  $2019 = 4 \times 504 + 3$ , temos que:

$$i^0 + i^1 + i^2 + \underbrace{i^3 + i^4 + i^5 + i^6}_{0} + \dots + \underbrace{i^{2017} + i^{2016} + i^{2017} + i^{2018}}_{0} = i^0 + i^1 + i^2 = 1 + i - 1 = i$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2018, Ép. especial



12. Simplificando a expressão de  $z$ , como  $i^{15} = i^{4 \times 3 + 3} = i^3 = -i$ , temos que:

$$\begin{aligned} z &= \frac{(2-i)^2 + 1 + i}{1-2i} + 3i^{15} = \frac{4 - 2 \times 2i + i^2 + 1 + i}{1-2i} + 3(-i) = \frac{4 - 4i - 1 + 1 + i}{1-2i} - 3i = \\ &= \frac{4 - 3i}{1-2i} - 3i = \frac{(4-3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} - 3i = \frac{4 + 8i - 3i - 6i^2}{1+2i-2i-4i^2} - 3i = \frac{4 + 5i - 6(-1)}{1-4(-1)} - 3i = \\ &= \frac{4 + 5i + 6}{1+4} - 3i = \frac{10 + 5i}{5} - 3i = 2 + i - 3i = 2 - 2i \end{aligned}$$

Assim, vem que  $\bar{z} = 2 + 2i$ , pelo que:

$$-\frac{1}{2} \times \bar{z} = -\frac{1}{2} \times (2 + 2i) = -1 - i$$

Escrevendo  $-\frac{1}{2} \times \bar{z}$  na forma trigonométrica ( $\rho e^{i\theta}$ ) temos:

- $\rho = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

- $\operatorname{tg} \theta = \frac{-1}{-1} = 1$ ; como  $\operatorname{sen} \theta < 0$  e  $\operatorname{cos} \theta < 0$ ,  $\theta$  é um ângulo do 3º quadrante, logo  $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

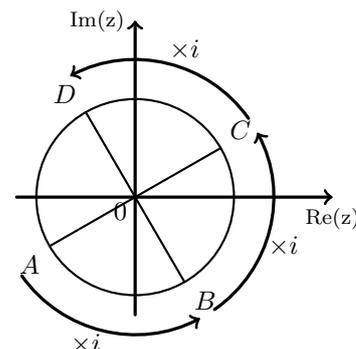
Assim  $-\frac{1}{2} \times \bar{z} = \sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{4})}$

Exame – 2018, 2.ª Fase

13. Como a multiplicação de um número complexo por  $i$  corresponde a uma rotação de  $\frac{\pi}{2}$  rad da imagem geométrica desse número complexo, temos que:

- $B$  é a imagem geométrica de  $iz$
- $C$  é a imagem geométrica de  $i \times i \times z = i^2 z$
- $D$  é a imagem geométrica de  $i \times i \times i \times z = i^3 z$

Resposta: **Opção D**



Exame – 2017, Ép. especial

14. Temos que:

- os argumentos dos complexos  $z$  e  $5z$  são iguais

$$\arg(5z) = \arg(z) = \frac{\pi}{5}$$

- os argumentos de complexos simétricos,  $-5z$  e  $5z$ , diferem de  $\pi$

$$\arg(-5z) = \arg(5z) - \pi = \frac{\pi}{5} - \pi = -\frac{4\pi}{5}$$

- a multiplicação por  $i$  de um complexo corresponde a somar  $\frac{\pi}{2}$  ao seu argumento

$$\arg(-5iz) = \arg(-5z) + \frac{\pi}{2} = -\frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{10} + \frac{5\pi}{10} = -\frac{3\pi}{10}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2017, 2.ª Fase



15. Escrevendo o número complexo  $-3$  na forma trigonométrica, vem  $-3 = 3e^{i(-\pi)}$   
Desta forma, temos que:

$$z = -3e^{i\theta} = 3e^{i(-\pi)} \times e^{i\theta} = 3e^{i(-\pi+\theta)} = 3e^{i(\theta-\pi)}$$

Logo, como  $\theta \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$ , então  $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ , pelo que:

$$\pi - \pi < \theta - \pi < \frac{3\pi}{2} - \pi \Leftrightarrow 0 < \theta - \pi < \frac{\pi}{2}$$

Ou seja,  $\arg(z) \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ , logo a imagem geométrica do número complexo  $z$  é um ponto do primeiro quadrante.

Resposta: **Opção A**

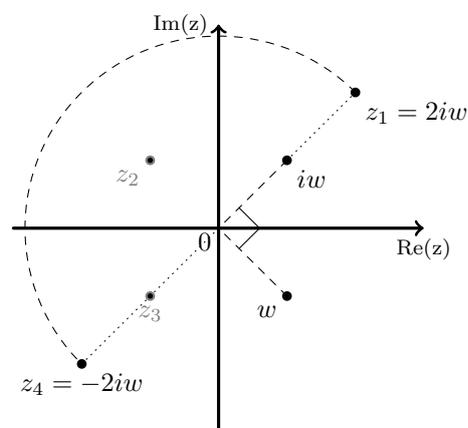
Exame – 2016, 1.ª Fase

16. A operação "multiplicar por  $i$ " corresponde a "fazer uma rotação de centro em  $O$  e amplitude  $\frac{\pi}{2}$  radianos", pelo que a imagem geométrica de  $iw$  está no primeiro quadrante a igual distância da origem do que a imagem geométrica de  $w$

A operação "multiplicar por 2" corresponde a "fazer duplicar a distância à origem, mantendo o argumento do número complexo", pelo que  $2iw = z_1$

Finalmente, a imagem geométrica de um número complexo, e do seu simétrico correspondem a rotações de centro em  $O$  e amplitude  $\pi$  radianos, pelo que  $-2iw = z_4$

Resposta: **Opção D**



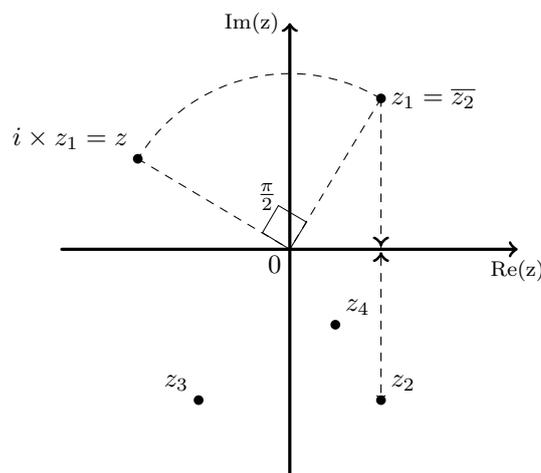
Exame – 2014, Ép. especial

17. As operações "multiplicar por  $i$ " e "transformar no conjugado" correspondem geometricamente a "fazer uma rotação de centro em  $O$  e amplitude  $\frac{\pi}{2}$  radianos" e "encontrar o ponto simétrico relativamente ao eixo real", respetivamente.

