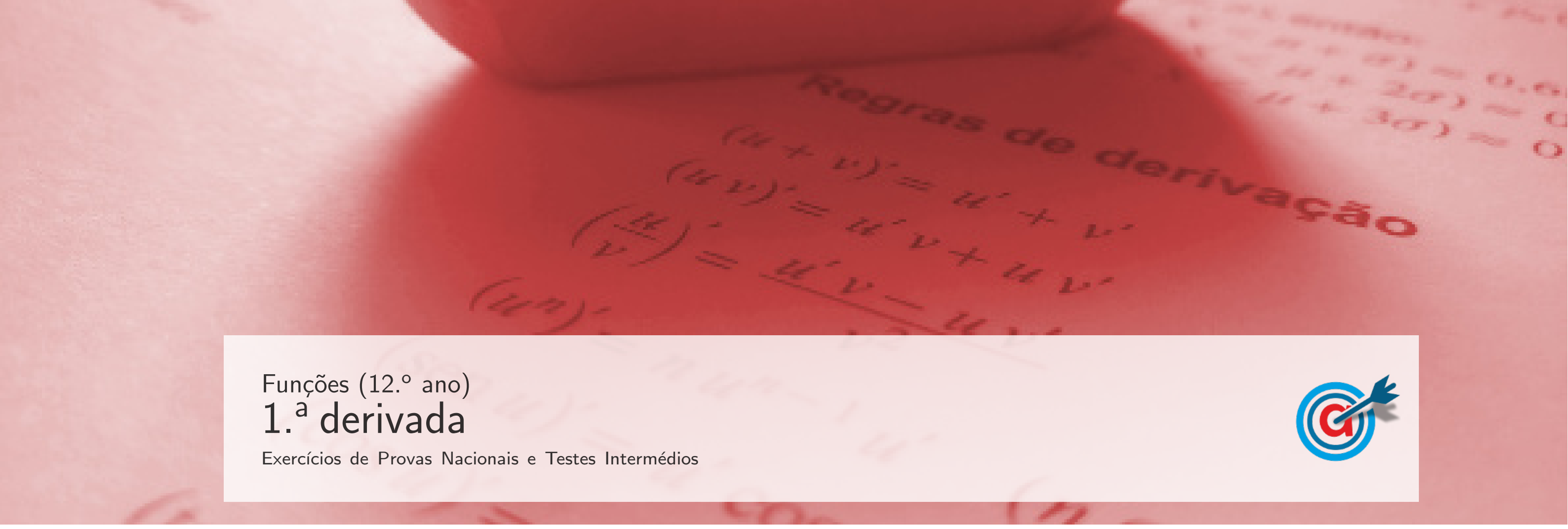


Funções (12.º ano)

1.ª derivada

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios

1. Considere uma função, h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = ax^2$, com $a \neq 0$, e dois pontos, A e B, do seu gráfico.

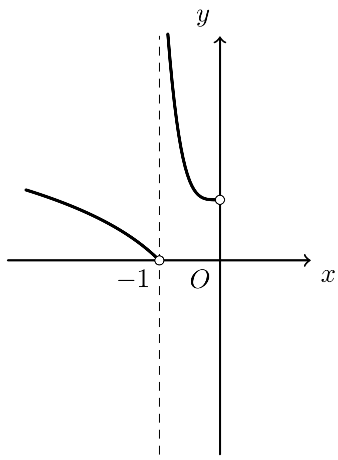
   Mostre que o ponto de intersecção das retas tangentes ao gráfico de h nos pontos A e B pertence à reta vertical que contém o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.

   Exame – 2023, Ép. especial

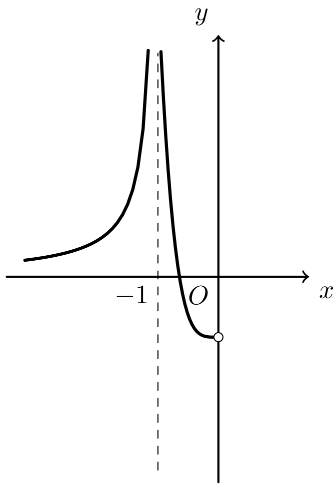
2. Seja g uma função par, diferenciável, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, tal que:
   - $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$;
   - $g(0) < 0$;
   - $g'(x) < 0, \forall x \in]-\infty, -1[$.

   Em cada um dos referenciais o.n. Oxy seguintes, **I**, **II** e **III**, estão representadas parte do gráfico de uma função e a assíntota a esse gráfico, de equação $x = -1$.

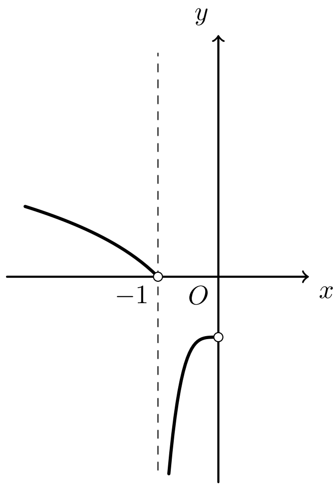
   I

   II

   III

   Justifique que em nenhum dos referenciais, **I**, **II** e **III**, pode estar representada parte do gráfico da função g em $]-\infty,0[\setminus\{-1\}$.

   Na sua resposta, apresente, para cada um dos referenciais, uma razão que justifique a impossibilidade de nele estar representada parte do gráfico da função g em $]-\infty,0[\setminus\{-1\}$.

   Exame – 2023, 2.ª Fase

3. Considere a função f, de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \frac{\ln x + 2x}{x}$$

   Sem recorrer à calculadora, estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos e determine esses extremos, caso existam.

   Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia da função f .

   Exame – 2023, 2.ª Fase

4. Considere as funções f e g de domínio $]0, +\infty[$, definidas por $f(x) = \frac{k}{x}$ e por $g(x) = -\frac{k}{x}$, com $k > 0$.

   Considere ainda:

   - dois pontos P e Q, com a mesma abcissa, pertencentes, respetivamente, ao gráfico da função f e ao gráfico da função g;
   - a reta s, tangente ao gráfico da função f no ponto P ;
   - a reta t, tangente ao gráfico da função g no ponto Q ;
   - o ponto R, ponto de intersecção das retas s e t .

   Mostre que, qualquer que seja a abcissa dos pontos P e Q, a área do triângulo $[PQR]$ é igual a k .

   Exame – 2023, 2.ª Fase

5. Sejam a e b números reais, não nulos, tais que a reta de equação $y = ax + b$ é tangente ao gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx$.

   Determine as coordenadas do ponto de tangência.

   Exame – 2023, 1.ª Fase

6. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

   Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \ln(1 + e^x) - x$.

   Num referencial o.n. Oxy , seja r a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0 .

   Sejam A e B os pontos de intersecção da reta r com os eixos coordenados.

   Mostre que a área do triângulo $[OAB]$ é igual a $\left(\ln 2\right)^2$.

   Exame – 2022, Ép. especial

7. Seja k um número real positivo.

   Considere a função f, de domínio $]0, +\infty[$, definida por $f(x) = \sqrt{kx} - \ln(kx)$.

   Determine, sem recorrer à calculadora, o contradomínio da função f .

   Exame – 2022, Ép. especial

8. Seja g uma função derivável, de domínio $]-\infty,\pi[\setminus\{0\}$, cuja derivada, g', é dada por

$$g'(x) = \begin{cases} 3e^{2x} - 7e^{x} & \text{se } x < 0 \\ \\ x + 2\cos^2 x & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em referencial o.n. Oxy, o gráfico da função g .

Determine, no intervalo $]-\infty,0[$, a abcissa do ponto do gráfico da função g em que a reta tangente ao gráfico da função é paralela à reta de equação $y = -2x$.

Exame – 2022, 2.ª Fase

9. Seja a um número real.

Considere a função polinomial definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + a^2x + \sqrt{2}$.

Mostre que, para qualquer valor de a, a função não tem extremos.

Exame – 2022, 2.ª Fase

10. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2-x}}{x+2} & \text{se } x \leq -2 \ \vee \ x \geq 2 \\ \\ \dfrac{\text{sen}\,(x-2)}{x^2-4} & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases}$$

Estude, sem recorrer à calculadora, a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, no intervalo $]-\infty,-2[$, e determine esses extremos, caso existam.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

Exame – 2022, 1.ª Fase

11. Seja k um número real não nulo, e seja f a função definida, em $\mathbb{R}^+$, por $f(x) = \frac{k}{x}$.

Considere dois pontos do gráfico de f, A e B , sendo A o de menor abcissa. Considere, também, o ponto desse gráfico em que a reta tangente ao gráfico é paralela à reta AB .

Mostre que, para qualquer valor de k, as abcissas dos três pontos são termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Exame – 2022, 1.ª Fase

12. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

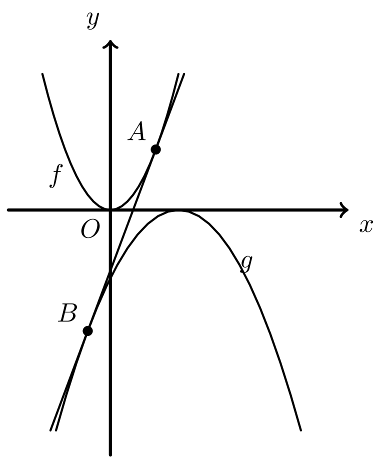
$$f(x) = \begin{cases} x - 2 + \ln(3 - 2x) & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x^2} + k & \text{se } x > 1 \end{cases} \qquad (k \text{ é um número real})$$

Estude, no intervalo $]-\infty,1[$, a função f, sem recorrer à calculadora, quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

Exame – 2021, Ép. especial

13. Na figura ao lado, estão representadas, em referencial o.n. xOy, partes dos gráficos das funções f e g, ambas de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por $f(x) = 2x^2$ e $g(x) = -(x-1)^2$ e a única reta não horizontal que é tangente, simultaneamente, ao gráfico de f e ao gráfico de g



Seja A o ponto de tangência dessa reta com o gráfico de f e seja B o ponto de tangência dessa mesma reta com o gráfico de g

Determine, sem recorrer à calculadora, as abcissas dos pontos A e B

Exame – 2021, Ép. especial

14. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - e^{-x}}{x} & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Resolva o item seguinte sem recorrer à calculadora.

Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa -2

Exame – 2021, 2.ª Fase

15. Seja f a função, de domínio $]0,+\infty[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} -x^2(1+2\ln x) & \text{se } 0<x\leq 1 \\ \dfrac{5-5e^{x-1}}{x^2+3x-4} & \text{se } x>1 \end{cases}$$

Estude, no intervalo $]0,1[$, a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

Exame – 2021, 1.ª Fase

16. Seja f uma função, de domínio $]0,+\infty[$, cuja derivada, f', de domínio $]0,+\infty[$, é dada por $f'(x)=\dfrac{2+\ln x}{x}$

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{1-x^2}$?

