Funções (12.º ano)

1.ª derivada

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução

1. Designando por m e n as abcissas dos pontos A e B, temos que as respetivas coordenadas e as do ponto médio são:

   - $A\big(m,h(m)\big) = (m,am^2)$
   - $B\big(n,h(n)\big) = (n,an^2)$
   - $M\left(\dfrac{m+n}{2},\dfrac{am^2+an^2}{2}\right)$

   Como a derivada da função h é $h'(x) = \big(ax^2\big)' = 2ax$, os declives das retas tangentes ao gráfico de h, nos pontos A e B, são:

   - $m_A = h'(m) = 2am$
   - $m_B = h'(n) = 2an$

   E assim, designado por podemos determinar uma expressão para a ordenada da origem para cada uma das equações da retas, substituindo a expressão do declive e das coordenadas dos pontos de tangência:

   - $y = m_A \times x + b_A \Leftrightarrow am^2 = 2am \times m + b_A \Leftrightarrow am^2 - 2am^2 = b_A \Leftrightarrow -am^2 = b_A$
   - $y = m_B \times x + b_B \Leftrightarrow an^2 = 2an \times n + b_B \Leftrightarrow an^2 - 2an^2 = b_B \Leftrightarrow -an^2 = b_B$

   Ou seja as equações das retas tangentes nos pontos A e B, são, respetivamente, $y = 2max - am^2$ e $y = 2nax - an^2$, pelo que a abcissa do ponto de interseção das retas é a solução da equação:

   $$2max - am^2 = 2nax - an^2 \Leftrightarrow \frac{2max - am^2}{a} = \frac{2nax - an^2}{a} \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow 2mx - m^2 = 2nx - n^2 \Leftrightarrow 2mx - 2nx = m^2 - n^2 \Leftrightarrow x(2m-2n) = m^2 - n^2 \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow x = \frac{(n-m)(n+m)}{2(m-n)} \Leftrightarrow x = \frac{n+m}{2}$$

   Como as abcissas do ponto médio e do ponto de interseção das tangentes são iguais, logo, o ponto de interseção das tangentes pertence à reta vertical que contém o ponto médio.

   Exame – 2023, Ép. especial

2. Temos que:

   - pela observação do referencial **I**, podemos concluir que $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) < 0$, e como a função é diferenciável, então é contínua, em particular em $x = 0$, logo $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = g(0)$, pelo que $g(0) > 0$ o que é incompatível com a segunda condição definida ($g(0) < 0$) pelo que no referencial **I** não está representado parte do gráfico da função g;
   - pela observação do referencial **II**, podemos concluir que a função é crescente no intervalo $]-\infty,-1[$, ou seja, $g'(x) > 0, \forall x \in]-\infty,-1[$ o que é incompatível com a terceira condição definida ($g'(x) < 0, \forall x \in]-\infty,-1[$) pelo que no referencial **II** não está representado parte do gráfico da função g;
   - pela observação do referencial **III**, podemos concluir que $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = -\infty$, e como a função é par, então $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = -\infty$, o que é incompatível com a primeira condição definida ($\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$) pelo que no referencial **III** também não está representado parte do gráfico da função g.

Exame – 2023, 2.ª Fase

3. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x + 2x}{x}\right)' = \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{2x}{x}\right)' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' + (2)' = \frac{(\ln x)' \times x - (x)' \times \ln x}{x^2} + 0 =$$

$$= \frac{\frac{(x)'}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Calculando os zeros da derivada da função f, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \underset{x>0}{\Rightarrow} 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow 1 = \ln x \Leftrightarrow x = e^1 \Leftrightarrow x = e$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		e	$+\infty$
$1 - \ln x$	n.d.	+	0	−
x^2	n.d.	+	+	+
f'	n.d.	+	0	−
f	n.d.	↗	Máx.	↘

Assim, podemos concluir que a função f:

- é crescente no intervalo $]0,e]$;
- é decrescente no intervalo $[e,+\infty[$;
- tem um máximo relativo que é:

$$f(e) = \frac{\ln e + 2e}{e} = \frac{\ln e}{e} + \frac{2e}{e} = \frac{1}{e} + 2$$

Exame – 2023, 2.ª Fase

4. Designando por a a abcissa dos pontos P e Q , determinamos as equações das retas s e t:

- $P\left(a,\dfrac{k}{a}\right)$
- $f'(x) = \dfrac{(k)' \times x - (x)' \times k}{x^2} = \dfrac{0-k}{x^2} = -\dfrac{k}{x^2}$
- $m_s = f'(a) = -\dfrac{k}{a^2}$

  $y_P = -\dfrac{k}{a^2} \times x_P + b \Leftrightarrow \dfrac{k}{a} = -\dfrac{k}{a^2} \times a + b \Leftrightarrow \dfrac{k}{a} = -\dfrac{k}{a} + b \Leftrightarrow \dfrac{k}{a} + \dfrac{k}{a} = b \Leftrightarrow \dfrac{2k}{a} = b$
- $s : y = -\dfrac{k}{a^2}x + \dfrac{2k}{a}$

- $Q\left(a,-\dfrac{k}{a}\right)$
- $g'(x) = -\dfrac{(k)' \times x - (x)' \times k}{x^2} = -\dfrac{0-k}{x^2} = \dfrac{k}{x^2}$
- $m_t = g'(a) = \dfrac{k}{a^2}$

  $y_Q = \dfrac{k}{a^2} \times x_Q + b \Leftrightarrow -\dfrac{k}{a} = \dfrac{k}{a^2} \times a + b \Leftrightarrow -\dfrac{k}{a} = \dfrac{k}{a} + b \Leftrightarrow -\dfrac{k}{a} - \dfrac{k}{a} = b \Leftrightarrow -\dfrac{2k}{a} = b$
- $t : y = \dfrac{k}{a^2}x - \dfrac{2k}{a}$

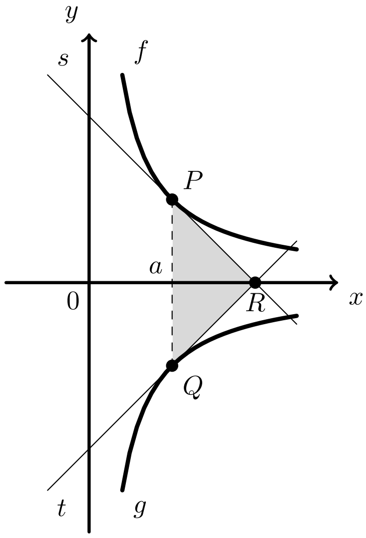
Determinando as coordenadas do ponto R, temos: $\begin{cases} y = -\dfrac{k}{a^2}x + \dfrac{2k}{a} \\ \\ y = \dfrac{k}{a^2}x - \dfrac{2k}{a} \end{cases}$

Ou seja a abcissa do ponto R, é:

$$\frac{k}{a^2}x - \frac{2k}{a} = -\frac{k}{a^2}x + \frac{2k}{a} \Leftrightarrow \frac{k}{a^2}x + \frac{k}{a^2}x = \frac{2k}{a} + \frac{2k}{a} \Leftrightarrow \frac{2kx}{a^2} = \frac{4k}{a} \Leftrightarrow \frac{2kx}{k} = \frac{4a^2}{a} \Leftrightarrow 2x = 4ax = 2a$$

E a ordenada do ponto R é:

$$y_R = \frac{k}{a^2}x_R - \frac{2k}{a} = \frac{k}{a^2} \times 2a - \frac{2k}{a} = \frac{k}{a^2} \times 2a - \frac{2k}{a} = \frac{2k}{a} - \frac{2k}{a} = 0$$



Assim, considerando $[PQ]$ como a base do triângulo $[PQR]$, temos:

$$\overline{PQ} = x_P + |x_Q| = \frac{k}{a} + \left|-\frac{k}{a}\right| = \frac{2k}{a}$$

E a medida da altura correspondente é:

$$x_R - a = 2a - a = a$$

Logo, a área do triângulo $[PQR]$ é:

$$A_{[PQR]} = \frac{\overline{PQ} \times (x_R - a)}{2} = \frac{\dfrac{2k}{a} \times a}{2} = \frac{2k}{2} = k$$

Exame – 2023, 2.ª Fase

5. Como o declive da reta tangente ao gráfico de f, é dado por $f'(x)$, começamos por derivar a função f:

$$f'(x) = \left(ax^2 + bx\right) = 2ax + b$$

Como sabemos que o declive da reta tangente é a, a abcissa do ponto de tangência é a solução da equação $f'(x) = a$, e desta forma temos:

$$f'(x) = a \Leftrightarrow 2ax + b = a \Leftrightarrow 2ax = a - b \Leftrightarrow x = \frac{a-b}{2a}$$

Assim, podemos determinar a ordenada do ponto de tangência:

- através da equação da reta tangente:

$$y = a\left(\frac{a-b}{2a}\right) + b = \frac{a-b}{2} + b = \frac{a-b}{2} + \frac{2b}{2} = \frac{a-b+2b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

- através da expressão algébrica da função f:

$$f\left(\frac{a-b}{2a}\right) = a\left(\frac{a-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{a-b}{2a}\right) = a\left(\frac{a^2-2ab+b^2}{4a^2}\right) + \frac{ba-b^2}{2a} = \frac{a^2-2ab+b^2}{4a} + \frac{ba-b^2}{2a} =$$

$$= \frac{a^2-2ab+b^2}{4a} + \frac{2ba-2b^2}{4a} = \frac{a^2-2ab+b^2}{4a} + \frac{2ba-2b^2}{4a} = \frac{a^2-b^2}{4a}$$

Desta forma, igualando as duas expressões da ordenada do ponto de tangência, temos:

$$\frac{a+b}{2} = \frac{a^2-b^2}{4a} \Leftrightarrow \frac{4a}{2} = \frac{(a-b)(a+b)}{a+b} \Leftrightarrow 2a = a - b \Leftrightarrow 2a - a = -b \Leftrightarrow a = -b$$

Assim, temos que:

- a abcissa do ponto de tangência é: $\dfrac{a-b}{2a} = \dfrac{a+a}{2a} = \dfrac{-b-b}{2(-b)} = \dfrac{-2b}{-2b} = 1$;
- a ordenada do ponto de tangência é: $\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{-b+b}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$.