Assim, se considerarmos as operações inversas, pela ordem inversa, a partir da imagem geométrica de  $z$ , (como indicado na figura), obtemos como resposta a imagem geométrica de  $z_2$ .

Ou, dizendo de outra forma, se  $w = z_2$ , temos que  $\bar{w} = \bar{z}_2 = z_1$  e  $i \times \bar{w} = i \times z_1 = z$ , pelo que  $w = z_2$ .

Resposta: **Opção C**



Exame – 2013, Ép. especial



18. Se  $z = 2 + bi$ , então  $\bar{z} = 2 - bi$

Assim temos  $\operatorname{Re}(\bar{z}) > 0$  e como  $b < 0$ ,  $\operatorname{Im}(\bar{z}) > 0$ , pelo que sabemos que a representação geométrica de  $\bar{z}$  pertence ao primeiro quadrante, logo  $\arg(\bar{z})$  não pode ser  $-\alpha$

Por outro lado  $|\bar{z}| = \sqrt{2^2 + b^2}$ , como  $b^2 > 0$ , temos que  $|\bar{z}| > 2$ , logo  $|\bar{z}|$  não pode ser  $\frac{3}{2}$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2013, 2.ª Fase

19.

$$\begin{aligned} \frac{\cos(\pi - \alpha) + i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha} &= \frac{\cos(\pi - \alpha) + i \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha} && \text{Porque } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen} \alpha \\ &= \frac{\cos(\pi - \alpha) + i \operatorname{sen}(\pi - \alpha)}{\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha} && \text{Porque } \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(\pi - \alpha) \\ &= \frac{e^{i(\pi - \alpha)}}{e^{i\alpha}} && \\ &= e^{i(\pi - \alpha - \alpha)} && \text{Fazendo a divisão na forma trigonométrica} \\ &= e^{i(\pi - 2\alpha)} && \text{Como queríamos mostrar} \end{aligned}$$

Exame – 2013, 2.ª Fase

20. Temos que:  $|z| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$   
e sabemos que  $\arg(z) = \alpha$ , pelo que podemos escrever que  $z = 10e^{i\alpha}$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} w &= \frac{-i \times z^2}{\bar{z}} && \text{(do enunciado)} \\ &= \frac{-i \times 10^2 e^{i(2\alpha)}}{10 e^{i(-\alpha)}} && \text{(calculado } z^2 \text{ e escrevendo } \bar{z} \text{ na f.t.)} \\ &= -i \times 10 e^{i(2\alpha - (-\alpha))} && \text{(fazendo a divisão na f.t.)} \\ &= e^{i(-\frac{\pi}{2})} \times 10 e^{i(3\alpha)} && \text{(escrevendo } -i \text{ na f.t.)} \\ &= 10 e^{i(-\frac{\pi}{2} + 3\alpha)} && \text{(fazendo o produto na f.t.)} \\ &= 10 e^{i(3\alpha - \frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2013, 1.ª Fase



21. Sabemos que  $i^0 = 1$ ,  $i^1 = i$ ,  $i^2 = -1$  e  $i^3 = -i$ , e que é válida a igualdade  $i^n = i^k$ , onde  $k$  é o resto da divisão inteira de  $n$  por 4.

Assim,

- como  $8n = 4 \times 2n + 0$ , temos que  $i^{8n} = i^0 = 1$
- como  $8n - 1 = 8n - 4 + 3 = 4(2n - 1) + 3$  temos que  $i^{8n-1} = i^3 = -i$
- como  $8n - 2 = 8n - 4 + 2 = 4(2n - 1) + 2$  temos que  $i^{8n-2} = i^2 = -1$

Temos que  $i^{8n} \times i^{8n-1} + i^{8n-2} = i^0 \times i^3 + i^2 = 1 \times (-i) + (-1) = -i - 1$

Logo a imagem geométrica de  $i^{8n} \times i^{8n-1} + i^{8n-2}$  pertence ao terceiro quadrante.

Resposta: **Opção C**

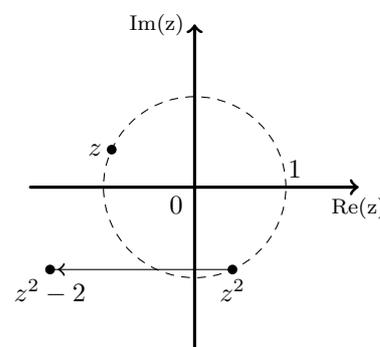
Exame – 2013, 1.ª Fase

22. Como  $z = e^{i\theta}$ , então  $z^2 = e^{i(2\theta)}$ .

Como  $\frac{3\pi}{4} < \theta < \pi$ , então  $2 \times \frac{3\pi}{4} < 2\theta < 2 \times \pi$ , ou seja  $2\theta \in \left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right[$

Logo  $z^2$  pertence ao 4.º quadrante e  $|z^2| = 1$ , ou seja  $z^2$  é da forma  $a + bi$ , com  $0 < a < 1$  e  $-1 < b < 0$ .

Assim  $z^2 - 2 = (a - 2) + bi$ , em que  $a - 2 < 0$  e  $b < 0$ , pelo que  $z^2 - 2$  pertence ao 3.º quadrante.



Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2013

23. Sabemos que  $i^6 = i^2 = -1$  e que  $i^7 = i^3 = -i$ .

$$\text{Logo } \frac{i^6 + 2i^7}{2 - i} = \frac{-1 + 2(-i)}{2 - i} = \frac{(-1 - 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{-2 - i - 4i - 2i^2}{2^2 - i^2} = \frac{-2 - 5i + 2}{4 + 1} = \frac{-5i}{5} = -i$$

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2013

24. Se  $z$  e  $w$  são inversos um do outro, temos que  $\frac{1}{z} = w$

$$\text{Por um lado } \frac{1}{z} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-i}{1^2 - i^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Por outro lado, como  $11 = 4 \times 2 + 3$ , sabemos que  $i^{11} = i^3 = -i$  e assim  $w = (k-1) + 2pi^{11} = (k-1) + 2p(-i) = (k-1) - (2p)i$

$$\text{Como } \frac{1}{z} = w \text{ temos que } \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = (k-1) - (2p)i$$

$$\text{Logo } \frac{1}{2} = k-1 \wedge \frac{1}{2} = 2p \Leftrightarrow \frac{1}{2} + 1 = k \wedge \frac{1}{4} = p \Leftrightarrow \frac{3}{2} = k \wedge \frac{1}{4} = p$$

$$\text{Assim temos que } k+p = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{6}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2012, Ép. especial



25. Como  $\overline{z_2} = 3 + ki$  temos:

$$z_1 \times \overline{z_2} = (2 + i)(3 + ki) = 6 + 2ki + 3i + ki^2 = 6 - 1 \times k + i(2k + 3) = (6 - k) + (2k + 3)i$$

Para que  $z_1 \times \overline{z_2}$  seja um imaginário puro  $\text{Re}(z_1 \times \overline{z_2}) = 0$

$$\text{Logo } 6 - k = 0 \Leftrightarrow 6 = k$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2012, 2.ª Fase

26. Sabemos que  $i^0 = 1$ ,  $i^1 = i$ ,  $i^2 = -1$  e  $i^3 = -i$ , e que é válida a igualdade  $i^n = i^k$ , onde  $k$  é o resto da divisão inteira de  $n$  por 4.

Assim, como  $4n - 6 = 4n - 8 + 2 = 4(n - 2) + 2$  temos que  $i^{4n-6} = i^2 = -1$

Devemos escrever  $2e^{i(-\frac{\pi}{6})}$  na f.a. para podermos somar as parcelas do numerador:

$$2e^{i(-\frac{\pi}{6})} = 2 \left( \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

Assim temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3} \times i^{4n-6} + 2e^{i(-\frac{\pi}{6})}}{2e^{i(\frac{\pi}{5})}} &= \frac{\sqrt{3} \times (-1) + 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)}{2e^{i(\frac{\pi}{5})}} = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3} - \frac{2}{2}i}{2e^{i(\frac{\pi}{5})}} = \frac{-i}{2e^{i(\frac{\pi}{5})}} = \\ &= \frac{e^{i(-\frac{\pi}{2})}}{2e^{i(\frac{\pi}{5})}} = \frac{1}{2}e^{i(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5})} = \frac{1}{2}e^{i(-\frac{7\pi}{10})} = \frac{1}{2}e^{i(\frac{13\pi}{10})} \end{aligned}$$

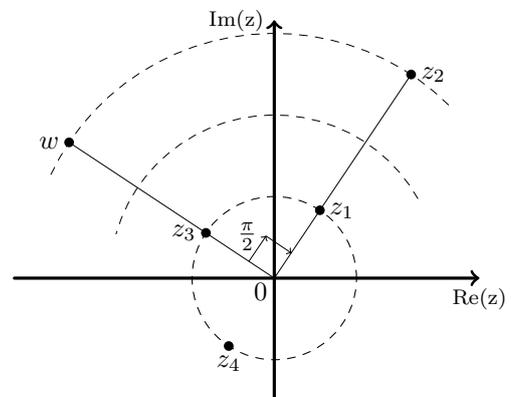
Exame – 2012, 2.ª Fase

27. As operações "dividir por  $i$ " e "dividir por 3" correspondem geometricamente a "fazer uma rotação de centro em  $O$  e amplitude  $-\frac{\pi}{2}$  radianos" e "dividir a distância ao centro por 3", respetivamente.

Assim, podemos fazer as operações por qualquer ordem e, por isso, temos duas alternativas:

- $\frac{w}{i} = z_2$  e  $\frac{z_2}{3} = z_1$ , ou então
- $\frac{w}{3} = z_3$  e  $\frac{z_3}{i} = z_1$

Resposta: **Opção A**



Exame – 2012, 1.ª Fase

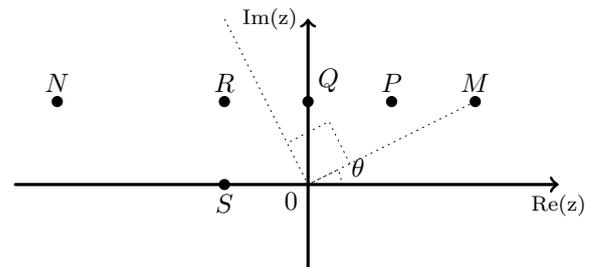


28. Como o ponto  $M$  é a imagem geométrica do número complexo  $z_1$  que vamos designar por  $z_1 = \rho_1 e^{i\theta}$ , em que  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$  porque  $M$  é um ponto do primeiro quadrante e  $\text{Re}(z_1) > \text{Im}(z_1)$ .