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 2

Exame – 2020, 2.ª Fase

17. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x)=\begin{cases} 1+\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-e^x} & \text{se } x<0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ x^2\ln x & \text{se } x>0 \end{cases}$$

Resolva o item seguinte sem recorrer à calculadora. Estude a função g quanto à monotonia em $]0,+\infty[$ e determine, caso existam, os extremos relativos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

Exame – 2020, 1.ª Fase

18. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x)=\begin{cases} x\ln(1-x) & \text{se } x\leq 0 \\ \dfrac{1-3x}{1-e^{-x}} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

Qual é o declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -1?

(A) $0{,}5+\ln 2$ **(B)** $-0{,}5+\ln 2$ **(C)** $0{,}5-\ln 2$ **(D)** $-0{,}5-\ln 2$

Exame – 2019, Ép. especial

19. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{x}{x - \ln x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1

Exame – 2019, 1.ª Fase

20. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$

Estude a função g quanto à monotonia e determine, caso existam, os extremos relativos.

Exame – 2019, 1.ª Fase

21. Seja f a função, de domínio f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 + \dfrac{e^x}{1-x} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{\ln(x^2)+2}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Determine $f'(0)$, recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

Exame – 2018, 2.ª Fase

22. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio, sabe-se que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{f(x)-f(2)} = 4$

Qual é o valor de $f'(2)$?

(A) $-\dfrac{1}{2}$ **(B)** $-\dfrac{1}{4}$ **(C)** $\dfrac{1}{2}$ **(D)** $\dfrac{1}{4}$

Exame – 2017, 2.ª fase

23. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

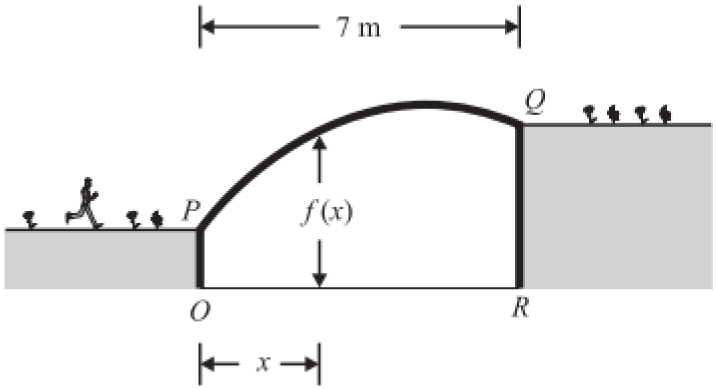
Para um certo número real k, a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \dfrac{k}{x} + f(x)$, tem um extremo relativo para $x = 1$

Determine esse número k, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Exame – 2017, 2.ª fase

24. Na figura ao lado, está representada uma secção de uma ponte pedonal que liga as duas margens de um rio. A ponte, representada pelo arco PQ, está suportada por duas paredes, representadas pelos segmentos de reta $[OP]$ e $[RQ]$. A distância entre as duas paredes é 7 metros.

O segmento de reta $[OR]$ representa a superfície da água do rio.



Considere a reta OR como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto O e em que uma unidade corresponde a 1 metro.

Para cada ponto situado entre O e R, de abcissa x, a distância na vertical, medida em metros, desse ponto ao arco PQ é dada por

$$f(x) = 9 - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right), \text{ com } x \in [0{,}7]$$

Resolva o item seguinte recorrendo a métodos analíticos; utilize a calculadora apenas para efetuar eventuais cálculos numéricos.

O clube náutico de uma povoação situada numa das margens do rio possui um barco à vela. Admita que, sempre que esse barco navega no rio, a distância do ponto mais alto do mastro à superfície da água é 6 metros.

Será que esse barco, navegando no rio, pode passar por baixo da ponte?
Justifique a sua resposta.

Exame – 2017, 1.ª fase

25. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função tal que $f'(x) < 0$, para qualquer número real positivo x

Considere, num referencial o.n. xOy,

- um ponto P, de abcissa a, pertencente ao gráfico de f
- a reta r, tangente ao gráfico de f no ponto P
- o ponto Q, ponto de intersecção da reta r com o eixo Ox

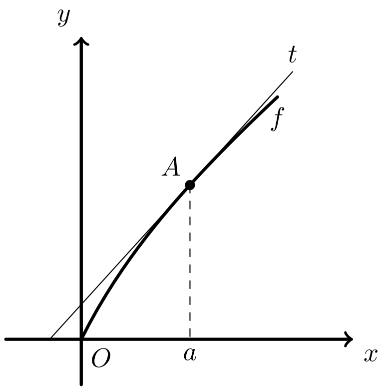
Sabe-se que $\overline{OP} = \overline{PQ}$

Determine o valor de $f'(a) + \dfrac{f(a)}{a}$

Exame – 2017, 1.ª fase

26. Seja f a função, de domínio $\left]-\frac{3\pi}{2}, +\infty\right[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \cos x & \text{se } -\frac{3\pi}{2} < x < 0 \\ \ln(e^x + x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$



Na figura ao lado, estão representados:

- parte do gráfico da função f
- um ponto A, pertencente ao gráfico de f, de abcissa a
- a reta t, tangente ao gráfico da função f no ponto A

Sabe-se que:

- $a \in]0,1[$
- a reta t tem declive igual a 1,1

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto A
Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente a abcissa do ponto A arredondada às centésimas.

Exame – 2016, Ép. especial

27. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cuja **derivada**, f', de domínio $\mathbb{R}$, é dada por

$$f'(x) = e^x \left(x^2 + x + 1\right)$$

Resolva o item seguinte recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Sejam p e q dois números reais tais que

$$p = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \qquad \text{e} \qquad q = -\frac{1}{p}$$

Determine o valor de q e interprete geometricamente esse valor.

Exame – 2016, 1.ª Fase

28. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$
Sabe-se que $f'(2) = 6$ (f' designa a derivada de f)

Qual é o valor de $\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2x}$?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6

Exame – 2015, Ép. especial

29. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}_0^+$, definida por $f(x) = x^2e^{1-x}$

Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Exame – 2015, Ép. especial

30. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 + xe^x & \text{se } x \leq 3 \\ \\ \ln(x-3) - \ln x & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

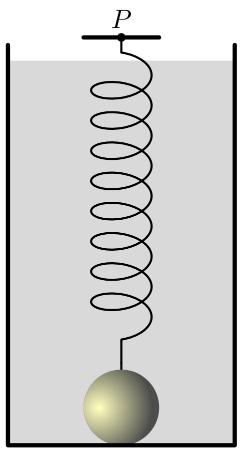
Recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora, determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 4

Exame – 2015, 2.ª Fase

31. Na figura ao lado, está representado um recipiente cheio de um líquido viscoso. Tal como a figura ilustra, dentro do recipiente, presa à sua base, encontra-se uma esfera. Essa esfera está ligada a um ponto P por uma mola esticada.
Num certo instante, a esfera é desprendida da base do recipiente e inicia um movimento vertical. Admita que, t segundos após esse instante, a distância, em centímetros, do centro da esfera ao ponto P é dada por

$$d(t) = 10 + (5-t)e^{-0,05t}, \ (t \geq 0)$$

Determine o instante em que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.



Exame – 2015, 1.ª Fase

32. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x^2}$

Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) de monotonia e, caso existam, os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos.

Exame – 2014, Ép. especial

33. Considere uma função f , de domínio $\mathbb{R}$
Sabe-se que:

- a reta de equação $x = 0$ é assíntota do gráfico da função f
- $f(-3) \times f(5) < 0$
- $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existe e é positivo, para qualquer número real x não nulo;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \big(f(x) - 2x\big) = 0$

Considere as afirmações seguintes.

I) O teorema de Bolzano permite garantir, no intervalo $[-3{,}5]$, a existência de, pelo menos, um zero da função f

II) O gráfico da função f admite uma assíntota horizontal quando x tende para $-\infty$

III) A função f é crescente em $]0, +\infty[$

Elabore uma composição, na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa.
Na sua resposta, apresente três razões diferentes, uma para cada afirmação.

Exame – 2014, Ép. especial

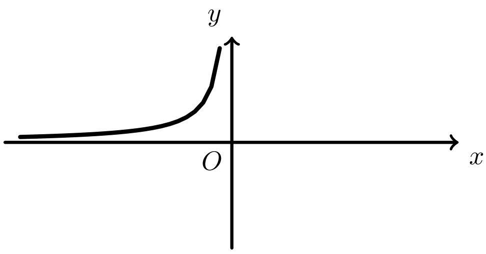
34. Considere as funções f e g, de domínio $]-\infty, 0[$ definidas por $f(x) = x - 1 + \dfrac{\ln(-x)}{x}$ e $g(x) = -x + f(x)$

Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.
Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) de monotonia e, caso existam, os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos.

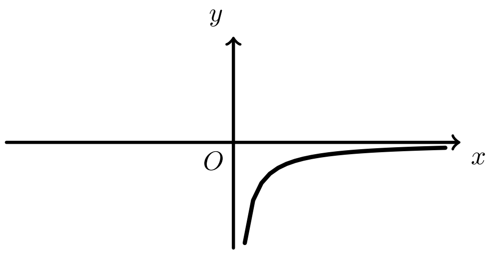
Exame – 2014, 2.ª Fase

35. Considere, para um certo número real a positivo, a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a + \ln\left(\dfrac{a}{x}\right)$
Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f', primeira derivada da função f ?

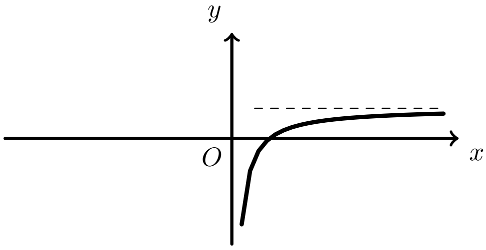
(A)



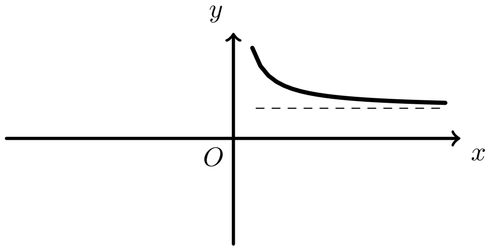
(B)



(C)



(D)



Exame – 2014, 1.ª fase

36. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 + e^{-x} & \text{se } x \leq 0 \\ \\ \dfrac{3x + \ln x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Seja t a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1
Determine a equação reduzida da reta t, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Teste Intermédio 12.º ano – 30.04.2014

37. Numa certa escola, eclodiu uma epidemia de gripe que está a afetar muitos alunos.
Admita que o número de alunos com gripe, t dias após as zero horas de segunda-feira da próxima semana, é dado aproximadamente por

$$f(t) = (4t + 2)e^{3{,}75 - t}\ , \text{ para } t \in [0{,}6]$$

Como, por exemplo, $f(1{,}5) \approx 76$, pode concluir-se que 76 alunos dessa escola estarão com gripe às 12 horas de terça-feira da próxima semana.