Ou seja o ponto de tangência tem coordenadas (1,0).

Exame – 2023, 1.ª Fase

6. Determinando a expressão da função derivada, temos:

$$g'(x) = \big(g(x)\big)' = \big(\ln(1+e^x) - x\big)' = \big(\ln(1+e^x)\big)' - (x)' = \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} - 1 = \frac{(1)' + (e^x)'}{1+e^x} - 1 =$$

$$= \frac{0+e^x}{1+e^x} - 1 = \frac{e^x}{1+e^x} - 1$$

O declive da reta tangente ao gráfico de g, no ponto de abcissa 0, é dado por:

$$m = g'(0) = \frac{e^0}{1+e^0} - 1 = \frac{1}{1+1} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico de abcissa 0, temos:

$$g(0) = \ln(1+e^0) - 0 = \ln(1+1) = \ln 2$$

Como o ponto de abcissa 0, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de b:

$$\ln 2 = -\frac{1}{2} \times 0 + b \Leftrightarrow \ln 2 = b$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0, é:

$$y = -\frac{1}{2} \times x + \ln 2 \Leftrightarrow y = -\frac{x}{2} + \ln 2$$

Assim, as coordenadas do pontos A e B, são:

- $A(0, \ln 2)$ porque $g(0) = \ln 2$
- $B(2\ln 2{,}0)$ porque $0 = -\frac{x}{2} + \ln 2 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \ln 2 \Leftrightarrow x = 2\ln 2$

E assim, a área do triângulo $[OAB]$ é:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{\ln 2 \times 2\ln 2}{2} = \frac{2(\ln 2)^2}{2} = (\ln 2)^2$$

Exame – 2022, Ép. especial

7. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f, para estudar a monotonia da função e a existência de extremos:

$$f'(x) = \left(\sqrt{kx} - \ln(kx)\right)' = \left(\sqrt{kx}\right)' - \left(\ln(kx)\right)' = \left((kx)^{\frac{1}{2}}\right)' - \frac{(kx)'}{kx} = \frac{1}{2} \times (kx)^{1-\frac{1}{2}} \times (kx)' - \frac{k}{kx} =$$

$$= \frac{1}{2} \times (kx)^{-\frac{1}{2}} \times k - \frac{k}{kx} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{kx}} \times k - \frac{k}{kx} = \frac{k}{2\sqrt{kx}} - \frac{k}{kx} = \frac{k^2x - 2k\sqrt{kx}}{2kx\sqrt{kx}} =$$

$$= \frac{k\left(kx - 2\sqrt{kx}\right)}{k \times 2x\sqrt{kx}} \underset{k\neq 0}{=} \frac{kx - 2\sqrt{kx}}{2x\sqrt{kx}}$$

Calculando os zeros da derivada da função f, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{kx - 2\sqrt{kx}}{2x\sqrt{kx}} = 0 \Leftrightarrow kx - 2\sqrt{kx} = 0 \wedge \underbrace{2x\sqrt{kx} \neq 0}_{\text{Cond. universal para } x>0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow kx = 2\sqrt{kx} \Rightarrow (kx)^2 = \left(2\sqrt{kx}\right)^2 \Leftrightarrow (kx)^2 = 4kx \Leftrightarrow \frac{(kx)^2}{kx} = 4 \underset{kx\neq 0}{=} kx = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{k}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$\frac{4}{k}$	$+\infty$
$kx - 2\sqrt{kx}$	n.d.	$-$	0	$+$
$2x\sqrt{kx}$	n.d.	$+$	$+$	$+$
f'	n.d.	$-$	0	$+$
f	n.d.	$\searrow$	min	$\nearrow$

Assim, podemos concluir que a função f tem um mínimo absoluto em $x = \frac{4}{k}$ porque é decrescente no intervalo $\left]0, \frac{4}{k}\right[$ e crescente no intervalo $\left]\frac{4}{k}, +\infty\right[$.

O valor do mínimo é:

$$f\left(\frac{4}{k}\right) = \sqrt{k \times \frac{4}{k}} - \ln\left(k \times \frac{4}{k}\right) = \sqrt{4} - \ln 4 = 2 - \ln 4$$

Como a função é contínua, porque é o produto, a diferença e a composição de funções contínuas, e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{kx} - \ln(kx)\right) = \sqrt{k \times 0^+} - \ln(k \times 0^+) = \sqrt{0} - \ln(0^+) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

então o contradomínio de f é

$$D'_f = [2 - \ln 4, +\infty[$$

Exame – 2022, Ép. especial

8. A abcissa do ponto do gráfico de g em que a tangente é paralela à reta de equação $y = -2x$, ou seja, o ponto em que a tangente tem declive $m = -2$, é a solução da equação $g'(x) = -2$.

   Como em $]-\infty,0[$ temos $g'(x) = 3e^{2x} - 7e^x$, vem que:

   $$g'(x) = -2 \Leftrightarrow 3e^{2x} - 7e^x = -2 \Leftrightarrow 3\left(e^x\right)^2 - 7e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

   (considerando $y = e^x$)

   $$\Leftrightarrow 3y^2 - 7y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)} \Leftrightarrow y = \frac{7+5}{6} \vee y = \frac{7-5}{6} \Leftrightarrow y = 2 \vee y = \frac{1}{3}$$

   (como $y = e^x$)

   $$\Leftrightarrow e^x = 2 \vee e^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \ln 2 \vee x = \ln\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \ln 2 \vee x = \ln 1 - \ln 3 \Leftrightarrow x = \ln 2 \vee x = -\ln 3$$

   Como $\ln 2 \notin]-\infty,0[$, a abcissa do ponto do gráfico de g em que a tangente é paralela à reta de equação $y = -2x$, é $-\ln 3$.

   Exame – 2022, 2.ª Fase

9. Como os extremos da função correspondem aos zeros da função derivada associados à mudança de sinal, começamos por determinar a expressão da derivada da função f:

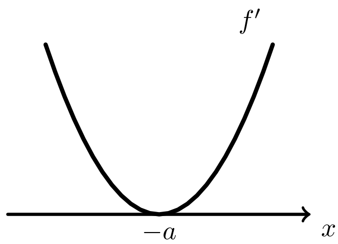
   $$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + ax^2 + a^2x + \sqrt{2}\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' + (ax^2)' + (a^2x)' + (\sqrt{2})' = 3 \times \frac{1}{3}x^2 + 2ax + a^2 + 0 =$$

   $$= x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$$

   Calculando os zeros da derivada da função f, temos:

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+a)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+a)(x+a) = 0 \Leftrightarrow x = -a \vee x = -a$

   Assim, temos que $-a$ é o único zero da derivada da função f, mas como não está associado a uma mudança de sinal, não corresponde a um extremo da função, e por não existir qualquer outro zero da derivada, a função não tem extremos.

   Exame – 2022, 2.ª Fase

10. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f, em $]-\infty,-2[$:

$$f'(x)=\left(\frac{e^{2-x}}{x+2}\right)'=\frac{\big((2-x)'e^{2-x}\big)(x+2)-e^{2-x}\times(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{-1\times e^{2-x}\times(x+2)-e^{2-x}\times 1}{x^2}=$$

$$=\frac{-e^{2-x}(x+2)-e^{2-x}}{(x+2)^2}=\frac{e^{2-x}\big(-(x+2)-1\big)}{(x+2)^2}=\frac{e^{2-x}\big(-x-3\big)}{(x+2)^2}$$

Calculando os zeros da derivada da função f, em $]-\infty,-2[$:

$$f'(x)=0\ \Leftrightarrow\ \frac{e^{2-x}\big(-x-3\big)}{(x+2)^2}=0\ \Leftrightarrow\ e^{2-x}\big(-x-3\big)=0\ \wedge\ \underbrace{(x+2)^2\neq 0}_{\text{P.V, pq }(x+2)^2>0}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \underbrace{e^{2-x}=0}_{\text{Impossível}}\vee -x-3=0\ \Leftrightarrow\ -3=x$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\infty$	-3		-2
e^{2-x}	$+$	$+$	$+$	n.d.
$(-x-3)$	$+$	0	$-$	n.d.
$e^{2-x}(-x-3)$	$+$	0	$-$	n.d.
$(x+2)^2$	$+$	$+$	$+$	n.d.
f'	$+$	0	$-$	n.d.
f	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	n.d.