- Podemos excluir o ponto da opção (D), o ponto  $S$  porque é a imagem geométrica de um número complexo  $z$  da forma  $z = \rho_3 e^{i\pi}$ , e assim,  $z_1 \times z = (\rho_1 \rho_3) e^{i(\pi+\theta)}$ ; e como  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$  então a imagem geométrica de  $z_1 \times z$  seria um ponto do 3º quadrante e não o ponto  $N$
- Podemos excluir o ponto da opção (B), o ponto  $Q$  porque é a imagem geométrica de um número complexo  $z$  da forma  $z = \rho_4 e^{i(\frac{\pi}{2})}$ , e assim,  $z_1 \times z = (\rho_1 \rho_4) e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$ ; ou seja a imagem geométrica de  $z_1 \times z$  seria um ponto sobre a reta perpendicular a à reta  $OM$  pelo ponto  $O$  e não o ponto  $N$
- Podemos excluir o ponto da opção (A), o ponto  $P$  porque é a imagem geométrica de um número complexo  $z$  da forma  $z = \rho_5 e^{i\alpha}$ , e assim,  $z_1 \times z = (\rho_1 \rho_5) e^{i(\theta+\alpha)}$ ; e como  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ , então a imagem geométrica de  $z_1 \times z$  seria um ponto do quadrante definido pela reta  $OM$  e pela perpendicular pelo ponto  $O$  e não o ponto  $N$

Logo o ponto  $R$  é o único, de entre as opções apresentadas, que pode ser a imagem geométrica do número complexo  $z_2$

Resposta: **Opção C**



Exame – 2011, Prova especial

29. Para que  $z_1$  seja igual ao conjugado de  $z_2$ , tem que se verificar a condição  $\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) \wedge \text{Im}(z_1) = -\text{Im}(z_2)$

Logo:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) \\ \text{Im}(z_1) = -\text{Im}(z_2) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3k + 2 = 3p - 4 \\ p = -(2 - 5k) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k + 6 = 3p \\ p = 5k - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 2 = p \\ k + 2 = 5k - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} k + 2 = p \\ 2 + 2 = 5k - k \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} k + 2 = p \\ 4 = 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2 = p \\ 1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = p \\ 1 = k \end{cases} \end{aligned}$$

Resposta: **Opção B**

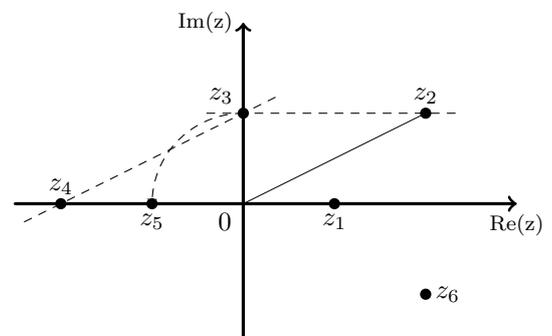
Exame – 2011, Ép. especial

30. Pela observação da figura podemos adicionar geometricamente os afixos de  $z_2$  e de  $z_4$  e temos que  $z_2 + z_4 = z_3$

A operação "multiplicar por  $i$ " corresponde geometricamente a "fazer uma rotação de centro em  $O$  e amplitude  $\frac{\pi}{2}$ ", pelo que  $z_3 \times i = z_5$ .

Logo  $(z_2 + z_4) \times i = z_3 \times i = z_5$ .

Resposta: **Opção C**



Exame – 2011, 2.ª Fase



31. Sabemos que  $i^0 = 1$ ,  $i^1 = i$ ,  $i^2 = -1$  e  $i^3 = -i$ , e que é válida a igualdade  $i^n = i^k$ , onde  $k$  é o resto da divisão inteira de  $n$  por 4.

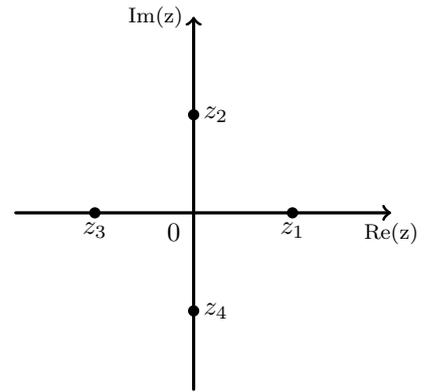
Assim,

- como  $4n = 4 \times n + 0$ , temos que  $i^{4n} = i^0 = 1$
- como  $4n + 1 = 4 \times n + 1$  temos que  $i^{4n+1} = i^1 = i$
- como  $4n + 2 = 4 \times n + 2$  temos que  $i^{4n+2} = i^2 = -1$

Assim temos que:

$i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} = 1 + i - 1 = i$ , pelo que, de acordo com a figura, temos que  $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} = z_2$

Resposta: **Opção B**



Exame – 2011, 1.ª Fase

32. Designando por  $w$ ,  $z_1$  e  $z_2$  os números complexos cujas imagens geométricas são os pontos  $B$ ,  $A$  e  $C$ , respetivamente, temos que

- $|w| = |z_1|$ , porque os pontos  $A$  e  $B$  estão à mesma distância da origem; logo

$$|w| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

- $\arg(w) = \arg(z_2) - \frac{\pi}{9}$ , como  $\arg(z_2) = \frac{3\pi}{2}$ , temos que

$$\arg(w) = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{9} = \frac{27\pi}{18} - \frac{2\pi}{18} = \frac{25\pi}{18}$$

Assim temos que  $w = 5e^{i(\frac{25\pi}{18})}$

Resposta: **Opção B**

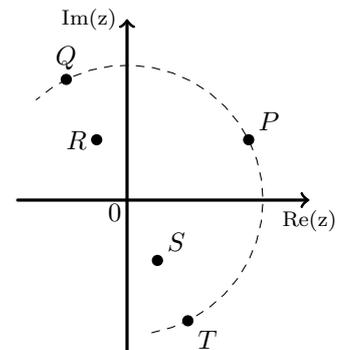
Teste Intermédio 12.º ano – 26.05.2011

33. A operação "multiplicar por  $i$ " corresponde geometricamente a "fazer uma rotação de centro em  $O$  e amplitude  $\frac{\pi}{2}$  radianos".

Assim temos que  $i \times z = w$ , sendo  $w$  o número complexo que tem por imagem geométrica o ponto  $Q$ .

Logo  $-i \times z = -w$ , ou seja o número complexo que tem por imagem geométrica o ponto  $T$ .