Resolva este item recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.
Estude a função f quanto à monotonia e conclua em que dia da próxima semana, e a que horas desse dia, será máximo o número de alunos com gripe.

Teste Intermédio 12.º ano – 30.04.2014

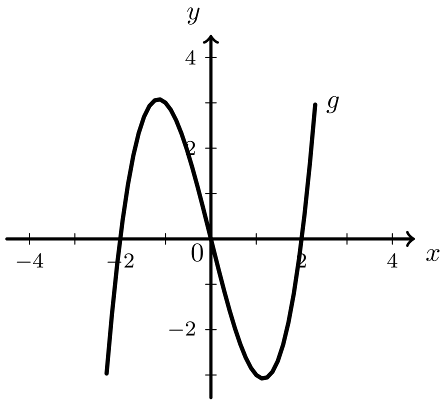
38. Considere, para um certo número real k positivo, a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{1 - e^{2x}} & \text{se } x < 0 \\ \\ \ln k & \text{se } x = 0 \\ \\ \dfrac{x}{2} - \ln\left(\dfrac{6x}{x+1}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Mostre que $\ln\left(\dfrac{\sqrt{e}}{3}\right)$ é um extremo relativo da função f no intervalo $]0, +\infty[$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Exame – 2013, Ép. especial

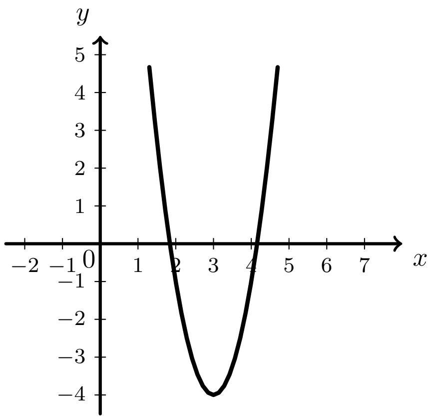
39. Na figura ao lado, está representada, num referencial ortogonal xOy, parte do gráfico de uma função polinomial g, de grau 3



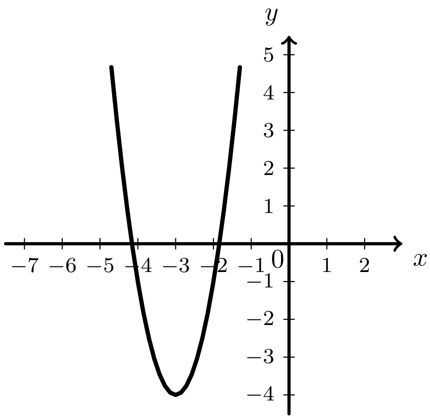
Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, que verifica a condição $f(x) = g(x-3)$

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f', primeira derivada da função f?

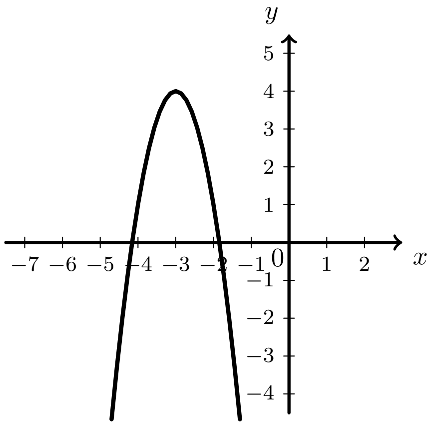
(A)



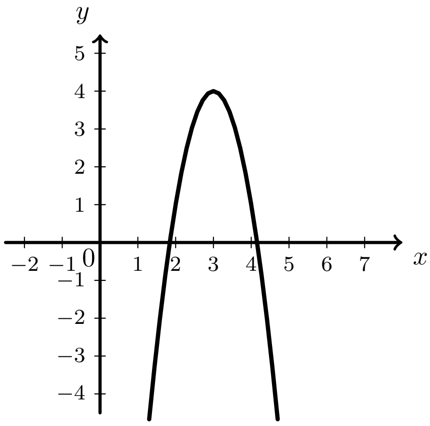
(B)



(C)



(D)



Exame – 2013, 2.ª fase

40. Considere, para um certo número real a superior a 1, as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = a^x$ e $g(x) = a^{-x}$

Considere as afirmações seguintes.

I) Os gráficos das funções f e g não se intersectam.

II) As funções f e g são monótonas crescentes.

III) $f'(-1) - g'(1) = \dfrac{2\ln a}{a}$

Qual das opções seguintes é a correta?

(A) II e III são verdadeiras.

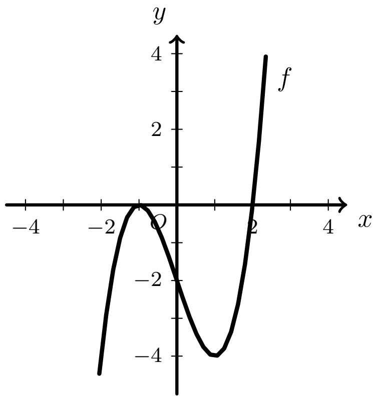
(B) I é falsa e III é verdadeira.

(C) I é verdadeira e III é falsa.

(D) II e III são falsas.

Exame – 2013, 1.ª fase

41. Na figura ao lado, está representada, num referencial ortogonal xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f, de grau 3

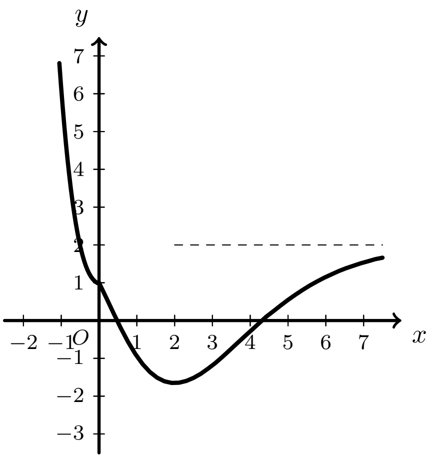


Sabe-se que:

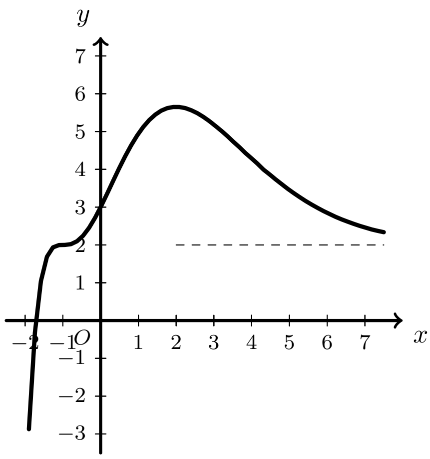
- -1 e 2 são os únicos zeros da função f
- g', a primeira derivada de uma certa função g, tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $g'(x) = f(x) \times e^{-x}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x) - 2] = 0$

Apenas uma das opções seguintes pode representar a função g

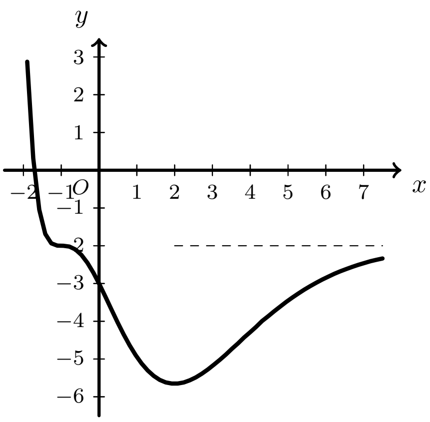
(I)



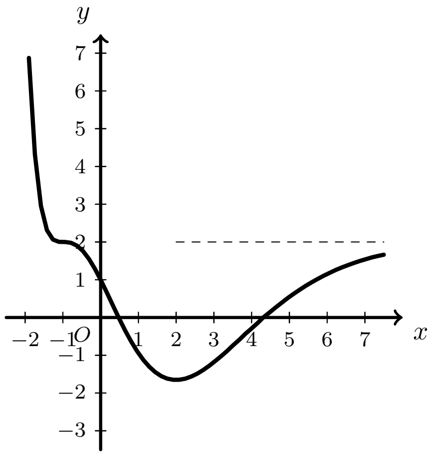
(II)



(III)



(IV)



Nota – Em cada uma das opções estão representadas parte do gráfico de uma função e, a tracejado, uma assíntota desse gráfico.
Elabore uma composição na qual:

- identifique a opção que pode representar a função g
- apresente as razões para rejeitar as restantes opções.

Apresente três razões diferentes, uma por cada gráfico rejeitado.

Exame – 2013, 1.ª Fase

42. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus 0$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-1}}{e^{4x-1}} & \text{se } x < 0 \\ \\ x \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$
Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos em $]0,e]$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Exame – 2013, 1.ª Fase

43. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^a + a^2 \ln x$ (a é um número real maior do que 1), e seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a
Qual é o declive da reta r?

(A) $a^{a-1} + a^2$ **(B)** $a^a + a^2$ **(C)** $a^{a-1} + a$ **(D)** $a^a + a$

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2013

44. Admita que a concentração de um produto químico na água, em gramas por litro, t minutos após a sua colocação na água, é dada, aproximadamente, por

$$C(t) = 0{,}5t^2 \times e^{-0{,}1t}, \text{ com } t \geq 0$$

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, determine o valor de t para o qual a concentração desse produto químico na água é máxima.

Exame – 2012, Ép. especial

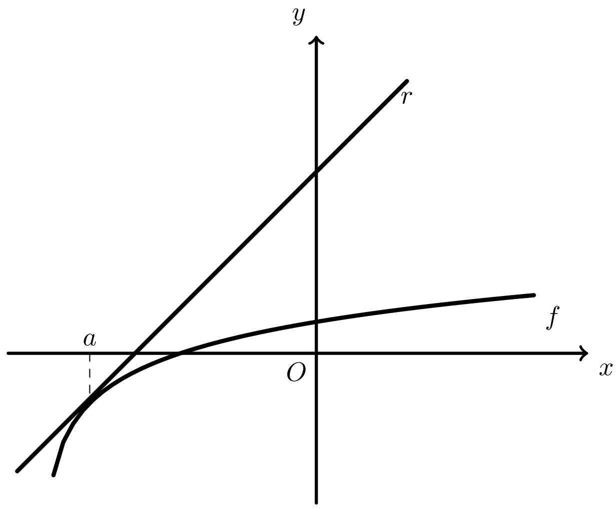
45. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f, de domínio $]-6,+\infty[$, definida por $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{3} + 2\right)$
Sabe-se que:

- a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a
- a inclinação da reta r é, em radianos, $\dfrac{\pi}{4}$

Qual é o valor de a?