Assim, podemos concluir que a função f:

- é crescente no intervalo $]-\infty,-3]$;
- é decrescente no intervalo $[-3,-2[$;
- tem um máximo relativo que é $f(-3)=\dfrac{e^{2-(-3)}}{-3+2}=\dfrac{e^{2+3}}{-1}=-e^5$

Exame – 2022, 1.ª Fase

11. Considerando a e b as abcissas dos pontos A e B, respetivamente, temos que as ordenadas são, respetivamente $\frac{k}{a}$ e $\frac{k}{b}$, pelo que o declive da reta AB é:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{k}{b} - \frac{k}{a}}{b-a} = \frac{\frac{ak}{ab} - \frac{bk}{ab}}{b-a} = \frac{\frac{ak-bk}{ab}}{b-a} = \frac{k(a-b)}{ab(b-a)} = \frac{k(a-b)}{ab \times (-1)(a-b)} \underset{a \neq b}{=} \frac{k}{-ab} = -\frac{k}{ab}$$

Considerando c como a abcissa do ponto em que a reta tangente ao gráfico de f é paralela à reta AB, temos que $m = f'(c)$. Assim temos que:

$$f'(x) = \left(\frac{k}{x}\right)' = \frac{k' \times x - x' \times k}{x^2} = \frac{0 \times x - 1 \times k}{x^2} = -\frac{k}{x^2}$$

E assim, $f'(c) = -\frac{k}{c^2}$, temos que:

$$m = f'(c) \Leftrightarrow -\frac{k}{ab} = -\frac{k}{c^2} \Leftrightarrow \frac{k}{ab} = \frac{k}{c^2} \Leftrightarrow c^2 = \frac{k \times ab}{k} \underset{k \neq 0}{\Leftrightarrow} c^2 = ab \underset{c>0}{\Leftrightarrow} c = \sqrt{ab}$$

Como $a < b$, então temos que:

- $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{a} \times \sqrt{a} < \sqrt{b} \times \sqrt{a} \Leftrightarrow a < \sqrt{ab}$
- $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{a} \times \sqrt{b} < \sqrt{b} \times \sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{ab} < b$

Assim, temos que $a < \sqrt{ab} < b$, e ainda que a, $\sqrt{ab}$ e b são termos consecutivos de uma progressão geométrica, porque o quociente dos termos consecutivos é constante (e igual à razão), ou seja:

$$\frac{\sqrt{ab}}{a} = \frac{b}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{ab}\right)^2 = a \times b \Leftrightarrow ab = ab \text{ (Proposição verdadeira)}$$

Exame – 2022, 1.ª Fase

12. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f, em $]-\infty,1[$:

$$f'(x) = \big(x-2+\ln(3-2x)\big)' = (x)' - (2)' + (\ln(3-2x))' = 1 - 0 + \frac{(3-2x)'}{(3-2x)} = 1 + \frac{0-2}{3-2x} = 1 - \frac{2}{3-2x}$$

Calculando os zeros da derivada da função f, em $]-\infty,1[$, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{3-2x} = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{3-2x} \underset{x\neq\frac{3}{2}}{\Leftrightarrow} 3-2x = 2 \Leftrightarrow 3-2 = 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2} = x$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1
f'	$+$	0	$-$	n.d.
f	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

Assim, podemos concluir que a função f:

- é crescente no intervalo $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left[\frac{1}{2},1\right[$;
- tem um máximo relativo que é:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 2 + \ln\left(3 - 2\times\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \ln(3-1) = -\frac{3}{2} + \ln(2) = \ln 2 - \frac{3}{2}$$

Exame – 2021, Ép. especial

13. Como a reta é tangente, simultaneamente, ao gráfico de f e ao gráfico de g, o seu declive corresponde ao valor das derivadas nos respetivos pontos de tangência.

Designado por a a abcissa do ponto A e por b a abcissa do ponto B, como as ordenadas dos pontos A e B, são, respetivamente $f(a) = 2a^2$ e $g(b) = -(b-1)^2$, então o declive da reta é:

$$m_{AB} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{2a^2 - (-(b-1)^2)}{a-b} = \frac{2a^2 + (b-1)^2}{a-b}$$

Por outro lado, temos que:

- $f'(x) = (2x^2)' = 2 \times 2x = 4x$, pelo que $m_{AB} = f'(a) = 4a$
- $g'(x) = \big(-x-1)^2\big)' = -2(x-1) = -2x+2$, pelo que $m_{AB} = g'(b) = -2b+2$
- $f'(a) = g'(b) \Leftrightarrow 4a = -2b+2 \Leftrightarrow 2a = -b+1 \Leftrightarrow b = -2a+1$

E assim, substituindo na expressão anterior, temos que:

$$m_{AB} = \frac{2a^2 + (b-1)^2}{a-b} = \frac{2a^2 + (-2a+1-1)^2}{a-(-2a+1)} = \frac{2a^2 + (-2a)^2}{a+2a-1)} = \frac{2a^2+4a^2}{3a-1} = \frac{6a^2}{3a-1}$$

Temos ainda que:

$$m_{AB} = f'(a) \Leftrightarrow \frac{6a^2}{3a-1} = 4a \underset{a\neq\frac{1}{3}}{\Leftrightarrow} 6a^2 = 4a(3a-1) \Leftrightarrow 6a^2 = 12a^2 - 4a \Leftrightarrow 6a^2 - 12a^2 + 4a = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6a^2 + 4a = 0 \Leftrightarrow -3a^2 + 2a = 0 \Leftrightarrow a(-3a+2) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee -3a+2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee 2 = 3a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \vee \frac{2}{3} = a \wedge a \neq \frac{1}{3}$$

Como a reta não é horizontal o declive não pode ser zero, pelo que a abcissa do ponto A é $a = \frac{2}{3}$ e a abcissa do ponto B é $b = -2a+1 = -2\left(\frac{2}{3}\right) + 1 = -\frac{4}{3} + 1 = -\frac{1}{3}$

Exame – 2021, Ép. especial

14. Para calcular o declive da reta tangente, no ponto de abcissa -2 começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x < 0$:

$$f'(x) = \left(\frac{x - e^{-x}}{x}\right)' = \frac{(x - e^{-x})' \times x - (x - e^{-x})(x)'}{x^2} = \frac{(x - e^{-x})' \times x - (x - e^{-x})(x)'}{x^2} =$$

$$= \frac{\big((x) - (e^{-x})'\big) \times x - (x - e^{-x}) \times 1}{x^2} = \frac{\big(1 - (-x)'e^{-x}\big) \times x - x + e^{-x}}{x^2} = \frac{\big(1 + e^{-x}\big)x - x + e^{-x}}{x^2}$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa -2 é:

$$m = f'(-2) = \frac{\big(1 + e^{-(-2)}\big)(-2) - (-2) + e^{-(-2)}}{(-2)^2} = \frac{\big(1 + e^2\big)(-2) + 2 + e^2}{4} =$$

$$= \frac{-2 - 2e^2 + 2 + e^2}{4} = \frac{-2e^2 + e^2}{4} = -\frac{e^2}{4}$$

Logo a equação da reta tangente é da forma $y = -\frac{e^2}{4}x + b$

Como $f(-2) = \frac{-2 - e^{-(-2}}{-2} = \frac{-2 - e^2}{-2} = 1 + \frac{e^2}{2}$, sabemos que o ponto $P\left(-2{,}1 + \frac{e^2}{3}\right)$ pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.

Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de b:

$$1 + \frac{e^2}{2} = -\frac{e^2}{4} \times (-2) + b \Leftrightarrow 1 + \frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{2} + b \Leftrightarrow 1 + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} = b \Leftrightarrow 1 = b$$

Pelo que a equação da reta tangente é:

$$y = -\frac{e^2}{4}x + 1$$

Exame – 2021, 2.ª Fase

15. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f, em $]0,1[$:

$$f'(x) = \left(-x^2(1+2\ln x)\right)' = (-x^2)'\times(1+2\ln x)+(-x^2)(1+2\ln x)' = -2x(1+2\ln x)-x^2\times((1)'+2(\ln x)') =$$

$$= -2x - 4x\ln x - x^2\left(0 + 2\times\frac{1}{x}\right) = -2x - 4x\ln x - \frac{2x^2}{x} \underset{x\neq 0}{=} -2x - 4x\ln x - 2x = -4x - 4x\ln x$$

Calculando os zeros da derivada da função f, em $]0,1[$, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x - 4x\ln x = 0 \Leftrightarrow -4x(1+\ln x) = 0 \Leftrightarrow -4x = 0 \vee 1+\ln x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee \ln x = -1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = e^{-1}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		e^{-1}		1
$-4x$	n.d.	$-$	$-$	$-$	n.d.
$1+\ln x$	n.d.	$-$	0	$+$	n.d.
f'	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
f	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

Assim, podemos concluir que a função f:

- é crescente no intervalo $\left]0,e^{-1}\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left[e^{-1},1\right[$;
- tem um máximo relativo que é:

$$f\left(e^{-1}\right) = -\left(e^{-1}\right)^2\left(1+2\ln\left(e^{-1}\right)\right) = -e^{-2}\times(1+2\times(-1)) = -e^{-2}\times(-1) = e^{-2}$$

Exame – 2021, 1.ª Fase

16. Como $1^2 - x^2 = (1-x)(1+x)$, temos que:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{1^2-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{-(x-1)(1+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{-(x-1)(1+x)} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{-(1+x)}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{-(1+x)} =$$

$$= f'(1)\times\frac{1}{-(1+1)} = -\frac{f'(1)}{2} = -\frac{\frac{2+\ln 1}{1}}{2} = -\frac{2-0}{2} = -1$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2020, 2.ª Fase

17. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g, em $]0,+\infty[$:

$$g'(x) = \left(x^2 \ln x\right)' = (x^2)' \times \ln x + x^2(\ln x)' = 2x\ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x\ln x + \frac{x^2}{x} \underset{x\neq 0}{=} 2x\ln x + x$$

Calculando os zeros da derivada da função g, em $]0,+\infty[$, temos:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x\ln x + x = 0 \Leftrightarrow x(2\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{0\notin]0,+\infty[}{x=0} \vee 2\ln x + 1 = 0 \Rightarrow 2\ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
g'	n.d.	$-$	0	$+$
g	n.d.	$\searrow$	min	$\nearrow$

Assim, podemos concluir que a função g:

- é decrescente no intervalo $\left]0,e^{-\frac{1}{2}}\right]$;
- é crescente no intervalo $\left[e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right[$;
- tem um mínimo relativo que é:

$$g\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = e^{-1} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \ln e = \frac{1}{e} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 = -\frac{1}{2e}$$