Resposta: **Opção D**



Exame – 2010, Ép. especial



34.  $z$  é um imaginário puro, se  $\arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Assim temos que:

$$\frac{\pi}{8} - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} - k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{8} - \frac{4\pi}{8} - k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = -\frac{3\pi}{8} - k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo valores a  $k$ , temos:

- Se  $k = 0$ ,  $\theta = -\frac{3\pi}{8}$
- Se  $k = -1$ ,  $\theta = -\frac{3\pi}{8} + \pi = -\frac{3\pi}{8} + \frac{8\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2010, 1.ª Fase

35. Como

- $i^6 = i^{4+2} = i^2 = -1$
- $i^7 = i^{4+3} = i^3 = -i$
- $(1 + 2i)(3 + i) = 3 + i + 6i + 2i^2 = 3 + 2(-1) + 7i = 1 + 7i$

Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{(1 + 2i)(3 + i) - i^6 + i^7}{3i} &= \frac{1 + 7i - (-1) - i}{3i} = \frac{2 + 6i}{3i} = \frac{(2 + 6i) \times i}{3i \times i} = \frac{2i + 6i^2}{3i^2} = \frac{2i - 6}{-3} = \frac{-6}{-3} + \frac{2i}{-3} = \\ &= 2 - \frac{2}{3}i \end{aligned}$$

Teste Intermédio 12.º ano – 19.05.2010

36. Como  $i = e^{i(\frac{\pi}{2})}$ , podemos fazer a multiplicação na forma trigonométrica:

$$z = i.e^{i\theta} = e^{i(\frac{\pi}{2})} \times e^{i\theta} = e^{i(\frac{\pi}{2} + \theta)}$$

Assim o conjugado de  $z$  é:

$$\bar{z} = e^{i(-(\frac{\pi}{2} + \theta))} = e^{i(-\frac{\pi}{2} - \theta)}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2009, Ép. especial

37. Temos que  $i^{43} = i^{4 \times 10 + 3} = i^3 = -i$

Calculando  $z_1^2$  temos:  $z_1^2 = (3 - 2i)^2 = 3^2 - 2 \times 3(2i) + (2i)^2 = 9 - 12i + 4i^2 = 9 - 4 - 12i = 5 - 12i$

Como  $8e^{i(\frac{3\pi}{2})} = -8i$ , calculando  $z$  na forma algébrica, temos:

$$\begin{aligned} z &= \frac{z_1 + z_1^2 + 2i^{43}}{8e^{i(\frac{3\pi}{2})}} = \frac{(3 - 2i) + (5 - 12i) + 2(-i)}{-8i} = \frac{8 - 16i}{-8i} = \frac{1 - 2i}{-i} = \\ &= \frac{(1 - 2i) \times i}{-i \times i} = \frac{i - 2i^2}{-i^2} = \frac{i - 2(-1)}{-(-1)} = 2 + i \end{aligned}$$

Exame – 2009, Ép. especial



38. Se  $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$  então  $\arg(\bar{z}) = -\frac{\pi}{3}$

Escrevendo  $2i$  na f.t. temos  $2i = 2e^{i(\frac{\pi}{2})}$

Assim, sendo  $\rho = |z|$  (e por isso também  $\rho = |\bar{z}|$ ) e fazendo a divisão na f.t. temos que:

$$\frac{2i}{\bar{z}} = \frac{2e^{i(\frac{\pi}{2})}}{\rho e^{i(-\frac{\pi}{3})}} = \frac{2}{\rho} e^{i(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{3}))} = \frac{2}{\rho} e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})} = \frac{2}{\rho} e^{i(\frac{3\pi}{6} + \frac{2\pi}{6})} = \frac{2}{\rho} e^{i(\frac{5\pi}{6})}$$

Logo  $\arg\left(\frac{2i}{\bar{z}}\right) = \frac{5}{6}\pi$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2009, 1.ª Fase

39. Como  $i^{18} = i^{4 \times 4 + 2} = i^2 = -1$ , temos que:

$$z_1 = \frac{i}{1-i} - i^{18} = \frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} - (-1) = \frac{i+i^2}{1^2-i^2} + 1 = \frac{-1+i}{1+1} + 1 = \frac{-1+i}{2} + 1 = \frac{-1+i}{2} + \frac{2}{2} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Escrevendo  $z_1$  na f.t. temos  $z_1 = \rho e^{i\theta}$ , onde:

- $\rho = |z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- $\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$ ; como  $\operatorname{sen} \theta > 0$  e  $\operatorname{cos} \theta > 0$ ,  $\theta$  é um ângulo do 1.º quadrante, logo  $\theta = \frac{\pi}{4}$

Logo  $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{\pi}{4})}$

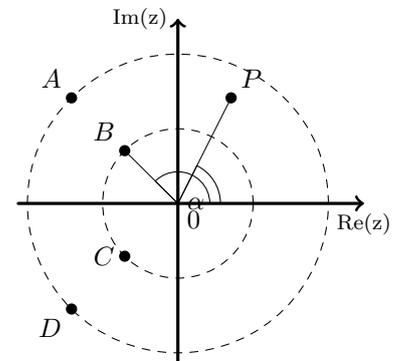
Exame – 2009, 1.ª Fase

40. A imagem geométrica do número complexo  $\frac{\rho}{2} e^{i(2\alpha)}$  é um número complexo  $w$  tal que:

- $|w| = \frac{|z|}{2}$  (apenas os pontos  $B$  e  $C$  verificam esta condição)
- $\arg(w) = 2 \times \arg(z)$  (apenas os pontos  $A$  e  $B$  verificam esta condição)

Assim o ponto  $B$  é a imagem geométrica de  $\frac{\rho}{2} e^{i(2\alpha)}$

Resposta: **Opção B**



Teste Intermédio 12.º ano – 27.05.2009

41. Como  $i^{35} = i^{8 \times 4 + 3} = i^3 = -i$ , e

$$(2+i)^2 = (2+i)(2+i) = 4 + 2i + 2i + i^2 = 4 - 1 + 4i = 3 + 4i$$

temos que:

$$\frac{(2+i)^2 + 1 + 6i^{35}}{1+2i} = \frac{3+4i+1+6(-i)}{1+2i} = \frac{3+1+4i-6i}{1+2i} = \frac{4-2i}{1+2i} = \frac{(4-2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} =$$

$$= \frac{4-8i-2i+4i^2}{1^2-4i^2} = \frac{4-4-10i}{1+4} = \frac{-10i}{5} = -2i$$

Teste Intermédio 12.º ano – 27.05.2009



42. Como  $e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = i$ , temos que:

$$z_1 = (1 - i) \cdot (1 + i) = 1^2 - i^2 = 1 + 1 = 2$$

Na f.t.:  $z_1 = 2e^{i \times 0}$

Fazendo a divisão na f.t.:

$$w = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i \times 0}}{8e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} = \frac{2}{8}e^{i\left(0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} = \frac{1}{4}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