(A) -4 **(B)** $-\dfrac{9}{2}$

(C) $-\dfrac{11}{2}$ **(D)** -5



Exame – 2012, 2.ª Fase

46. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

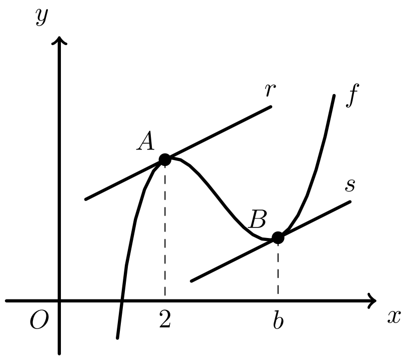
$$f(x) = \begin{cases} x\ln(x+1) - x\ln(x) + 3x & \text{se } x > 0 \\ \\ xe^{1-x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $x = -1$, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Exame – 2012, 1.ª Fase

47. De uma certa função f sabe-se que:

- o seu domínio é $]1,+\infty[$
- a sua **derivada** é dada por $f'(x) = x^2 - 4x + \frac{9}{2} - 4\ln(x-1)$



Na figura ao lado, estão representadas:

- parte do gráfico da função f
- a reta r que é tangente ao gráfico da função f no ponto A, de abcissa 2
- a reta s que é tangente ao gráfico da função f no ponto B

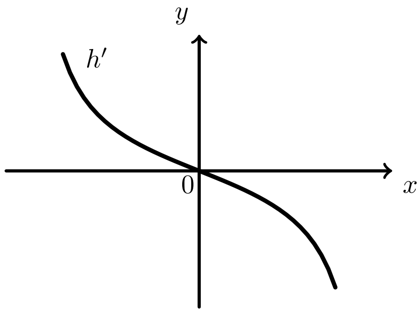
As retas r e s são paralelas.
Seja b a abcissa do ponto B
Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor de b Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir e identificar o(s) gráfico(s) que tiver necessidade de visualizar na calculadora para resolver graficamente a equação;
- assinalar o ponto relevante para a resolução do problema;
- apresentar o valor de b arredondado às centésimas.

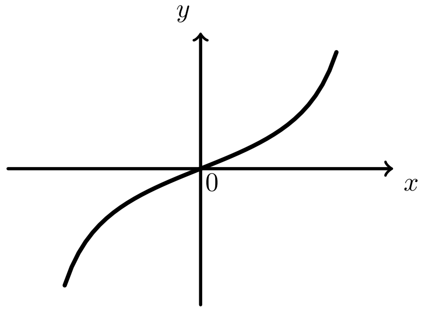
Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2012

48. Na figura ao lado, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico de uma função h', primeira derivada de h

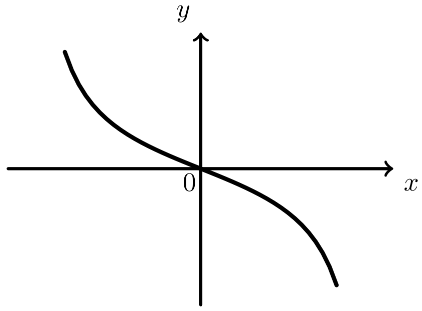
Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função h?



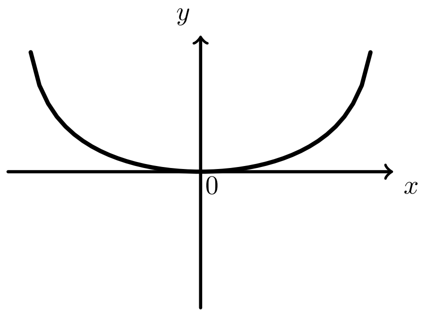
(A)



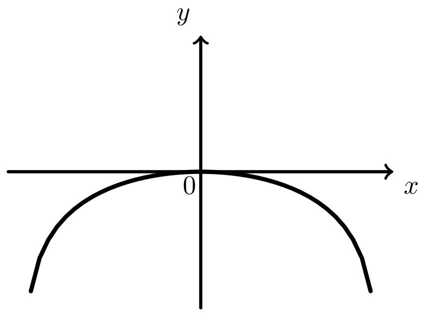
(B)



(C)



(D)



Exame – 2011, Prova especial

49. Sejam f e g duas funções deriváveis em $\mathbb{R}$
Sabe-se que:

- $f(1) = f'(1) = 1$
- $g(x) = (2x - 1) \times f(x)$, para todo o valor real de x

Qual é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1?

(A) $y = 3x - 2$ **(B)** $y = 3x + 4$ **(C)** $y = 2x - 1$ **(D)** $y = -3x + 2$

Exame – 2011, Prova especial

50. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{1-e^{x+1}} + 1 & \text{se } x \neq -1 \\ a+2 & \text{se } x = -1 \end{cases} \qquad (a \text{ é um número real.})$$

Seja f' a primeira derivada de f

Mostre, sem resolver a equação, que $f'(x) = \dfrac{1}{4}$ tem, pelo menos, uma solução em $]0,1[$

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

Exame – 2011, Ép. especial

51. Considere a função f, de domínio $[0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2-x}-1}{x-2} & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ \dfrac{x+1}{\ln(x+1)} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Estude f quanto à monotonia em $]2, +\infty[$, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Exame – 2011, 2.ª Fase

52. Na figura ao lado, está representada, num referencial ortogonal xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f, de grau 3, de domínio $\mathbb{R}$

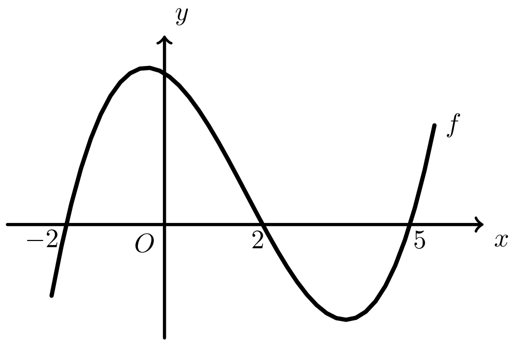
Sabe-se que:

- -2, 2 e 5 são zeros de f
- f' representa a função derivada de f

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $f'(0) \times f'(6) = 0$ **(B)** $f'(-3) \times f'(6) < 0$

(C) $f'(-3) \times f'(0) > 0$ **(D)** $f'(0) \times f'(6) < 0$



Exame – 2011, 1.ª fase

53. Num museu, a temperatura ambiente em graus centígrados, t horas após as zeros horas do dia 1 de Abril de 2010, é dada, aproximadamente, por

$$T(t) = 15 + 0{,}1t^2 e^{-0{,}15t}, \text{ com } t \in [0{,}20]$$

Determine o instante em que a temperatura atingiu o valor máximo recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Apresente o resultado em horas e minutos, apresentando os minutos arredondados às unidades.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

Exame – 2011, 1.ª fase

54. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{2+\ln x}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

O gráfico de f admite uma assíntota horizontal.

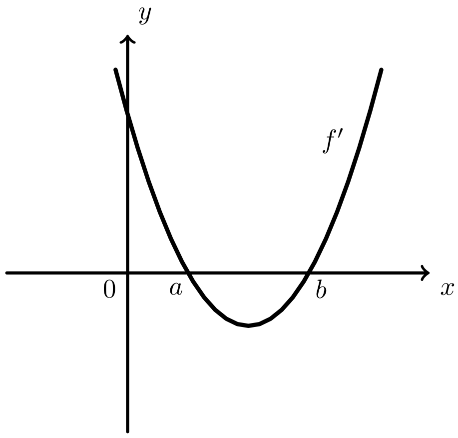
Seja P o ponto de interseção dessa assíntota com a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e.

Determine as coordenadas do ponto P recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

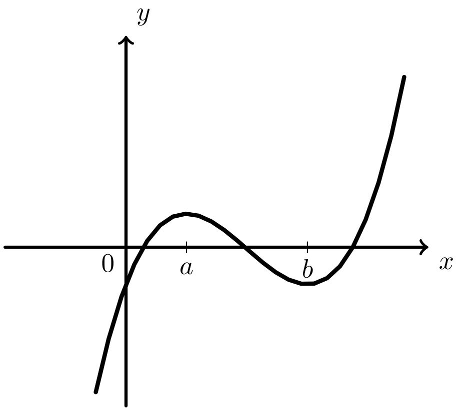
Exame – 2011, 1.ª fase

55. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função derivada, f', de uma função f

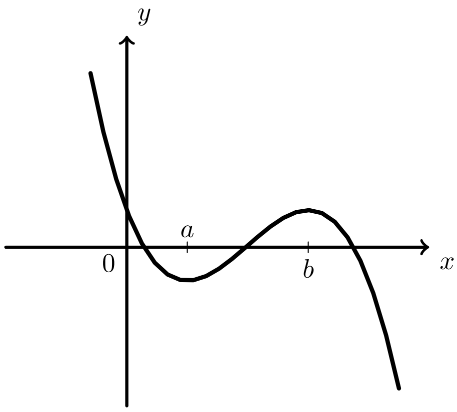
Em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f?



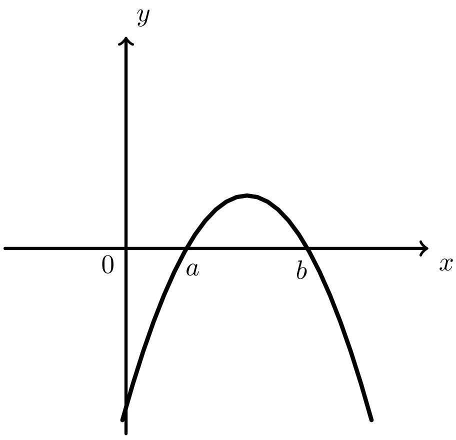
(A)



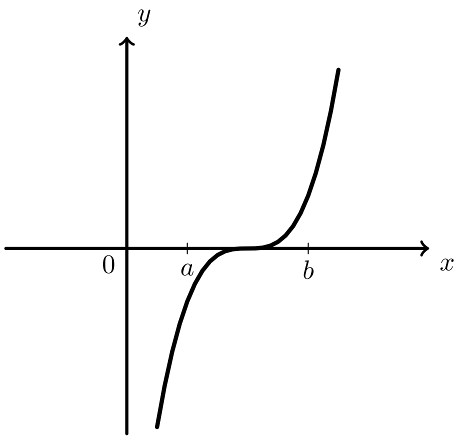
(B)



(C)



(D)



Exame – 2010, Ép. especial

56. Considere a função f, de domínio $]0,+\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 3x}{x} & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ \\ \dfrac{1}{5}x - \ln x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Mostre, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, que a função f tem um extremo relativo no intervalo $]2,+\infty[$.