Exame – 2020, 1.ª Fase

18. Como o declive da reta tangente é igual ao valor da derivada, começamos por determinar a derivada da função para $x=-1$:

$$\big(x\ln(1-x)\big)' = \big(x\big)'\ln(1-x) + x\big(\ln(1-x)\big)' = 1 \times \ln(1-x) + x \times \frac{\big(1-x\big)'}{1-x} =$$

$$= \ln(1-x) + x \times \frac{0-1}{1-x} = \ln(1-x) - \frac{x}{1-x}$$

Logo, o declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -1 é:

$$g'(-1) = \ln(1-(-1)) - \frac{-1}{1-(-1)} = \ln 2 + \frac{1}{2} = 0{,}5 + \ln 2$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2019, Ép. especial

19. Para calcular o declive da reta tangente, no ponto de abcissa 1 começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x > 0$:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x-\ln x}\right)' = \frac{(x)'(x-\ln x) - x(x-\ln x)'}{(x-\ln x)^2} = \frac{1\times(x-\ln x) - x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln x)^2} =$$

$$= \frac{x-\ln x - x + \frac{x}{x}}{(x-\ln x)^2} \underset{x>0}{=} \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa 4 é:

$$m = f'(1) = \frac{1-\ln 1}{(1-\ln 1)^2} = \frac{1-0}{(1-0)^2} = 1$$

Logo a equação da reta tangente é da forma $y = 1\times x + b \Leftrightarrow y = x + b$

Como $f(1) = f'(1) = \frac{1}{1-\ln 1} = \frac{1}{1-0} = 1$, sabemos que o ponto $P(1{,}1)$ pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.
Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de b:

$$1 = 1 + b \Leftrightarrow 1 - 1 = b \Leftrightarrow 0 = b$$

Pelo que a equação da reta tangente é:

$$y = x - 0 \Leftrightarrow y = x$$

Exame – 2019, 1.ª Fase

20. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g, em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$:

$$g'(x)=\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)'=\frac{\big((-x)'e^{-x}\big)x-e^{-x}\times(x)'}{x^2}=\frac{-1\times e^{-x}\times x-e^{-x}\times 1}{x^2}=\frac{-xe^{-x}-e^{-x}}{x^2}$$

Calculando os zeros da derivada da função g, em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$:

$$g'(x)=0\ \Leftrightarrow\ \frac{-xe^{-x}-e^{-x}}{x^2}=0\ \Leftrightarrow\ \frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2}=0\ \Leftrightarrow\ e^{-x}(-x-1)=0\ \wedge\ \underbrace{x^2\neq 0}_{\text{P.V, pq } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \underbrace{e^{-x}=0}_{\text{Impossível}}\ \vee\ -x-1=0\ \Leftrightarrow\ -1=x$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
e^{-x}	$+$	$+$	$+$	n.d.	$+$
$(-x-1)$	$+$	0	$-$	n.d.	$-$
$e^{-x}(-x-1)$	$+$	0	$-$	n.d.	$-$
x^2	$+$	$+$	$+$	n.d.	$+$
g'	$+$	0	$-$	n.d.	$-$
g	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	n.d.	$\searrow$

Assim, podemos concluir que a função g:

- é decrescente no intervalo $]-1{,}0[$ e também no intervalo $]0,+\infty[$;
- é crescente no intervalo $]-\infty,-1]$;
- tem um máximo relativo que é $f(-1)=\dfrac{e^{-(-1)}}{-1}=\dfrac{e^1}{-1}=-e$

Exame – 2019, 1.ª Fase

21. Recorrendo à definição de derivada num ponto, temos que:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{3+\dfrac{e^x}{1-x}-\left(3+\dfrac{e^0}{1-0}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3+\dfrac{e^x}{1-x}-3-\dfrac{1}{1}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e^x}{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e^x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e^x-(1-x)}{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1-x)}{x(1-x)}=\frac{0}{0}\ \text{(Indeterminação)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1-x)}{x(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+x}{x(1-x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x(1-x)}+\frac{x}{x(1-x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-x}\right)=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{Lim. Notável}}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}+\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}=$$

$$=1\times\frac{1}{1-0}+\frac{1}{1-0}=1\times 1+1=2$$

Exame – 2018, 2.ª Fase

22. Temos que, pela definição de derivada num ponto, $f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

Assim, vem que:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{f(x) - f(2)} = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \to 2} \frac{1}{\frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2x}} = 4 \Leftrightarrow \frac{\lim\limits_{x \to 2} 1}{\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2x}} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x(x-2)}} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{1}{x} \times \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right)} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x} \times \lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{2} \times f'(2)} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = 4 \times \frac{1}{2} \times f'(2) \Leftrightarrow 1 = \frac{4}{2} \times f'(2) \Leftrightarrow 1 = 2f'(2) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = f'(2)$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2017, 2.ª Fase

23. Como os extremos relativos correspondem aos zeros da função derivada, começamos por determinar a expressão da função derivada da função g:

$$g'(x) = \left(\frac{k}{x} + f(x) \right)' = \left(\frac{k}{x} \right)' + \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{k' \times x - x' \times k}{x^2} + \frac{(\ln x)'x - x'(\ln x)}{x^2} =$$

$$= \frac{0 - 1 \times k}{x^2} + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} \underset{x \neq 0}{=} \frac{-k + 1 - \ln x}{x^2}$$

Como a função tem um extremo relativo para $x = 1$, então 1 é zero da função derivada ($g'(1) = 0$), pelo que podemos determinar o valor de k resolvendo a equação seguinte:

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{-k + 1 - \ln 1}{1^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-k + 1 - 0}{1} = 0 \Leftrightarrow -k + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = k$$

Exame – 2017, 2.ª Fase

24. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f:

$$f'(x) = \left(9 - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right)\right)' = (9)' - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right)' =$$

$$= 0 - 2{,}5\Big(\left(e^{1-0{,}2x}\right)' + \left(e^{0{,}2x-1}\right)'\Big) = -2{,}5\Big((1-0{,}2x)'\left(e^{1-0{,}2x}\right) + (0{,}2x-1)'\left(e^{0{,}2x-1}\right)\Big) =$$

$$= -2{,}5\Big(-0{,}2\left(e^{1-0{,}2x}\right) + 0{,}2\left(e^{0{,}2x-1}\right)\Big) = -2{,}5 \times 0{,}2\left(-e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right) =$$

$$= -0{,}5\left(-e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right)$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função ($[0{,}7]$), vem:

$$-0{,}5\left(-e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right) = 0 \Leftrightarrow -e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1} = 0 \Leftrightarrow e^{0{,}2x-1} = e^{1-0{,}2x} \Leftrightarrow$$

$$0{,}2x - 1 = 1 - 0{,}2x \Leftrightarrow 0{,}2x + 0{,}2x = 1 + 1 \Leftrightarrow 0{,}4x = 2 \Leftrightarrow 4x = 20 \Leftrightarrow x = 5$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		5		7
f'	+	+	0	−	−
f	min	↗	Máx	↘	min

Assim, podemos concluir que o valor máximo da função f é atingido quando $x = 5$, ou seja, a distância máxima entre a superfície da água e a ponte é:

$$f(5) = 9 - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2\times 5} + e^{0{,}2\times 5-1}\right) = 9 - 2{,}5\left(e^{1-1} + e^{1-1}\right) = 9 - 2{,}5\left(e^{0} + e^{0}\right) = 9 - 2{,}5 \times 2 = 9 - 5 = 4$$

Ou seja, o barco do clube náutico não pode passar por baixo da ponte, porque a distância da superfície da água ao topo do mastro é de 6 metros e a maior distância entre a superfície da água e a ponte é de 4 metros.

Exame – 2017, 1.ª Fase

25. Como $\overline{OP} = \overline{PQ}$, então o triângulo $[OPQ]$ é isósceles e $\overline{OQ} = 2a$

Como as coordenadas do ponto P são $(a,f(a))$ e as do ponto Q são $(2a,0)$, temos que o declive da reta PQ, é:

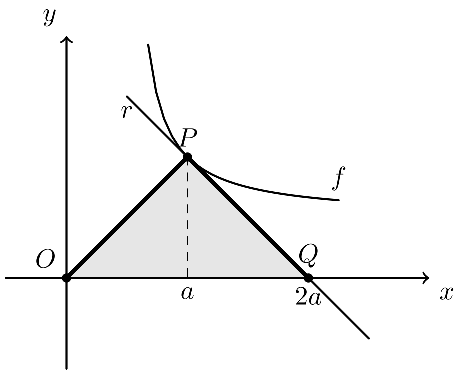
$$m_{PQ} = \frac{0 - f(a)}{2a - a} = -\frac{f(a)}{a}$$

Como a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a, então o declive da reta r, ou seja, da reta PQ, é igual a $f'(a)$, pelo que:

$$f'(a) = -\frac{f(a)}{a}$$

Desta forma, temos que:

$$f'(a) + \frac{f(a)}{a} = -\frac{f(a)}{a} + \frac{f(a)}{a} = 0$$



Exame – 2017, 1.ª Fase

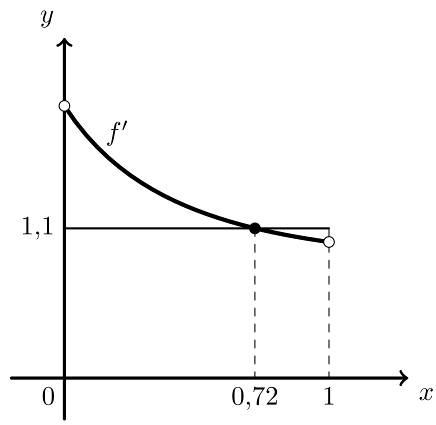
26. Como o declive da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto é igual ao valor numérico da derivada no ponto, ou seja, $f'(a) = 1{,}1$, determinamos a expressão da derivada relativa ao intervalo $]0,1[$:

$$f'(x) = (\ln(e^x + x))' = \frac{(e^x + x)'}{e^x + x} = \frac{(e^x)' + (x)'}{e^x + x} = \frac{e^x + 1}{e^x + x}$$