Exame – 2008, Ép. especial

43. Os números complexos  $z$  e  $-z$ , têm argumentos que diferem de  $\pi$  radianos, logo, temos que:

$$\arg(-z) = \pi + \arg(z) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2008, 2.ª Fase

44. Como  $i^{18} = i^{4 \times 2 + 2} = (i^2)^4 \times i^2 = (-1)^4 \times (-1) = -1$ , temos que:

$$\begin{aligned} \frac{2z_1 - i^{18} - 3}{1 - 2i} &= \frac{2(1 - i) - (-1) - 3}{1 - 2i} = \frac{2 - 2i + 1 - 3}{1 - 2i} = \frac{-2i}{1 - 2i} = \frac{-2i(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{-2i - 4i^2}{1^2 - (2i)^2} = \\ &= \frac{-2i + 4}{1 + 4} = \frac{4 - 2i}{5} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i \end{aligned}$$

Exame – 2008, 2.ª Fase

45. O número complexo  $3i$  tem a sua representação geométrica sobre a parte positiva do eixo imaginário, pelo que define um ângulo de  $\frac{\pi}{2}$  radianos com o semieixo real positivo, logo  $\arg(z) = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\pi$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2008, 1.ª fase

46. Sabemos que  $i^0 = 1$ ,  $i^1 = i$ ,  $i^2 = -1$  e  $i^3 = -i$ , e que é válida a igualdade  $i^p = i^k$ , onde  $k$  é o resto da divisão inteira de  $p$  por 4.

Assim, como  $i^n = -i$ , temos que  $i^n = -i = i^3 = i^{4 \times p + 3}$ , para  $p \in \mathbb{N}$ .

Logo  $i^{n+1} = i^{(4 \times p + 3) + 1} = i^{4 \times p + 4} = i^{4 \times (p+1)} = i^{4 \times (p+1) + 0} = i^0 = 1$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2007, 2.ª fase

47. Como  $\arg(z_1) = \alpha$ , temos que  $z_1 = \rho e^{i\alpha}$   
Como  $z_2 = 4iz_1$ , temos que  $-z_2 = -4iz_1$

Como  $-4i = 4e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$ , fazendo a multiplicação na f.t. temos que:

$$-z_2 = -4iz_1 = 4e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} \times \rho e^{i\alpha} = (4\rho)e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$$

Assim, como  $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ , temos que  $\arg(-z_2) = \frac{3\pi}{2} + \alpha$

Exame – 2007, 2.ª fase



48. Designando por  $w$ ,  $z_1$  e  $z_2$  os números complexos cujas imagens geométricas são os pontos  $C$ ,  $A$  e  $B$ , respetivamente, temos que

- $|w| = |z_1|$ , porque os pontos  $A$  e  $C$  estão à mesma distância da origem; logo

$$|w| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

- Como  $18^\circ = 18 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 18 \times \frac{\pi}{18 \times 10} \text{ rad} = \frac{\pi}{10} \text{ rad}$ , então:

$$\arg(w) = \arg(z_2) + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10} = \frac{5\pi}{10} + \frac{\pi}{10} = \frac{6\pi}{10} = \frac{3\pi}{5}$$

Assim temos que  $w = 5e^{i(\frac{3\pi}{5})}$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2006, Ép. especial

49. Como  $e^{i(\frac{\pi}{2})} = i$  temos que:

$$z_1 = (2 - i) \left( 2 + e^{i(\frac{\pi}{2})} \right) = (2 - i)(2 + i) = 2^2 - i^2 = 4 - (-1) = 5$$

Escrevendo  $z_1$  na f.t. temos  $z_1 = 5 = 5e^{i \times 0}$

Fazendo a divisão na f.t. vem:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5e^{i \times 0}}{\frac{1}{5}e^{i(-\frac{\pi}{7})}} = \frac{5}{\frac{1}{5}} e^{i(0 - (-\frac{\pi}{7}))} = 25e^{i(\frac{\pi}{7})}$$

Exame – 2006, 2.ª fase

50. Seja  $z = a + bi$  com  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , cuja imagem geométrica é o ponto  $A$ .

Assim  $\bar{z} = a - bi$ , cuja imagem geométrica é o ponto  $A'$ , simétrico do ponto  $A$  relativamente ao eixo real.

Logo  $-\bar{z} = -(a - bi) = -a + bi$ , cuja imagem geométrica é o ponto  $B$ , simétrico do ponto  $A$  relativamente ao eixo imaginário.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2005, Ép. especial



51. Escrevendo  $w_1$  na f.t. temos  $w_1 = \rho e^{i\theta}$ , onde:

- $\rho = |w_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{1} = 1$ ; como  $\operatorname{sen} \theta > 0$  e  $\operatorname{cos} \theta > 0$ ,  $\theta$  é um ângulo do 1º quadrante, logo  $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\text{Assim } w_1 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

Calculando o produto  $w_1 \times w_2$  na f.t., e escrevendo o resultado na f.a. vem:

$$\begin{aligned} w_1 \times w_2 &= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} \times \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)} = (\sqrt{2} \times \sqrt{2})e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right)} = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right)} = 2e^{i\left(\frac{4\pi}{12}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \\ &= 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 1 + \sqrt{3}i \end{aligned}$$

$$\text{Podemos ainda escrever } w_3 \text{ na f.a.: } w_3 = \sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -\sqrt{3}i$$

Assim temos que:

$$\begin{aligned} \frac{w_1 \times w_2 - 2}{w_3} &= \frac{1 + \sqrt{3}i - 2}{-\sqrt{3}i} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{-\sqrt{3}i} = \frac{(-1 + \sqrt{3}i) \times i}{-\sqrt{3}i \times i} = \frac{-i + \sqrt{3}i^2}{-\sqrt{3}i^2} = \frac{-i - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}i = \\ &= -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i \end{aligned}$$