Exame – 2010, 2.ª Fase

57. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x + e^{2x^3-1}$
Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 0$

Exame – 2010, 2.ª Fase

58. Considere uma função f , de domínio $]0,3[$, cuja derivada f', de domínio $]0,3[$, é definida por

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$$

Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.
Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar os intervalos de monotonia da função f;
- assinalar e indicar as coordenadas dos pontos relevantes, com arredondamento às centésimas.

Exame – 2010, 1.ª Fase

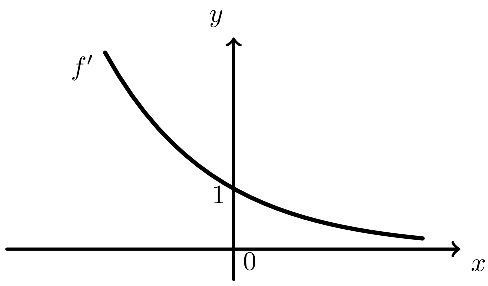
59. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3 + 4x^2e^{-x}$
Mostre, usando exclusivamente métodos analíticos, que a função f tem um único mínimo relativo e determine-o.

Teste Intermédio 12º ano – 19.05.2010

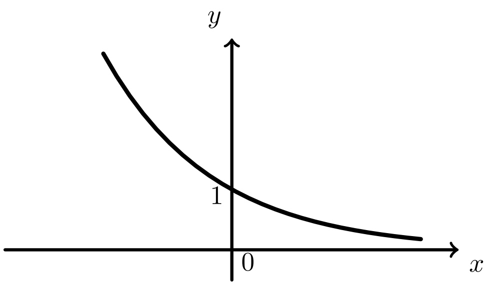
60. Na figura ao lado, está representada parte do gráfico de uma função f', derivada de f, ambas de domínio $\mathbb{R}$, em que o eixo Ox é uma assíntota do gráfico de f'

Seja a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) + x$

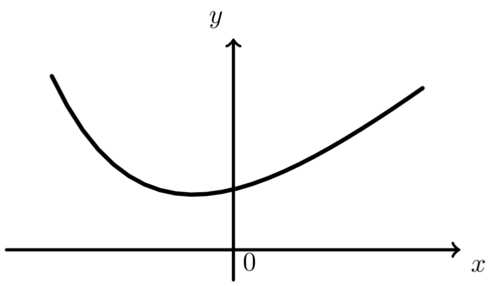
Qual das figuras seguintes pode representar parte do gráfico da função g', derivada de g?



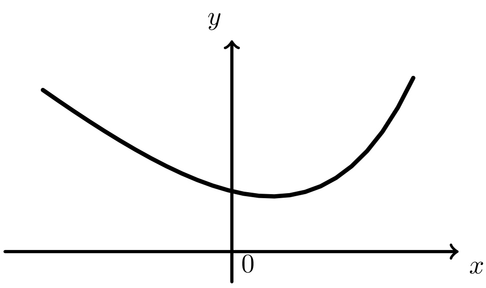
(A)



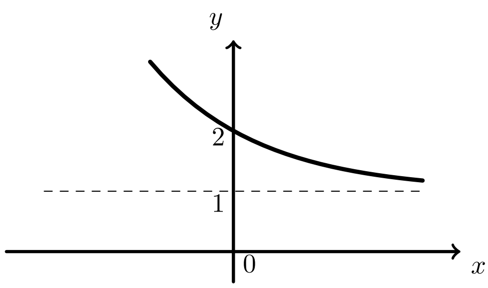
(B)



(C)



(D)



Exame – 2009, 2.ª fase

61. Numa certa zona de cultivo, foi detetada uma doença que atinge as culturas. A área afetada pela doença começou por alastrar durante algum tempo, tendo depois começado a diminuir.
Admita que a área, em hectares, afetada pela doença, é dada, em função de t, por

$$A(t) = 2 - t + 5\ln(t+1)$$

sendo t $(0 \leq t < 16)$ o tempo, em semanas, decorrido após ter sido detetada essa doença.
Determine a área máxima afetada pela doença.
Resolva este item, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, e apresente o resultado em hectares, arredondado às centésimas.
Nota: A calculadora pode ser usada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

Exame – 2009, 2.ª Fase

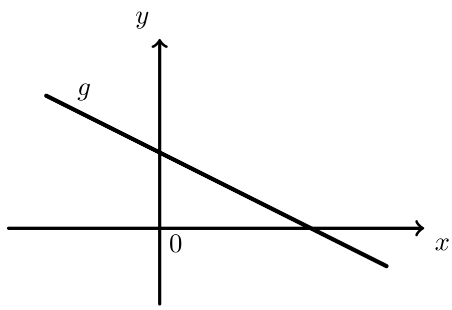
62. Num certo dia, o Fernando esteve doente e tomou, às 9 horas da manhã, um medicamento cuja concentração $C(t)$ no sangue, em mg/l, t horas após o medicamento ter sido ministrado, é dada por

$$C(t) = 2te^{-0,3t} \quad (t \geq 0)$$

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, determine a que horas se verificou a concentração máxima.
Apresente o resultado em horas e minutos, arredondando estes às unidades.
Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

Exame – 2009, 1.ª Fase

63. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + 1$
Seja g a função cujo gráfico é a reta representada na figura ao lado.
Seja $h = f + g$
Seja h' a função derivada da função h O gráfico da função h' é uma reta. Sejam m e b, respetivamente, o declive e a ordenada na origem desta reta.
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?



(A) $m > 0$ e $b > 0$ **(B)** $m > 0$ e $b < 0$

(C) $m < 0$ e $b > 0$ **(D)** $m < 0$ e $b < 0$

Teste Intermédio 12.º ano – 27.05.2009

64. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a sua **derivada**, f', é definida por

$$f'(x) = (2x+4)e^x$$

Seja A o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo das ordenadas. Sabe-se que a ordenada deste ponto é igual a 1.
Sem recorrer à calculadora, determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto A.

Teste Intermédio 12.º ano – 27.05.2009

65. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.
Determine, **recorrendo exclusivamente a métodos analíticos**, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 2.

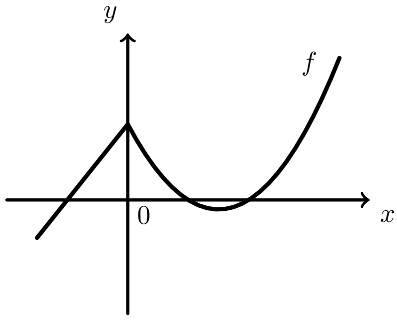
Exame – 2008, Ép. especial

66. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln(x^2+1)$ (ln designa logaritmo de base e).
Estude, **recorrendo exclusivamente a métodos analíticos**, a função f quanto à monotonia e à existência de extremos relativos, indicando os intervalos de monotonia e os valores dos extremos relativos, caso existam.

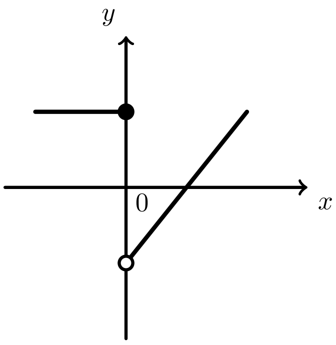
Exame – 2008, Ép. especial

67. A figura ao lado representa parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}$.

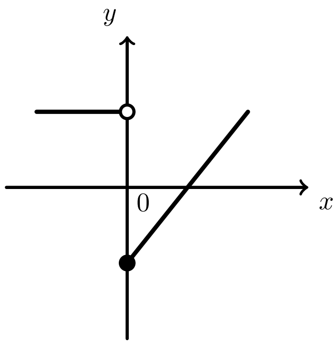
Em qual das figuras seguintes pode estar parte da representação gráfica de f', derivada de f?



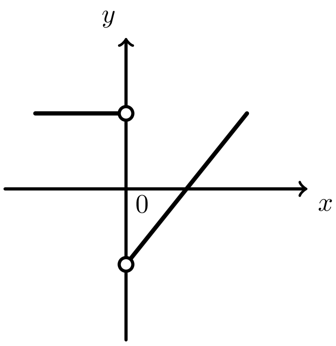
(A)



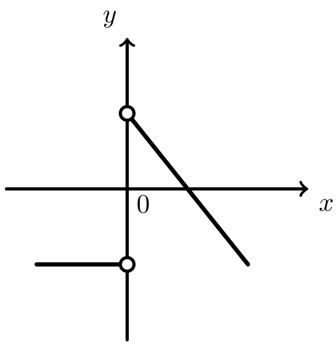
(B)



(C)



(D)



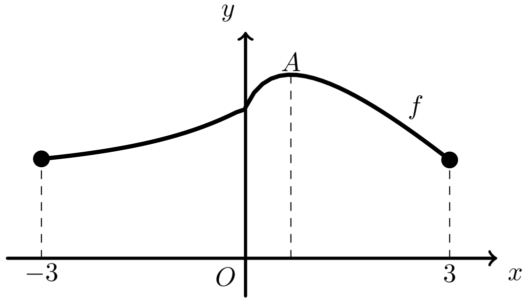
Exame – 2008, 1.ª fase

68. Seja h a função de domínio $]-1,+\infty[$, definida por $h(x) = 4 - x + \ln(x+1)$ (ln designa logaritmo de base e).
Usando **métodos analíticos**, estude a função h, quanto à monotonia, no seu domínio.
Indique os intervalos de monotonia e, se existir algum extremo relativo, determine-o.
Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use, pelo menos, duas casas decimais.

Exame – 2008, 1.ª fase

69. Seja f a função de domínio $[-3{,}3]$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1+x}{x} & \text{se } -3\leq x<0\\[2ex] 2-x+\ln(1+3x) & \text{se } 0\leq x\leq 3\end{cases}$$



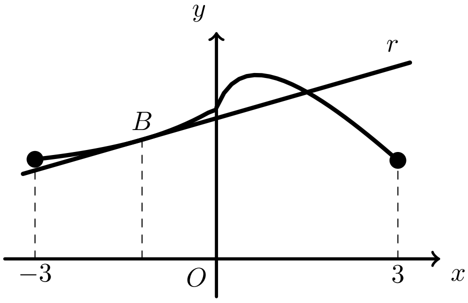
Na figura ao lado está representado o gráfico da função f
Tal como a figura sugere:

- A é o ponto do gráfico de f de ordenada máxima
- a abcissa do ponto A é positiva

69.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, determine a abcissa do ponto A.