Assim, como o declive da reta tangente é 1,1, o valor de a é a solução da equação

$$f'(a) = 1{,}1 \Leftrightarrow \frac{e^x + 1}{e^x + x} = 1{,}1$$

Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função f', e a reta horizontal definida por $y = 1{,}1$ numa janela coerente com a restrição $x \in]0,1[$, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às centésimas) da abcissa do ponto A, $a = x_A \approx 0{,}72$



Exame – 2016, Ép. especial

27. Temos que:

$$p = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = f'(-1)$$

Recorrendo à expressão algébrica função derivada de f, vem que:

$$p = f'(-1) = e^{-1}\left((-1)^2 + (-1) + 1\right) = e^{-1}(1 - 1 + 1) = e^{-1} \times 1 = \frac{1}{e}$$

Logo, vem que:

$$q = -\frac{1}{p} = -\frac{1}{\frac{1}{e}} = -e$$

Como p é o valor da função derivada de f no ponto de abcissa -1, então p é o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa -1

E assim, o simétrico do inverso de p, ou seja, o valor de q, é o declive de uma reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1

Exame – 2016, 1.ª Fase

28. Temos que, pela definição de derivada num ponto $f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 6$

Assim, vem que

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x(x - 2)} = \lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x} \times \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}\right) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x} \times \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2015, Ép. especial

29. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f:

$$f'(x) = \left(x^2e^{1-x}\right)' = \left(x^2\right)' \times e^{1-x} + x^2 \times \left(e^{1-x}\right)' = 2xe^{1-x} + x^2 \times (1-x)' \times e^{1-x} =$$

$$= 2xe^{1-x} + x^2 \times (-1) \times e^{1-x} = 2xe^{1-x} - x^2e^{1-x}$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função ($\mathbb{R}_0^+$), vem:

$$2xe^{1-x} - x^2e^{1-x} = 0 \Leftrightarrow xe^{1-x}(2-x) = 0 \Leftrightarrow xe^{1-x} = 0 \lor 2-x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \lor \underbrace{e^{1-x} = 0}_{\text{Impossível}} \lor 2 = x \Leftrightarrow x = 0 \lor x = 2$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		2	$+\infty$
f'	0	$+$	0	$-$
f	min	$\nearrow$	Máx	$\searrow$

Assim, podemos concluir que a função f:

- é crescente no intervalo $[0,2]$;
- é decrescente no intervalo $[2,+\infty[$;
- tem um mínimo para $x = 0$
- tem um máximo para $x = 2$

Exame – 2015, Ép. especial

30. Para calcular o declive da reta tangente, no ponto de abcissa 4 começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x > 3$:

$$f'(x) = \left(\ln(x-3) - \ln x\right)' = \left(\ln(x-3)\right)' - \left(\ln x\right)' = \frac{(x-3)'}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa 4 é:

$$m = f'(4) = \frac{1}{4-3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Logo a equação da reta tangente é da forma $y = \frac{3}{4}x + b$

Como $f(4) = \ln(4-3) - \ln 4 = \ln 1 - \ln 4 = 0 - \ln 4 = -\ln 4$, sabemos que o ponto $P(4, -\ln 4)$ pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.
Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de b:

$$-\ln 4 = \frac{3}{4} \times 4 + b \Leftrightarrow -\ln 4 = 3 + b \Leftrightarrow -\ln 4 - 3 = b$$

Pelo que a equação da reta tangente é:

$$y = \frac{3}{4}x - \ln 4 - 3$$

Exame – 2015, 2.ª Fase

31. Para determinar o instante em que a distância é mínima, começamos por determinar a expressão da derivada da função d:

$$d'(t) = \left(10 + (5-t)e^{-0,05t}\right)' = (10)' + (5-t)' \times e^{-0,05t} + (5-t) \times (e^{-0,05t})' =$$

$$= 0 + (-1)e^{-0,05t} + (5-t) \times (-0,05t)'e^{-0,05t} = -e^{-0,05t} + (5-t) \times (-0,05e^{-0,05t}) =$$

$$= -e^{-0,05t} - 0,25e^{-0,05t} + 0,05te^{-0,05t} = e^{-0,05t}(-1 - 0,25 + 0,05t) = e^{-0,05t}(-1,25 + 0,05t)$$

Calculando os zeros da função derivada, com $t \geq 0$ vem:

$$d'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0,05t}(-1,25+0,05t) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-0,05t} = 0}_{\text{Eq.Imp.}} \vee -1,25 + 0,05t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,05t = 1,25 \Leftrightarrow t = \frac{1,25}{0,05} \Leftrightarrow t = 25$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		25	$+\infty$
d'	$-$	$-$	0	$+$
d	15	$\searrow$	min	$\nearrow$

Assim, como a função d é decrescente no intervalo $]0,25]$ e crescente no intervalo $[25,+\infty[$ podemos concluir que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima, quando $t = 25$, ou seja 25 segundos após se iniciar o movimento.

Exame – 2015, 1.ª Fase

32. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g:

$$g'(x) = \left(\frac{1+\ln x}{x^2}\right)' = \frac{(1+\ln x)'(x^2) - (1+\ln x)(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{\left(0 + \frac{x'}{x}\right)(x^2) - (1+\ln x) \times 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x(1+\ln x)}{x^4} = \frac{\frac{x^2}{x} - 2x - 2x\ln x)}{x^4} \underset{x\neq 0}{=} \frac{x - 2x - 2x\ln x}{x^4} =$$

$$= \frac{-x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{x(-1-2\ln x)}{x(x^3)} \underset{x\neq 0}{=} \frac{-1-2\ln x}{x^3}$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função ($\mathbb{R}^+$), vem:

$$\frac{-1-2\ln x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow -1 - 2\ln x = 0 \wedge \underbrace{x^3 \neq 0}_{\text{PV},x>0} \Leftrightarrow -2\ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
g'	n.d.	$+$	0	$-$
g	n.d.	$\nearrow$	Máx	$\searrow$

Assim, como g é crescente no intervalo $\left]0,e^{-\frac{1}{2}}\right]$ e decrescente no intervalo $\left[e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right[$ podemos concluir que o único valor de x, para o qual a função g tem um extremo relativo, é $x = e^{-\frac{1}{2}}$ que é um maximizante da função.

Exame – 2014, Ép. especial

33. A afirmação (I) é falsa. Como a reta de equação $x = 0$ é uma assíntota vertical do gráfico de f, a função não é contínua para $x = 0$, logo não é contínua no intervalo $[-3{,}5]$, pelo que não estão verificadas as condições de aplicação do Teorema de Bolzano.

A afirmação (II) é falsa. Como $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-2x\big)=0$ podemos afirmar que a reta de equação $y = 2x + 0$ é uma assíntota do gráfico da função f, quando $x \to -\infty$. Assim, quando $x \to -\infty$ o gráfico de f tem uma assíntota que não é horizontal.

A afirmação (III) é verdadeira. O $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ é a derivada de f. Como a derivada existe e é positiva em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, podemos afirmar que f é crescente em $]-\infty{,}0]$ e também em $[0,+\infty[$, o que permite confirmar a veracidade desta afirmação.

Exame – 2014, Ép. especial

34. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g, para $x < 0$:

$$g'(x) = \Big(-x+f(x)\Big)' = \left(-x+x-1+\frac{\ln(-x)}{x}\right)' = \left(-1+\frac{\ln(-x)}{x}\right)' = -(1)' + \left(\frac{\ln(-x)}{x}\right)' =$$

$$= -0 + \frac{(\ln(-x))'x - \ln(-x)(x)'}{x^2} = \frac{\frac{(-x)'}{-x}\times x - \ln(-x)(1)}{x^2} = \frac{\frac{-1}{-x}\times x - \ln(-x)}{x^2} = \frac{1-\ln(-x)}{x^2}$$

Calculando os zeros da derivada da função g, para $x < 0$:

$$g'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1-\ln(-x)}{x^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 1-\ln(-x) = 0 \wedge \underbrace{x^2 \neq 0}_{\text{P.V, pq } x<0} \;\Leftrightarrow\; 1 = \ln(-x) \;\Leftrightarrow\; -x = e^1 \Leftrightarrow\; x = -e$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\infty$	$-e$		0
$1-\ln(-x)$	$-$	0	$+$	n.d.
x^2	$+$	$+$	$+$	n.d.
g'	$-$	0	$+$	n.d.
g	$\searrow$	min	$\nearrow$	n.d.

Assim, podemos concluir que a função g:

- é decrescente no intervalo $]-\infty,-e]$;
- é crescente no intervalo $[-e{,}0[$;
- tem um mínimo para $x = -e$

Exame – 2014, 2.ª Fase

35. Começando por determinar a expressão da derivada, temos:

$$f'(x) = \left(a+\ln\left(\frac{a}{x}\right)\right)' = \big(a+\ln a-\ln x\big)' = (a)' + (\ln a)' - (\ln x)' = 0 + 0 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}$$

Assim, em $\mathbb{R}^+$, a derivada é estritamente negativa, pelo que o gráfico da opção (B) é o único compatível com esta conclusão.