Exame – 2005, 2.ª fase

$$52. w = \frac{2+i}{1-i} - i = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} - i = \frac{2+2i+i+i^2}{1^2-i^2} - i = \frac{2+3i-1}{1-(-1)} - i = \frac{1+3i}{2} - \frac{2i}{2} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Escrevendo  $w$  na f.t. temos  $w = \rho e^{i\theta}$ , onde:

- $\rho = |w| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$ ; como  $\operatorname{sen} \theta > 0$  e  $\operatorname{cos} \theta > 0$ ,  $\theta$  é um ângulo do 1º quadrante, logo  $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\text{Assim } w = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

Exame – 2005, 1.ª fase

53.

$$53.1. \text{ Como } w^2 = (4-3i)(4-3i) = 16 - 12i - 12i + 9i^2 = 16 - 24i - 9 = 7 - 24i$$

$$2i + \frac{w^2}{i} = 2i + \frac{7-24i}{i} = 2i + \frac{(7-24i) \times i}{i \times i} = 2i + \frac{7i-24i^2}{i^2} = 2i + \frac{7i+24}{-1} = 2i - 7i - 24 = -24 - 5i$$

$$53.2. \text{ Se } \arg(w) = \alpha \text{ então } w = \rho e^{i\alpha}, \text{ sendo } \rho = |w| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{Assim } \bar{w} = 5e^{i(-\alpha)}$$

Como  $i = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ , fazendo o produto na f.t., temos:

$$i \times \bar{w} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} \times 5e^{i(-\alpha)} = 5e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

Exame – 2004, 2.ª fase



54. Como  $i^{23} = i^{4 \times 5 + 3} = i^3 = -i$  temos que:

$$\begin{aligned} \frac{z_1 + i^{23}}{z_2} &= \frac{-6 + 3i + (-i)}{1 - 2i} = \frac{(-6 + 2i) \times (1 + 2i)}{(1 - 2i) \times (1 + 2i)} = \frac{-6 - 12i + 2i + 4i^2}{1^2 - (2i)^2} = \frac{-6 - 10i - 4}{1 - 4i^2} = \\ &= \frac{-10 - 10i}{1 + 4} = \frac{-10 - 10i}{5} = -2 - 2i \end{aligned}$$

Escrevendo  $-2 - 2i$  na f.t. temos  $-2 - 2i = \rho e^{i\theta}$ , onde:

- $\rho = |-2 - 2i| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$

- $\operatorname{tg} \theta = \frac{-2}{-2} = 1$ ; como  $\operatorname{sen} \theta < 0$  e  $\operatorname{cos} \theta < 0$ ,  $\theta$  é um ângulo do 3º quadrante, logo  $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Assim  $\frac{z_1 + i^{23}}{z_2} = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{4})}$

Exame – 2004, 1.ª fase

55. Para que  $z$  seja um número real  $\arg(z) = 0 \vee \arg(z) = \pi$

Assim  $\theta - \frac{\pi}{5} = 0 \vee \theta - \frac{\pi}{5} = \pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{5} \vee \theta = \pi + \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{5} \vee \theta = \frac{6\pi}{5}$

Resposta: **Opção A**

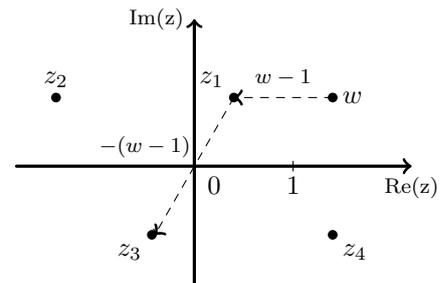
Exame – 2003, Prova para militares

56. Como  $\operatorname{Re}(w) > 1$  então  $\operatorname{Re}(w - 1) > 0$  e  $\operatorname{Im}(w) = \operatorname{Im}(w - 1)$ , pelo que é razoável admitir que  $w - 1 = z_1$

Como  $\operatorname{Re}(z_3) = -\operatorname{Re}(z_1) \wedge \operatorname{Im}(z_3) = -\operatorname{Im}(z_1)$ , temos que  $z_3 = -z_1$

Assim temos que  $z_3 = -z_1 = -(w - 1) = 1 - w$

Resposta: **Opção C**



Exame – 2003, 2.ª fase

57. Escrevendo  $z_1$  na f.t. temos  $z_1 = \rho e^{i\theta}$ , onde:

- $\rho = |z_1| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$

- $\operatorname{tg} \theta = \frac{-2}{2} = -1$ ; como  $\operatorname{sen} \theta < 0$  e  $\operatorname{cos} \theta > 0$ ,  $\theta$  é um ângulo do 4º quadrante,

logo  $\theta = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{6\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

Assim  $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{7\pi}{4})}$

Fazendo a divisão na f.t. e escrevendo o quociente na f.a., temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}e^{i(\frac{7\pi}{4})}}{\sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{4})}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{7\pi}{4} - \frac{5\pi}{4})} = 2e^{i(\frac{2\pi}{4})} = 2e^{i(\frac{\pi}{2})} = 2i$$

Exame – 2003, 1.ª fase - 1.ª chamada

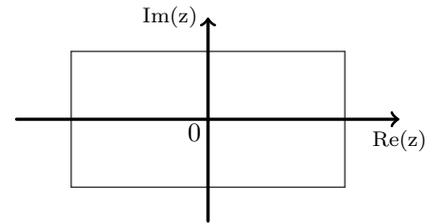


58. Como  $-2 < \operatorname{Re}(z) < 2 \wedge -1 < \operatorname{Im}(z) < 1$  e

- $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\bar{z})$
- $\operatorname{Im}(z) = -\operatorname{Im}(\bar{z})$

Temos que, também,  $-2 < \operatorname{Re}(\bar{z}) < 2 \wedge -1 < \operatorname{Im}(\bar{z}) < 1$

Logo a imagem geométrica de  $\bar{z}$  também pertence ao interior do retângulo.