69.2. Na figura seguinte está novamente representado o gráfico de f, no qual se assinalou um ponto B, no segundo quadrante.

A reta r é tangente ao gráfico de f, no ponto B.



Considere o seguinte problema:
Determinar a abcissa do ponto B, sabendo que a reta r tem declive 0,23

Traduza este problema por meio de uma equação e, **recorrendo à calculadora** resolva-a graficamente, encontrando assim um valor aproximado da abcissa do ponto B.
Pode realizar algum trabalho analítico antes de recorrer à calculadora.
Reproduza na sua folha de prova o(s) gráfico(s) obtido(s) na calculadora e apresente **o valor pedido arredondado às centésimas**.

Teste Intermédio 12.º ano – 29.04.2008

70. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $f(x)=1-\ln(x^2)$
Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, estude a função quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

Exame – 2007, 2.ª Fase

71. Admita que a intensidade da luz solar, x metros abaixo da superfície da água, é dada, numa certa unidade de medida, por

$$I(x)=ae^{-bx}\quad (x\geq 0)$$

a e b são constantes positivas que dependem do instante e do local onde é efetuada a medição.

Sempre que se atribui um valor a a e um valor a b obtemos uma função de domínio $\mathbb{R}_0^+$

Considere agora $b=0{,}05$ e $a=10$

Estude essa função quanto à monotonia e existência de assíntotas do seu gráfico.
Interprete os resultados obtidos no contexto da situação descrita.

Exame – 2007, 1.ª Fase

72. Seja a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln x} & \text{se } 0 < x < 1 \\ xe^{2-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

72.1. **Sem recorrer à calculadora**, estude a função f quanto à monotonia, no intervalo $]0,1[$

72.2. Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2.
Seja s a reta que passa na origem do referencial e é paralela à reta r.
A reta s interseta o gráfico de f num ponto.
Utilizando a sua calculadora, determine as coordenadas desse ponto. Apresente os valores arredondados às centésimas. Explique como procedeu, apresentando o gráfico, ou gráficos, obtidos na calculadora.

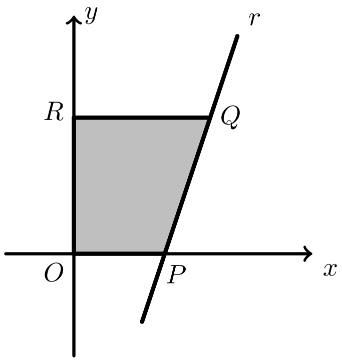
Exame – 2006, Ép. especial

73. Seja f a função, de domínio $]1, +\infty[$, definida por $f(x) = x + x\ln(x-1)$.

Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n. xOy, uma reta r e um trapézio $[OPQR]$.

- Q tem abcissa 2 e pertence ao gráfico de f (o qual não está representado na figura);
- r é tangente ao gráfico de f no ponto Q;
- P é o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox;
- R pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à do ponto Q.

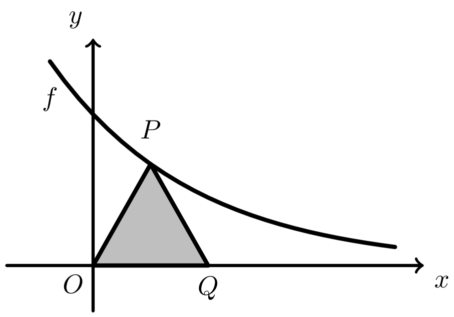
Sem recorrer à calculadora, determine a área do trapézio $[OPQR]$. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.



Exame – 2006, 2.ª fase

74. Na figura ao lado estão representados:
• parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-x}$
• um triângulo **isósceles** $[OPQ]$, $\left(\overline{PO} = \overline{PQ}\right)$ em que:

- O é a origem do referencial;
- P é um ponto do gráfico de f;
- Q pertence ao eixo das abcissas.

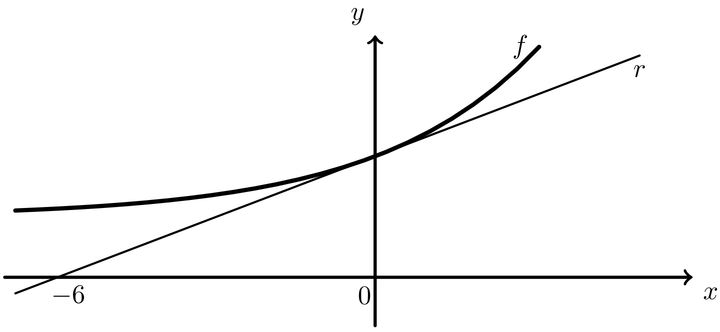


Considere que o ponto P se desloca no primeiro quadrante (eixos não incluídos), ao longo do gráfico de f.
O ponto Q acompanha o movimento do ponto P, deslocando-se ao longo do eixo das abcissas, de tal modo que $\overline{PO}$ permanece sempre igual a $\overline{PQ}$.
Seja A a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, que faz corresponder, à abcissa x do ponto P, a área do triângulo $[OPQ]$, definida por $A(x) = xe^{-x}$
Sem recorrer à calculadora, estude a função A quanto à monotonia e conclua qual é o valor máximo que a área do triângulo $[OPQ]$ pode assumir.

Exame – 2006, 1.ª fase

75. Na figura ao lado está representado, em referencial xOy, parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{ax} + 1$ (a é uma constante real positiva).

Na figura está também representada a reta r, que é tangente ao gráfico de f no ponto em que este interseta o eixo Oy.



A reta r interseta o eixo Ox no ponto de abcissa -6.
Qual é o valor de a?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{3}{2}$

Exame – 2005, Ép. especial

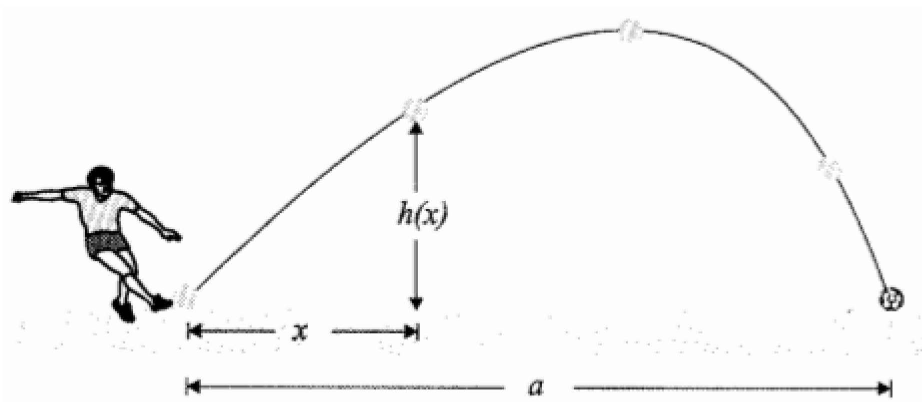
76. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- f tem derivada finita em todos os pontos de $\mathbb{R}$
- $f(0) = -1$
- f é estritamente crescente em $\mathbb{R}^-$ e é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^+$

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = [f(x)]^2$.
Prove que 1 é o mínimo da função g.

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)

77. Na figura ao lado está representada a trajetória de uma bola de futebol, depois de ter sido pontapeada por um jogador de da seleção portuguesa, durante um treino de preparação para o EURO-2004.



Designou-se por a a distância, em metros, entre o ponto onde a bola foi pontepeada e o ponto onde ela caiu.

Considere a função h definida em $[0,a]$ por

$h(x) = 2x + 10\ln(1 - 0{,}1x)$ (ln designa logaritmo de base e)

Admita que $h(x)$ é a distância, em metros, da bola ao solo, no momento em que a sua projeção no solo se encontra a x metros do local onde foi pontapeada.
Sem utilizar a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, estude a função h quanto à monotonia e conclua qual foi a maior altura que a bola atingiu, relativamente ao solo, depois de pontapeada. Apresente o resultado em metros, arredondado às centésimas.

Exame – 2005, 2.ª Fase (cód. 435)

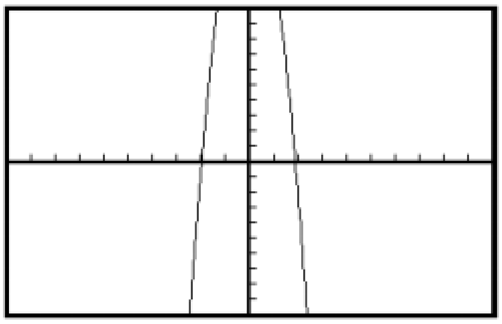
78. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, tal que a sua **derivada** é dada por

$$f'(x) = 2 + x\ln x, \ \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.
Seja P o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox.
Sabendo que $f(1) = 3$, determine a abcissa do ponto P, **sem recorrer à calculadora**.

Exame – 2005, 1.ª Fase (cód. 435)

79. De uma certa função h, **contínua** em $\mathbb{R}$, obteve-se com a calculadora, na janela de visualização *standard* $[-10{,}10] \times [-10{,}10]$, o gráfico apresentado na figura ao lado.
A função h é crescente em $[-3{,}0]$ e é decrescente em $[0{,}3]$.
Qual das afirmações seguintes **pode** ser verdadeira?



(A) $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = +\infty$ **(B)** A função h é ímpar

(C) $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = 10$ **(D)** $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) > 0$

Exame – 2004, Ép. especial (cód. 435)

80. Seja f a função definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{se } x < 0 \\[2ex] \dfrac{3x+2}{2x+2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

Sem recorrer à calculadora, estude a função f quanto à monotonia em $\mathbb{R}^+$.

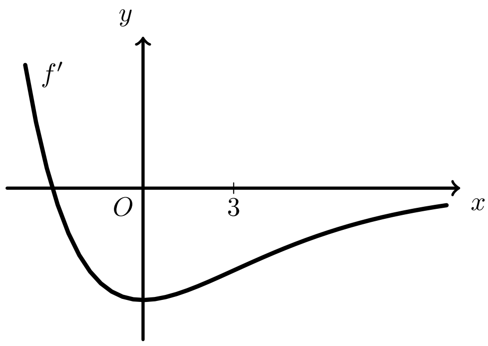
Exame – 2004, Ép. especial (cód. 435)

81. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio.

Na figura ao lado encontra-se parte do gráfico de f', função derivada de f
Sabe-se ainda que $f(0) = 2$

Qual pode ser o valor de $f(3)$?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 5 **(D)**7



Exame – 2004, 2.ª Fase (cód. 435)

82. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$
Sem recorrer à calculadora, determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

Exame – 2004, 2.ª Fase (cód. 435)

83. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1 + 3x^2e^{-x}$
Sem recorrer à calculadora, mostre que a função f tem um único mínimo relativo e determine-o.