Resposta: **Opção B**

Exame – 2014, 1.ª fase

36. Para calcular o declive da reta tangente, começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x > 0$:

$$f'(x) = \left(\frac{3x + \ln x}{x}\right)' = \left(\frac{3x}{x}\right)' + \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = (3)' + \frac{(\ln x)'x - \ln x(x)'}{x^2} = 0 + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa 1 é: $m = f'(1) = \frac{1 - \ln 1}{1^2} = \frac{1-0}{1} = 1$
Logo a equação da reta tangente é da forma $y = mx + b$

Como $f(1) = \frac{3(1) + \ln 1}{1} = 3 + 0 = 3$, sabemos que o ponto $P(1,3)$ pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.
Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de b: $3 = 1 + b \Leftrightarrow 2 = b$; pelo que a equação da reta tangente é:

$$y = x + 2$$

Teste Intermédio 12.º ano – 30.04.2014

37. Começamos por determinar a expressão da derivada da função:

$$f'(t) = \left((4t+2)e^{3,75-t}\right)' = (4t+2)'e^{3,75-t}(4t+2) + \left(e^{3,75-t}\right)' = 4e^{3,75-t} + (4t+2)(3,75-t)'e^{3,75-t} =$$
$$= 4e^{3,75-t} + (4t+2)(-1)e^{3,75-t} = 4e^{3,75-t} - (4t+2)e^{3,75-t} = \left(4 - (4t+2)\right)e^{3,75-t} =$$
$$= (4 - 4t - 2)e^{3,75-t} = (2-4t)e^{3,75-t}$$

Determinando os zeros da derivada, vem:

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow (2-4t)e^{3,75-t} = 0 \Leftrightarrow 2 - 4t = 0 \vee \underbrace{e^{3,75-t} = 0}_{\text{Eq. Imp.}, e^{3,75-t} > 0} \Leftrightarrow 2 = 4t \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		$\frac{1}{2}$		6
f'	+	+	0	−	−
f	min	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	min

Assim, podemos concluir que a função f:

- é crescente no intervalo $\left[0,\frac{1}{2}\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left[\frac{1}{2},6\right]$;
- tem um maximizante $\left(\frac{1}{2}\right)$

Como o número máximo de alunos com gripe irá ocorrer no instante $t = 0,5$, o que corresponde a meio dia após as zero horas de segunda-feira, ou seja, segunda-feira às 12 horas.

Teste Intermédio 12.º ano – 30.04.2014

38. Começamos por determinar a expressão da derivada da função, no intervalo $]0,+\infty[$:

$$\left(\frac{x}{2}-\ln\left(\frac{6x}{x+1}\right)\right)'=\left(\frac{1}{2}x\right)'-\left(\ln\left(\frac{6x}{x+1}\right)\right)'=\frac{1}{2}-\frac{\left(\frac{6x}{x+1}\right)'}{\frac{6x}{x+1}}=\frac{1}{2}-\frac{\frac{(6x)'(x+1)-6x(x+1)'}{(x+1)^2}}{\frac{6x}{x+1}}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\frac{6(x+1)-6x(1)}{(x+1)^2}}{\frac{6x}{x+1}}=\frac{1}{2}-\frac{\frac{6x+6-6x}{(x+1)^2}}{\frac{6x}{x+1}}=\frac{1}{2}-\frac{\frac{6}{(x+1)^2}}{\frac{6x}{x+1}}=\frac{1}{2}-\frac{6(x+1)}{6x(x+1)^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{x(x+1)}=$$

$$=\frac{x(x+1)}{2x(x+1)}-\frac{2}{2x(x+1)}=\frac{x(x+1)-2}{2x(x+1)}=\frac{x^2+x-2}{2x^2+2x}$$

Calculando os zeros da derivada, no intervalo $]0,+\infty[$, vem:

$$\frac{x^2+x-2}{2x^2+2x}=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \wedge \underbrace{2x^2+2x\neq 0}_{\text{PV},x>0} \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-2)}}{2(1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow \underbrace{x=-2}_{\text{Imp.},x>0} \vee x=1$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		1	$+\infty$
f'	n.d.	$-$	0	$+$
f	n.d.	$\searrow$	min	$\nearrow$

Assim, como f é decrescente no intervalo $]0,1]$ e crescente no intervalo $[1,+\infty[$ podemos concluir que 1 é um minimizante da função, pelo que $f(1)$ é o valor mínimo em $]0,+\infty[$.
Calculando o valor do mínimo, temos:

$$f(1)=\frac{1}{2}-\ln\left(\frac{6(1)}{1+1}\right)=\frac{1}{2}-\ln\left(\frac{6}{2}\right)=\frac{1}{2}-\ln 3=\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)-\ln 3=\ln\left(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{3}\right)=\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{3}\right)$$

Exame – 2013, Ép. especial

39. Podemos descrever a monotonia da função g pela análise do gráfico, e relacionar com a variação do sinal da derivada:

x	$-\infty$	a		b	$+\infty$
g	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	min	$\nearrow$
g'	$+$	0	$-$	0	$+$

Pela observação do gráfico de g podemos ainda afirmar que $-2 < a < 0$ e $0 < b < 2$.
Como $f(x) = g(x-3)$, o gráfico de f resulta de uma translação horizontal do gráfico de g, de 3 unidades para a direita.
Assim, temos que os extremos da função f têm abcissas $a+3$ e $b+3$, e a variação do sinal é dado por:

x	$-\infty$	$a+3$		$b+3$	$+\infty$
f	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	min	$\nearrow$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$

Como $-2 < a < 0$, temos que $1 < a+3 < 3$; e como $0 < b < 2$, sabemos que $3 < b+3 < 5$, pelo que o gráfico da opção (A) é o único compatível com as condições.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2013, 2.ª fase

40.
- Como $f(0) = a^0 = 1$ e $g(0) = a^{-0} = a^0 = 1$, o ponto $P(0,1)$ pertence aos gráficos das duas funções, pelo que **a afirmação (I) é falsa**.
- Como $a > 1$ a função $g(x) = a^{-x}$ é estritamente decrescente, pelo que também **a afirmação (II) é falsa**.
- Como $f'(x) = \left(a^x\right)' = a^x \ln a$, logo, $f'(-1) = a^{-1} \ln a = \dfrac{1}{a} \ln a = \dfrac{\ln a}{a}$
  e como $g'(x) = \left(a^{-x}\right)' = -a^{-x} \ln a$, logo $g'(1) = -a^{-1} \ln a = -\dfrac{1}{a} \ln a = -\dfrac{\ln a}{a}$
  E assim,
  $$f'(-1) - g'(1) = \frac{\ln a}{a} - \left(-\frac{\ln a}{a}\right) = \frac{\ln a}{a} + \frac{\ln a}{a} = \frac{2\ln a}{a}$$
  pelo que **a afirmação (III) é verdadeira**.

Resposta: **Opção B**

Exame – 2013, 1.ª fase

41.
- Como -1 é um zero de f, temos que $g'(-1) = f(-1) \times e^{-1} = 0 \times e^{-1} = 0$, sabemos que o declive da reta tangente ao gráfico no ponto de abcissa -1 é uma reta de declive zero, ou seja, uma reta horizontal, o que não é compatível com o gráfico da opção (I), pelo que este gráfico não representa a função g.
- Como $e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, a função derivada (g') e a função f têm o mesmo sinal. Ou seja, a derivada é positiva apenas no intervalo $]2, +\infty[$, logo a função g é crescente apenas neste intervalo, ao contrário do que acontece com o gráfico da opção (II), pelo que este gráfico também não é o que representa a função g.
- Como $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) - 2] = 0$, a reta de equação $y = 2$ é uma assíntota do gráfico de g. Da observação do gráfico da opção (III), verifica-se que assíntota deste gráfico é a reta $y = -2$ e não a reta $y = 2$, pelo que também não é este o gráfico da função g.

Desta forma, o gráfico da opção (IV) é o único que pode representar a função g, uma vez que é compatível com as condições enunciadas.

Exame – 2013, 1.ª Fase

42. Começamos por determinar a expressão da derivada, para $x > 0$:

$$g'(x) = \left(f(x) - x + \ln^2 x\right)' = \left(f(x)\right)' - (x)' + \left(\ln^2 x\right)' = (x)' \ln x + x(\ln x)' - 1 + \left(\ln(x) \times \ln x\right)' =$$

$$= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 + (\ln x)' \times \ln x + \ln x \times (\ln x)' = \ln x + 1 - 1 + 2\left(\ln x \times \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \ln x + \frac{2\ln x}{x} = \ln x\left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

Calculando os zeros da derivada, no intervalo $]0,e]$, temos:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x\left(1 + \frac{2}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \vee 1 + \frac{2}{x} = 0 \Leftrightarrow e^0 = x \vee 1 = -\frac{2}{x} \Leftrightarrow x = 1 \vee \underbrace{x = -2}_{-2 \notin]0,e]}$$

Como g' só tem um zero no intervalo $]0,e]$ $\left(x = 1\right)$, a variação do sinal da derivada e a relação com a monotonia de g é:

x	0		1		e
g'	n.d	$-$	0	$+$	$+$
g	n.d	$\searrow$	min	$\nearrow$	Max

Assim, podemos concluir que a função g:

- é decrescente no intervalo $]0,1]$;
- é crescente no intervalo $[1,e]$;
- tem um mínimo (cujo minimizante é 1) e um máximo (cujo maximizante é e).

Exame – 2013, 1.ª Fase

43. O declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a é $f'(a)$.
Assim, determinando a expressão da derivada, vem:

$$f'(x) = \left(x^a + a^2 \ln x\right)' = \left(x^a\right)' + \left(a^2 \ln x\right)' = ax^{a-1} + a^2(\ln x)' = ax^{a-1} + a^2\left(\frac{1}{x}\right) = ax^{a-1} + \frac{a^2}{x}$$

Logo, temos que:

$$f'(a) = a \times a^{a-1} + \frac{a^2}{a} = a^{1+a-1} + a = a^a + a$$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2013

44. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$C'(t) = \left(0{,}5t^2 \times e^{-0{,}1t}\right)' = 0{,}5\left((t^2)' \times e^{-0{,}1t} + t^2 \times (e^{-0{,}1t})'\right) = 0{,}5\left(2te^{-0{,}1t} + t^2(-0{,}1e^{-0{,}1t})\right) =$$

$$= 0{,}5 \times 2te^{-0{,}1t} - 0{,}5 \times 0{,}1t^2e^{-0{,}1t} = te^{-0{,}1t} - 0{,}05t^2e^{-0{,}1t} = te^{-0{,}1t}(1 - 0{,}05t)$$

Calculando os zeros da derivada, vem:

$$C'(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; t \times e^{-0{,}1t} \times (1 - 0{,}05t) = 0 \;\Leftrightarrow\; \underbrace{t = 0}_{\text{Eq.Imp.},t>0} \;\vee\; \underbrace{e^{-0{,}1t} = 0}_{\text{Eq.Imp.},e^{-0{,}1t}>0} \;\vee\; 1 - 0{,}05t = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; -0{,}05t = -1 \;\Leftrightarrow\; t = \frac{1}{0{,}05} \;\Leftrightarrow\; t = 20$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		20	$+\infty$
C'	$+$	$+$	0	$-$
C	min	$\nearrow$	Máx	$\searrow$

Assim, como C é crescente no intervalo $]0{,}20]$ e decrescente no intervalo $[20, +\infty[$ podemos concluir que quando $t = 20$, a concentração do produto químico na água é máxima.