Resposta: **Opção B**

Exame – 2002, 2.ª fase

$$59. w = \frac{-1+i}{i} = \frac{(-1+i) \times i}{i \times i} = \frac{-i+i^2}{i^2} = \frac{-1-i}{-1} = 1+i$$

Escrevendo  $w$  na f.t. temos  $w = \rho e^{i\theta}$ , onde:

- $\rho = |w| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{1} = 1$ ; como  $\operatorname{sen} \theta > 0$  e  $\operatorname{cos} \theta > 0$ ,  $\theta$  é um ângulo do 1º quadrante, logo  $\theta = \frac{\pi}{4}$

Assim  $w = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})}$ , e por isso:

- $\arg(w) = \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{3} = \arg(z_1)$ , pelo que  $w \neq z_1$
- $|w| = \sqrt{2} \neq 4 = |z_2|$ , pelo que  $w \neq z_2$

Exame – 2002, 1.ª fase - 2.ª chamada

60. Como  $i^{23} = i^{4 \times 5 + 3} = i^3 = -i$ , temos que:

$$\frac{z_1 + i^{23} + 4}{2-i} = \frac{1+i+(-i)+4}{2-i} = \frac{5}{2-i} = \frac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{10+5i}{2^2-i^2} = \frac{10+5i}{4-(-1)} = \frac{10+5i}{5} = 2+i$$

Exame – 2001, Ép. especial

$$61. \text{ Se } w = 2+i, \text{ então } \frac{1}{w} = \frac{1}{2+i} = \frac{1(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i}{2^2-i^2} = \frac{2-i}{4-(-1)} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$$

Escrevendo  $\sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4})}$  na f.a., temos que:

$$\sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4})} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -\frac{2}{2} + \frac{2}{2}i = -1+i$$

Logo  $\frac{1}{w} \neq \sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4})}$

Exame – 2001, 2.ª fase



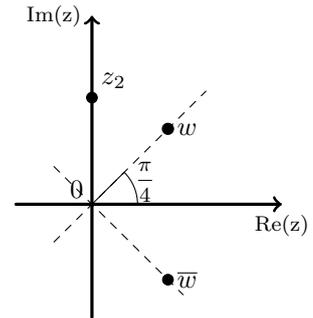
62. Se a imagem geométrica de  $w$  está no primeiro quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, então  $\arg(w) = \frac{\pi}{4}$ , e  $w$  é da forma  $w = \rho e^{i(\frac{\pi}{4})}$

Assim temos que  $\bar{w} = \rho e^{i(-\frac{\pi}{4})}$

Logo

$$\frac{w}{\bar{w}} = \frac{\rho e^{i(\frac{\pi}{4})}}{\rho e^{i(-\frac{\pi}{4})}} = \frac{\rho}{\rho} e^{i(\frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}))} = 1 \times e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4})} = e^{i(\frac{2\pi}{4})} = e^{i(\frac{\pi}{2})}$$

Logo a representação geométrica de  $\frac{w}{\bar{w}}$  está sobre a parte positiva do eixo imaginário, como a imagem geométrica de  $z_2$



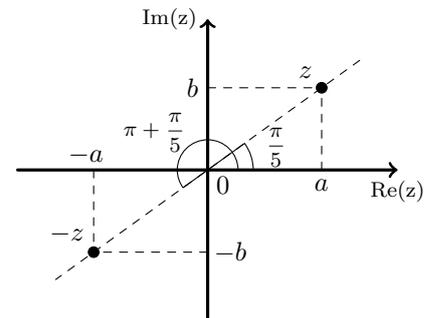
Resposta: **Opção B**

Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada

63. Se  $\arg(z) = \frac{\pi}{5}$ , então  $z$  tem a imagem geométrica no 1º quadrante.

Se  $z = a + bi$ , com  $a > 0 \wedge b > 0$ , então  $-z = -a - bi$ , com  $a > 0 \wedge b > 0$ , logo  $\arg(-z) = \pi + \frac{\pi}{5}$

Resposta: **Opção B**



Exame – 2000, 1.ª fase - 2.ª chamada

64. Sabemos que  $z \in A$  se  $|z| < 1$ .

Como  $|1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ , sendo  $\theta = \arg(1 + \sqrt{3}i)$  podemos escrever  $1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\theta}$ ,

Assim temos que :

$$\frac{1 + \sqrt{3}i}{4e^{i(\frac{\pi}{6})}} = \frac{2e^{i\theta}}{4e^{i(\frac{\pi}{6})}} = \frac{2}{4} e^{i(\theta - \frac{\pi}{6})} = \frac{1}{2} e^{i(\theta - \frac{\pi}{6})}$$

Logo, como  $\left| \frac{1 + \sqrt{3}i}{4e^{i(\frac{\pi}{6})}} \right| = \frac{1}{2}$ , e  $\frac{1}{2} < 1$ , podemos afirmar que  $\frac{1 + \sqrt{3}i}{4e^{i(\frac{\pi}{6})}}$  pertence ao conjunto  $A$ .

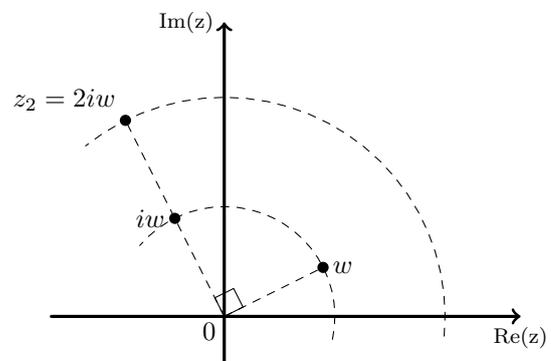
Exame – 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada

65. A operação "multiplicar por  $i$ " corresponde geometricamente a "fazer uma rotação de centro em  $O$  e amplitude  $\frac{\pi}{2}$  radianos" pelo que a imagem geométrica de  $iw$ , está sobre a circunferência de centro na origem que contem  $w$ .

A operação "multiplicar por 2" corresponde a duplicar a distância à origem, mantendo o ângulo que com o sei-eixo real positivo.

Assim temos que  $2iw = z_2$

Resposta: **Opção B**



Exame – 2000, Prova modelo