Exame – 2004, 1.ª Fase (cód. 435)

84. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$

Sem recorrer à calculadora, estude a função quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

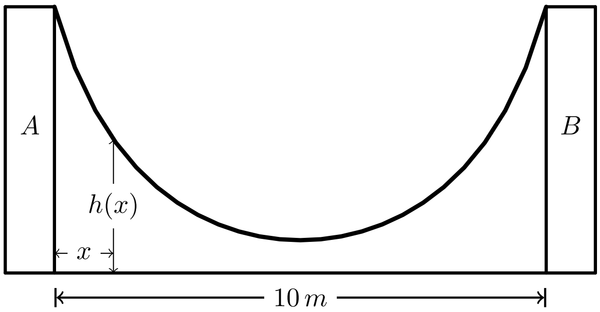
Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)

85. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cuja expressão analítica é um polinómio do quarto grau, que tem uma raiz dupla x_0. Prove que o eixo Ox é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa x_0.

Sugestão: tenha em conta que, se x_0 é uma raiz dupla do polinómio que define a função g, então tem-se $g(x) = (x - x_0)^2(ax^2 + bx + c)$

Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)

86. Uma rampa de desportos radicais foi construída entre duas paredes, A e B, distanciadas de 10 metros, como se mostra na figura ao lado.



Considere a função h definida por

$$h(x) = 15 - 4\ln(-x^2 + 10x + 11)$$

(ln designa logaritmo de base e)

Admita que $h(x)$ é a altura, em metros, do ponto da rampa situado a x metros à direita da parede A.

Sem recorrer à calculadora, estude a função h quanto à monotonia e conclua daí que, tal como a figura sugere, é num ponto equidistante das duas paredes que a altura da rampa é mínima.

Exame – 2003, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

87. Num laboratório, foi colocado um purificador de ar.
Num determinado dia, o purificador foi ligado às zero horas e desligado algum tempo depois.
Ao longo desse dia, o nível de poluição do ar **diminuiu**, enquanto o purificador esteve ligado.
Uma vez o purificador desligado, o nível de poluição do ar **começou de imediato a aumentar**.
Admita que o nível de poluição do ar no laboratório, medido em mg/l de ar, às t horas desse dia, pode ser dado por

$$P(t) = 1 - \frac{\ln(t+1)}{t+1}\,,\ \ t \in [0,24] \qquad \text{(ln designa logaritmo de base } e\text{)}$$

Sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, resolva o seguinte problema:
Quanto tempo esteve o purificador de ar ligado?
Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades) e sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Exame – 2003, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

88. Prove que, para qualquer função quadrática, existe um e um só ponto do gráfico onde a reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exame – 2003, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

89. Considere as funções $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por:

$f(x) = \ln x$ (ln designa logaritmo de base e)

$g(x) = x^2 - 3$

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, estude, quanto à monotonia, a função $f - g$

Exame – 2002, Prova para militares (cód. 435)

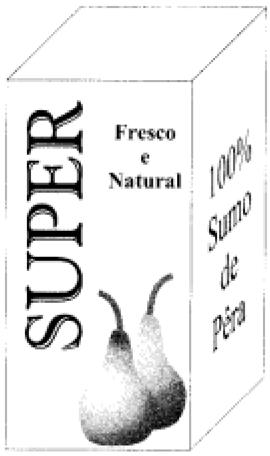
90. Uma nova empresa de refrigerantes pretende lançar embalagens de sumo de fruta, com capacidade de **dois litros**. Por questões de *marketing*, as embalagens deverão ter a forma de um **prisma quadrangular regular**.

A área total da embalagem é dada por

$$A(x) = \frac{2x^3 + 8}{x}$$

(x é o comprimento da aresta da base, em dm)

Utilizando métodos exclusivamente analíticos, mostre que existe um valor de x para o qual a área total da embalagem é mínima e determine-o.



Exame – 2002, 2.ª fase (cód. 435)

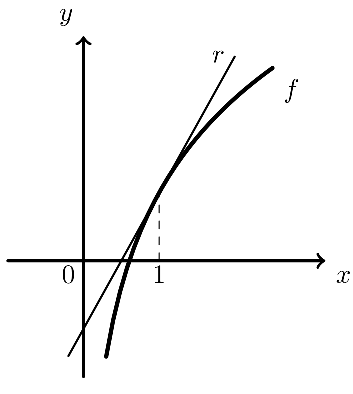
91. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, com derivada finita em todos os pontos do domínio, e **crescente**.
Sejam a e b dois quaisquer números reais. Considere as retas r e s, tangentes ao gráfico de f nos pontos de abcissas a e b, respetivamente.
Prove que as retas r e s não podem ser perpendiculares.

Exame – 2002, 2.ª fase (cód. 435)

92. Na figura ao lado estão representadas, num referencial o. n. xOy
- parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = 1 + 2\ln x$.
- a reta r, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1

Qual é o declive da reta r?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4



Exame – 2002, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

93. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.
Sabe-se que a sua **derivada**, f', é tal que $f'(x) = x - 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$
Relativamente à **função**, f qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) f é crescente em $\mathbb{R}$ **(B)** f é decrescente em $\mathbb{R}$

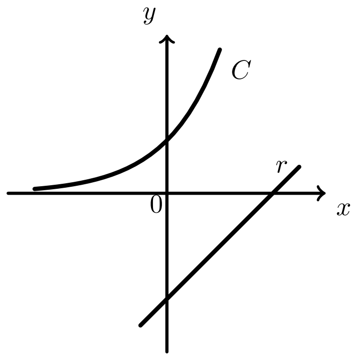
(C) f tem um mínimo para $x = 2$ **(D)** f em um máximo para $x = 2$

Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)

94. Na figura ao lado estão representadas, em referencial o. n. xOy

- uma curva C, gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$
- uma reta r, gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x - 2$

Determine uma equação da reta paralela à reta r e tangente à curva C, utilizando métodos exclusivamente analíticos.



Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)

95. Seja f uma função tal que a sua derivada, no ponto 3, é 4.

Indique o valor de $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9}$

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{3}{2}$ **(C)** 4 **(D)** 0

Exame – 2001, 2.ª fase (cód. 435)

96. A reta de equação $y = x$ é tangente ao gráfico de uma certa função f, no ponto de abcissa 0.

Qual das seguintes expressões pode definir a função f?

(A) $x^2 + x$ **(B)** $x^2 + 2x$ **(C)** $x^2 + 2x + 1$ **(D)** $x^2 + x + 1$

Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

97. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = 3x - 2\ln x$ (ln designa o logaritmo de base e). Mostre que a função tem um único mínimo, utilizando métodos exclusivamente analíticos.

Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

98. Malmequeres de Baixo é uma povoação com **cinco mil** habitantes.

98.1. Num certo, dia ocorreu um acidente em Malmequeres de Baixo, que foi testemunhado por algumas pessoas. Admita que, t horas depois do acidente o número (expresso em **milhares**) de habitantes de Malmequeres de Baixo que sabiam do ocorrido eram, aproximadamente,

$$f(t) = \frac{5}{1 + 124e^{-0{,}3t}}\ ,\quad t \geq 0$$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, estude a função f quanto à monotonia. Interprete a conclusão a que chegou, no contexto do problema.

98.2. Alguns dias depois, ocorreu outro acidente no mesmo local, testemunhado pelas mesmas pessoas. No entanto, neste segundo acidente, a notícia propagou-se mais depressa, no sentido em que, decorrido o mesmo tempo após o acidente, mais pessoas sabiam do ocorrido. Admita que, t horas depois deste segundo acidente o número (expresso em **milhares**) de habitantes de Malmequeres de Baixo que sabiam do ocorrido eram, aproximadamente,

$$g(t) = \frac{5}{1 + ae^{-bt}}\ ,\quad t \geq 0 \qquad \text{(para certos valores de } a \text{ e de } b\text{).}$$

Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, refira o que pode garantir sobre os valores de a e de b, comparando cada um deles com o valor da constante correspondente da expressão analítica de f.

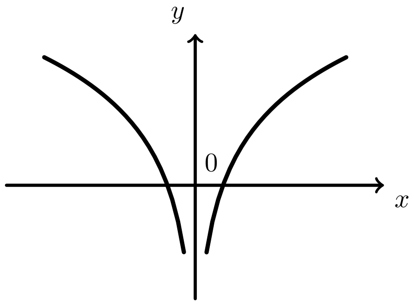
Exame – 2001, Prova modelo (cód. 435)

99. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, definida por $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$

Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo exclusivamente a processos analíticos.

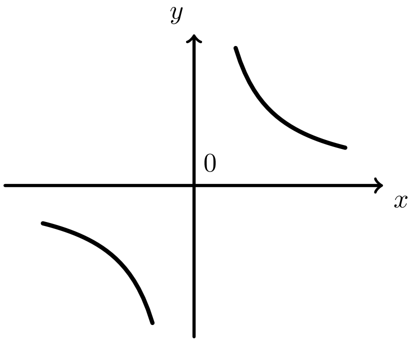
Exame – 2000, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

100. Na figura ao lado está parte da representação gráfica de uma função g, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

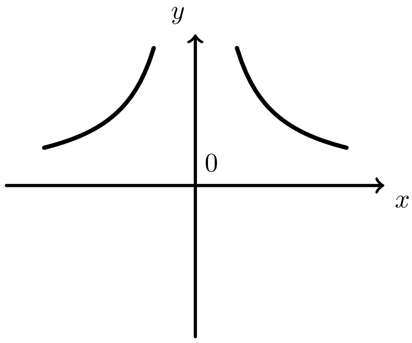


Qual das figuras seguintes poderá ser parte da representação gráfica da função g', **derivada** de g?

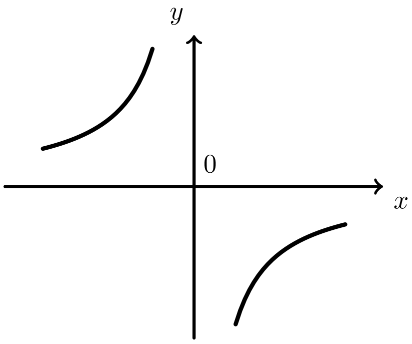
(A)



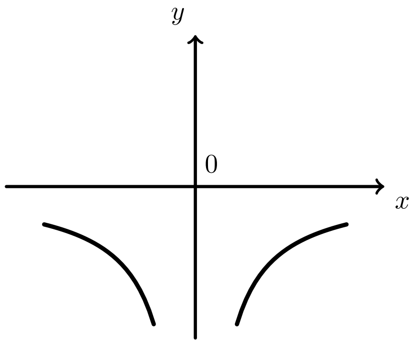
(B)



(C)



(D)



Exame – 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

101. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x(x^2 + x)$
Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, verifique que $f'(x) = e^x(x^2 + 3x + 1)$ e determine uma equação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa 0.