Exame – 2012, Ép. especial

45. Sabemos que o declive da reta tangente (m) por ser calculado por:

- a tangente da inclinação: $m = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$
- o valor da derivada no ponto de abcissa a
  Determinando a expressão da derivada, vem:

$$f'(x) = \left(\ln\left(\frac{x}{3} + 2\right)\right)' = \frac{\left(\frac{x}{3} + 2\right)'}{\frac{x}{3} + 2} = \frac{\left(\frac{x}{3}\right)' + (2)'}{\frac{x}{3} + \frac{6}{3}} = \frac{\frac{1}{3} + 0}{\frac{x+6}{3}} = \frac{1}{x+6}$$

Logo, $m = f'(a) = \dfrac{1}{a+6}$

Desta forma temos que:

$$\frac{1}{a+6} = 1 \;\Leftrightarrow\; 1 = a + 6 \wedge a \neq -6 \;\Leftrightarrow\; a = -5$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2012, 2.ª Fase

46. Como o declive (m), da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1 é $f'(-1)$, começamos por determinar a expressão da derivada, para $x < 0$:

$$f'(x) = \left(xe^{1-x}\right)' = (x)'e^{1-x} + x\left(e^{1-x}\right)' = 1 \times e^{1-x} + x(1-x)'e^{1-x} = e^{1-x} + x(-1)e^{1-x} = e^{1-x} - xe^{1-x}$$

Calculando o declive da reta tangente temos:

$$m = f'(-1) = e^{1-(-1)} - (-1)e^{1-(-1)} = e^2 + e^2 = 2e^2$$

Calculando as coordenadas do ponto de tangência, temos: $f(-1) = (-1)e^{1-(-1)} = -e^2$, ou seja, o ponto $P(-1, -e^2)$ é um ponto do gráfico de f que também pertence à reta tangente.
Substituindo o valor do declive na equação da reta, vem $y = 2e^2 \times x + b$
Substituindo as coordenadas do ponto na equação da reta, calculamos o valor da ordenada na origem:

$$-e^2 = 2e^2 \times (-1) + b \;\Leftrightarrow\; -e^2 = -2e^2 + b \;\Leftrightarrow\; -e^2 + 2e^2 = b \;\Leftrightarrow\; e^2 = b$$

Logo, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $x = -1$ é:

$$y = 2e^2 \times x + e^2$$

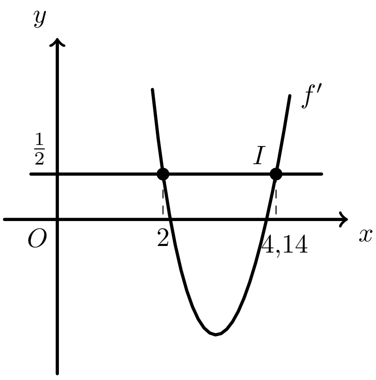
Exame – 2012, 1.ª Fase

47. Como as retas r e s são paralelas, os respetivos declives são iguais.

Como o declive da reta r é $f'(2)$ e o da reta s é $f'(b)$, temos que $f'(2) = f'(b)$, ou seja b é uma solução da equação $f'(x) = f'(2)$

Como é conhecida a expressão analítica de $f'(x)$, podemos calcular
$f'(2) = 2^2 - 4(2) + \frac{9}{2} - 4\ln(2-1) = 4 - 8 + \frac{9}{2} - 4\ln(1) = -4 + \frac{9}{2} - 4 \times 0 = -\frac{8}{2} + \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$

Logo, podemos traçar na calculadora o gráfico da função derivada e a reta de equação $y = \frac{1}{2}$, numa janela compatível com o domínio da função, que se reproduz na figura ao lado.



Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados das coordenadas de pontos de interseção de dois gráficos, podemos determinar as soluções da equação $f'(x) = \frac{1}{2}$, que são as abcissas dos pontos de interseção.

Determinando o valor, arredondado às centésimas, do ponto I de interseção dos dois gráficos, temos $I(4{,}14; 0{,}50)$ - o outro ponto tem abcissa 2, que é a abcissa do ponto A.

Como b é uma das soluções da equação (diferente de 2), temos que $b \approx 4{,}14$

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2012

48. Podemos descrever a variação do sinal de h', pela análise do gráfico, e relacionar com a monotonia da função h:

x		0	
h'	$+$	0	$-$
h	$\nearrow$	Máx	$\searrow$

Ou seja, a função h é crescente se $x \leq 0$ e decrescente se $x \geq 0$, e apenas o gráfico da opção (D), é compatível com esta conclusão.

Resposta: **Opção D**

Exame – 2011, Prova especial

49. Como o declive (m), da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 é $g'(1)$, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$g'(x) = \big((2x-1) \times f(x)\big)' = (2x-1)'f(x) + (2x-1)\big(f(x)\big)' = 2f(x) + (2x-1)f'(x)$$

Calculando o declive da reta tangente temos:

$$m = g'(1) = 2f(1) + (2x-1)f'(1) = 2 \times 1 + (2(1)-1) \times 1 = 2 + 1 \times 1 = 3$$

Calculando as coordenadas do ponto de tangência, temos: $g(1) = (2(1)-1) \times f(1) = (2-1) \times 1 = 1$, ou seja, o ponto $P(1,1)$ é um ponto do gráfico de g que também pertence à reta tangente.
Substituindo o valor do declive na equação da reta, vem $y = 3x + b$
Substituindo as coordenadas do ponto na equação da reta, calculamos o valor da ordenada na origem:

$$1 = 3 \times 1 + b \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 3 = b \quad \Leftrightarrow \quad -2 = b$$

Logo, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $x = 1$ é:

$$y = 3x - 2$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2011, Prova especial

50. Começamos por determinar a expressão da derivada para $x \neq -1$:

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{1-e^{x+1}} + 1\right)' = \left(\frac{x+1}{1-e^{x+1}}\right)' + (1)' = \frac{(x+1)'(1-e^{x+1}) - (x+1)(1-e^{x+1})'}{(1-e^{x+1})^2} + 0 =$$

$$= \frac{1 \times (1-e^{x+1}) - (x+1)\big((1)' - (x+1)'e^{x+1}\big)}{(1-e^{x+1})^2} = \frac{1-e^{x+1} - (x+1)\big(0 - 1 \times e^{x+1}\big)}{(1-e^{x+1})^2} =$$

$$= \frac{1-e^{x+1} - (x+1)\big(-e^{x+1}\big)}{(1-e^{x+1})^2} = \frac{1-e^{x+1} - \big(-xe^{x+1} - e^{x+1}\big)}{(1-e^{x+1})^2} =$$

$$= \frac{1-e^{x+1} + xe^{x+1} + e^{x+1}}{(1-e^{x+1})^2} = \frac{1+xe^{x+1}}{(1-e^{x+1})^2}$$

Como a função f' resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}$, é uma função contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, e, por isso, também é contínua em $[0{,}1]$.

Como $\frac{1}{4} = 0{,}25$, temos que $0{,}21 < \dfrac{1}{4} < 0{,}34$, ou seja, $f'(1) < \dfrac{1}{4} < f'(0)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]0{,}1[$ tal que $f'(c) = \dfrac{1}{4}$, ou seja, que a equação $f'(x) = \dfrac{1}{4}$ tem, pelo menos, uma solução em $]0{,}1[$.

C.A.

$$f'(0) = \frac{1+0\times e^{0+1}}{(1-e^{0+1})^2} = \frac{1+0}{(1-e^1)^2} = \frac{1}{(1-e)^2} \approx 0{,}34$$

$$f'(1) = \frac{1+1\times e^{1+1}}{(1-e^{1+1})^2} = \frac{1+e^2}{(1-e^2)^2} = \frac{1}{(1-e)^2} \approx 0{,}21$$

Exame – 2011, Ép. especial

51. Começamos por determinar a expressão da derivada, em $]2, +\infty[$:

$$\left(\frac{x+1}{\ln(x+1)}\right)' = \frac{(x+1)'\ln(x+1) - (x+1)\big(\ln(x+1)\big)'}{\big(\ln(x+1)\big)^2} = \frac{(1+0)\ln(x+1) - (x+1) \times \dfrac{(x+1)'}{(x+1)}}{\big(\ln(x+1)\big)^2)} =$$

$$= \frac{\ln(x+1) - (x+1)'}{\big(\ln(x+1)\big)^2} = \frac{\ln(x+1) - 1}{\big(\ln(x+1)\big)^2}$$

Determinando os zeros da derivada, em $]2, +\infty[$, temos:

$$\frac{\ln(x+1)-1}{\big(\ln(x+1)\big)^2} = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) - 1 = 0 \wedge \underbrace{\big(\ln(x+1)\big)^2 \neq 0}_{PV, x>2 \Rightarrow \ln(x+1) > \ln 3} \Leftrightarrow \ln(x+1) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1) = e^1 \Leftrightarrow x = e - 1$$

Logo, como $e - 1 < 2$, a função derivada não tem zeros em $]2, +\infty[$.
Como, para $x > 2$,

- $\ln(x+1) - 1 > \ln(3) - 1$, temos que $\ln(x+1) - 1 > 0$, $\forall x \in]2, +\infty[$
- $\ln(x+1) \neq 0$, temos que $\big(\ln(x+1)\big)^2 > 0$, $\forall x \in]2, +\infty[$

temos que f' é sempre positiva no intervalo $]2, +\infty[$, o que significa que a função f é sempre crescente neste intervalo.