Exame – 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

102. Um laboratório farmacêutico lançou no mercado um novo analgésico: o *AntiDor*.
A concentração deste medicamento, em decigramas por litro de sangue, t horas após ter sido administrado a uma pessoa, é dado por

$$c(t) = t^2 e^{-0,6t} \qquad (t \geq 0)$$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, determine o valor de t, para o qual é máxima a concentração de *AntiDor* no sangue de uma pessoa que o tenha tomado.
Calcule o valor dessa concentração máxima, apresentando o resultado na unidade considerada, com aproximação às décimas.

Exame – 2000, Prova modelo (cód. 435)

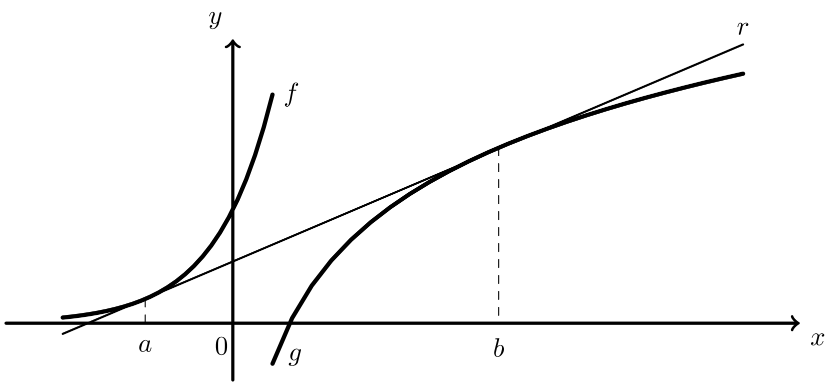
103. Considere uma função h de domínio $\mathbb{R}^+$.
A reta de equação $y = -2$ é assíntota do gráfico de h.
Seja h' a função derivada de h.
Indique qual dos seguintes pode ser o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} h'(x)$

(A) 0 **(B)** -2 **(C)** $+\infty$ **(D)** $-\infty$

Exame – 1999, Prova para militares (cód. 135)

104. Na figura ao lado estão representadas graficamente duas funções:

- a função f, definida em $\mathbb{R}$, por $f(x) = e^x$
- a função g, definida em $\mathbb{R}^+$, por $g(x) = \ln x$ (ln designa o logaritmo de base e)



A reta r é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a e é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa b.
Qual das seguintes igualdades é verdadeira?

(A) $e^a = \frac{1}{b}$ **(B)** $e^a = \ln b$ **(C)** $e^{a+b} = 1$ **(D)** $\ln(ab) = 1$

Exame – 1999, 2.ª fase (cód. 135)

105. Ao ser lançado, um foguetão é impulsionado pela expulsão dos gases resultantes da queima de combustível numa câmara.
Desde o arranque até se esgotar o combustível, a velocidade do foguetão, em quilómetros por segundo, é dada por
$v(t) = -3\ln(1 - 0{,}005t) - 0{,}01t$ (ln designa logaritmo de base e).
A variável t designa o tempo, em segundos, após o arranque.
Verifique que a derivada da função v, no intervalo [0,160], é positiva e conclua qual é velocidade máxima que o foguetão atinge nesse intervalo de tempo. Apresente o resultado em quilómetros por segundo, arredondado às décimas.

Exame – 1999, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

106. Na figura ao lado estão representadas:

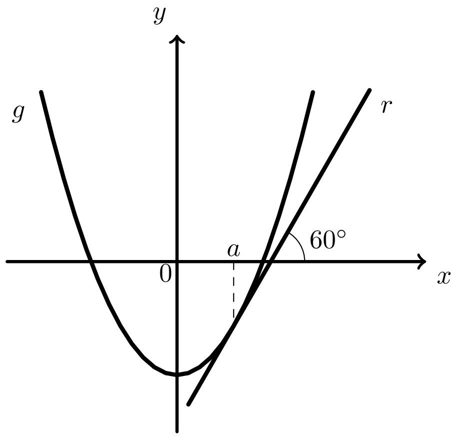
- parte do gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \sqrt{3}x^2 - 1$$

- uma reta r, tangente ao gráfico de g, no ponto de abcissa a

A inclinação da reta r é 60º.

Indique o valor de a



(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **(B)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

Exame – 1999, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

107. Foi administrado um medicamento a um doente às 9 horas da manhã de um certo dia.
A concentração desse medicamento, em miligrama por mililitro de sangue, t **horas** após ter sido administrado, é dada por

$$C(t) = 2te^{-0,3t}$$

Recorrendo à derivada da função C, determine o instante em que a concentração de medicamento no sangue do doente foi máxima. Apresente o resultado em horas e minutos.

Exame – 1999, Prova modelo (cód. 135)

108. Seja g a função de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $g(x) = \ln x$.
No gráfico da função g existe um ponto onde a reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.
Qual é a abcissa desse ponto?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** e **(D)** $\ln 2$

Exame – 1998, Prova para militares (cód. 135)

109. De uma certa função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que:

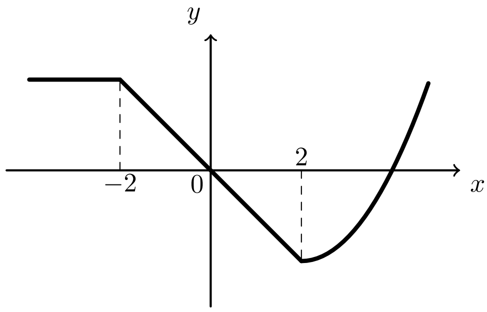
- $f(1) = 0$
- a sua derivada, f', é definida por $f'(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$

Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

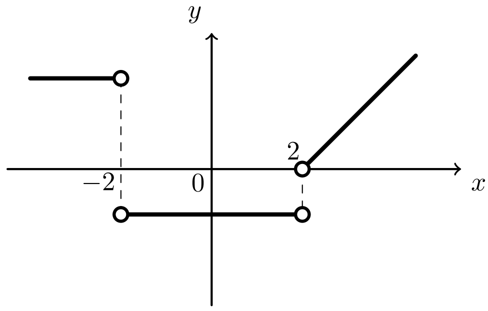
Exame – 1998, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

110. Na figura ao lado está a representação gráfica de uma função h, de domínio $\mathbb{R}$.

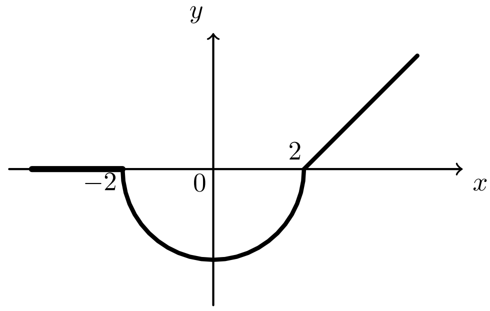
Em qual das opções seguintes pode estar a representação gráfica da função h', função derivada de h?



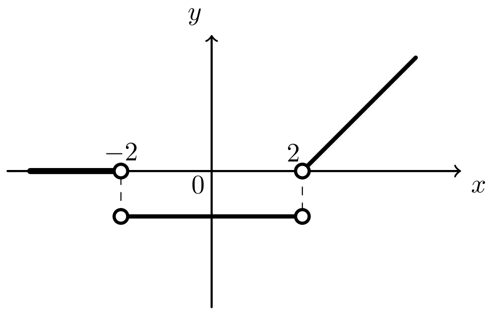
(A)



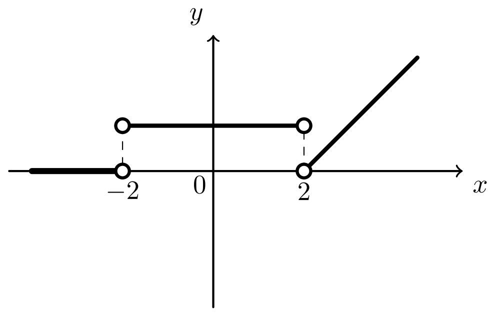
(B)



(C)



(D)



Exame – 1998, Prova modelo (cód. 135)

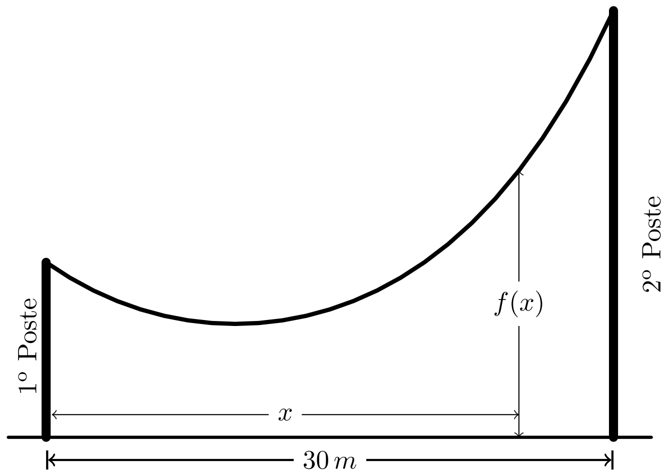
111. Um fio encontra-se suspenso entre dois postes. A distância entre ambos é de 30 metros.

Considere a função f, definida por

$$f(x) = 5\left(e^{1-0,1x} + e^{0,1x-1}\right) \qquad x \in [0,30]$$

Admita que $f(x)$ é a distância ao solo, em metros, do ponto do fio situado x metros à direita do primeiro poste.

Recorrendo ao estudo da derivada da função f, determine a distância ao primeiro poste do ponto do fio mais próximo do solo.



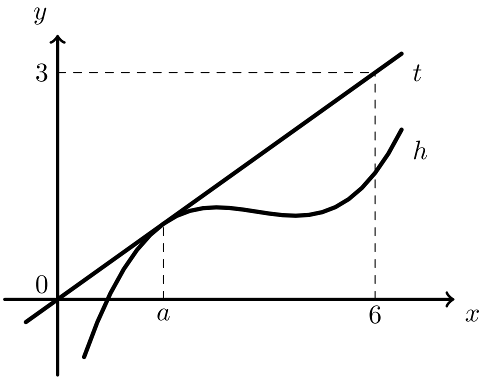
Exame – 1998, Prova modelo (cód. 135)

112. Na figura ao lado está a representação gráfica de uma função h, de domínio $\mathbb{R}$, e de uma reta t, tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa a.

A reta t passa pela origem do referencial e pelo ponto de coordenadas (6,3).

Qual é o valor de $h'(a)$?

(A) $-\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{6}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$



Exame – 1997, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)