Exame – 2011, 2.ª Fase

52. Pela observação do gráfico podemos afirmar que:
    - Em $x = -3$ a função é crescente, ou seja, $f'(-3) > 0$
    - Em $x = 0$ a função é decrescente, ou seja, $f'(0) < 0$
    - Em $x = 6$ a função é crescente, ou seja, $f'(6) > 0$

    Assim, temos que:
    - $f'(0) \times f'(6) < 0$
    - $f'(-3) \times f'(6) > 0$
    - $f'(-3) \times f'(0) < 0$
    - $f'(0) \times f'(6) < 0$

    Resposta: **Opção D**

Exame – 2011, 1.ª fase

53. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$T'(t) = \left(15 + 0{,}1t^2e^{-0{,}15t}\right)' = (15)' + \left(0{,}1t^2e^{-0{,}15t}\right)' = 0 + 0{,}1\Big((t^2)'e^{-0{,}15t} + t^2(e^{-0{,}15t})'\Big) =$$
$$= 0{,}1\Big(2t \times e^{-0{,}15t} + t^2(-0{,}15)e^{-0{,}15t}\Big) = 0{,}1\Big(2te^{-0{,}15t} - 0{,}15t^2e^{-0{,}15t}\Big) =$$
$$= 0{,}2te^{-0{,}15t} - 0{,}015t^2e^{-0{,}15t} = te^{-0{,}15t}(0{,}2 - 0{,}015t)$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$T'(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; te^{-0{,}15t}(0{,}2 - 0{,}015t) = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 0 \,\vee\, \underbrace{e^{-0{,}15t} = 0}_{\text{Eq. Imp.}, e^{-0{,}15t} > 0} \,\vee\, 0{,}2 - 0{,}015t = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; t = 0 \,\vee\, 0{,}2 = 0{,}015t \;\Leftrightarrow\; t = 0 \,\vee\, \frac{0{,}2}{0{,}015} = t \;\Leftrightarrow\; t = 0 \,\vee\, t = \frac{40}{3}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		$\frac{40}{3}$		20
T'	0	$+$	0	$-$	$-$
T	min	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	

Assim, como C é crescente no intervalo $\left[0,\frac{40}{3}\right]$ e decrescente no intervalo $\left[\frac{40}{3},20\right]$ podemos concluir que $\frac{40}{3}$ é único o maximizante da função.

Como $\frac{40}{3} \approx 13{,}333$ corresponde a 13 horas e $0{,}333 \times 60$ minutos (ou seja 20 minutos), temos que às 13 horas e 20 minutos do dia 1 de Abril de 2010, se registou, no museu, a temperatura ambiente máxima.

Exame – 2011, 1.ª fase

54. Averiguando a existência de assíntotas horizontais, temos:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{x-1} = \frac{3}{-\infty-1} = \frac{3}{-\infty} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2+\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} + \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim notável}} = \frac{2}{+\infty} + 0 = 0 + 0 = 0$

Pelo que podemos afirmar que a reta de equação $y = 0$ é a assintota horizontal do gráfico de f.

Determinando a expressão da derivada, para $x > 1$, temos:

$$\left(\frac{2+\ln x}{x}\right)' = \frac{(2+\ln x)'(x) - (2+\ln x)(x)'}{x^2} = \frac{(0+\frac{1}{x})(x) - (2+\ln x)(1)}{x^2} = \frac{1-2-\ln x}{x^2} = \frac{-1-\ln x}{x^2}$$

Como $e > 1$, o declive da reta tangente no ponto de abcissa e, é dado por:

$$m = f'(e) = \frac{-1-\ln e}{e^2} = \frac{-1-1}{e^2} = \frac{-2}{e^2}$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico de abcissa e, temos:

$$f(e) = \frac{2+\ln e}{e} = \frac{2+1}{e} = \frac{3}{e}$$

Como o ponto de abcissa e, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de b:

$$\frac{3}{e} = \frac{-2}{e^2} \times e + b \Leftrightarrow \frac{3}{e} = -\frac{2}{e} + b \Leftrightarrow \frac{3}{e} + \frac{2}{e} = b \Leftrightarrow \frac{5}{e} = b$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e, é:

$$y = -\frac{2}{e^2} \times x + \frac{5}{e}$$

E a abcissa do ponto de intersecção com a reta de equação $y = 0$ (a assíntota horizontal), pode ser calculada como:

$$y = -\frac{2}{e^2} \times x + \frac{5}{e} \wedge y = 0 \Leftrightarrow 0 = -\frac{2}{e^2} \times x + \frac{5}{e} \Leftrightarrow \frac{2}{e^2} \times x = \frac{5}{e} \Leftrightarrow x = \frac{5e^2}{2e} \Leftrightarrow x = \frac{5e}{2}$$

Ou seja, as coordenadas do ponto de interseção da assintota horizontal com a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e, são

$$P\left(\frac{5e}{2}, 0\right)$$

Exame – 2011, 1.ª fase

55. Através da análise do gráfico, podemos descrever a variação do sinal da derivada para relacionar com a monotonia da função f:

x		a		b	
f'	+	0	−	0	+
f	↗	Máx	↘	min	↗

Logo, o único gráfico apresentado compatível com a monotonia estudada é o gráfico da opção (A).

Resposta: **Opção A**

Exame – 2010, Ép. especial

56. Começamos por determinar a expressão da derivada para $x > 2$:

$$\left(\frac{1}{5}x - \ln x\right)' = \left(\frac{1}{5}x\right)' - (\ln x)' = \frac{1}{5} - \frac{1}{x}$$

Calculando os zeros da derivada, em $]2,+\infty[$, temos:

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{x} = 0 \iff \frac{1}{5} = \frac{1}{x} \iff x = 5 \wedge \underbrace{x \neq 0}_{\text{PV, } x>2}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	2		5	$+\infty$
f'	n.d.	$-$	0	$+$
f	n.d.	$\searrow$	min	$\nearrow$

Assim, como f é decrescente no intervalo $]0,5]$ e crescente no intervalo $[5,+\infty[$ podemos concluir que 5 é único o minimizante da função no intervalo $]2,+\infty[$, pelo que $f(5)$ é um mínimo da função neste intervalo.

Exame – 2010, 2.ª Fase

57. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(-x + e^{2x^3-1}\right)' = -(x)' + \left(e^{2x^3-1}\right)' = -1 + (2x^3-1)'e^{2x^3-1} = -1 + 6x^2e^{2x^3-1}$$

Como o declive (m) da reta tangente ao gráfico de f em $x = 0$ é $f'(0)$, temos que:

$$m = f'(0) = -1 + 6(0)^2e^{2(0)^3-1} = -1 + 0 = -1$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico da função que tem abcissa zero, temos:

$$f(0) = -0 + e^{2(0)^3-1} = 0 + e^{0-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Como o ponto de abcissa 0, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de b:

$$\frac{1}{e} = -1 \times 0 + b \iff \frac{1}{e} = 0 + b \iff b = \frac{1}{e}$$

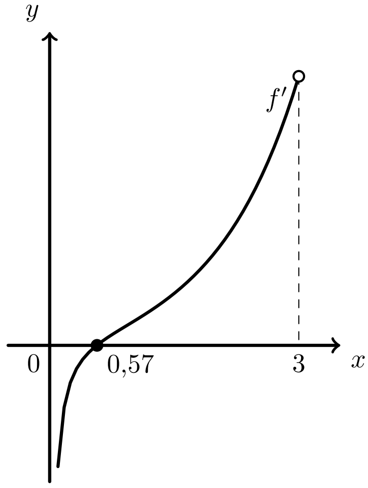
Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0, é:

$$y = -x + \frac{1}{e}$$

Exame – 2010, 2.ª Fase

58. Para estudar a monotonia da função f, devemos analisar o sinal da função f', pelo que podemos traçar o gráfico de f' na calculadora gráfica, numa janela compatível com o domínio da função, para obter o gráfico reproduzido na figura seguinte.

Depois, recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados para um zero de uma função, num intervalo, podemos encontrar a solução da equação $f'(x) = 0$, com aproximação às centésimas: $x \approx 0{,}57$.



Pela análise do gráfico podemos ainda determinar a variação do sinal da função f', para depois relacionar com a monotonia da função f:

x	0		0,57		3
f'	n.d.	$-$	0	$+$	n.d.
f	n.d.	$\searrow$	min	$\nearrow$	n.d.

Assim temos que a função f:

- é decrescente no intervalo $]0;0{,}57[$
- é crescente no intervalo $]0{,}57;3[$
- tem um mínimo absoluto para $x \approx 0{,}57$

Exame – 2010, 1.ª Fase

59. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(3+4x^2e^{-x}\right)' = (3)'+\left(4x^2\right)'e^{-x}+4x^2\left(e^{-x}\right)' = 0+8xe^{-x}+4x^2(-x)'e^{-x} = 8xe^{-x}+4x^2(-1)e^{-x} =$$
$$= 8xe^{-x} - 4x^2e^{-x} = e^{-x}(8x-4x^2)$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(8x-4x^2) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{Eq Imp, } e^{-x}>0} \vee 8x-4x^2 = 0 \Leftrightarrow x(8-4x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 8-4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 8 = 4x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	Máx	$\searrow$

Assim, como f é decrescente no intervalo $]-\infty,0]$ e em $[2,+\infty[$; e crescente no intervalo $[0,2]$ podemos concluir que 0 é único o minimizante da função, pelo que $f(0)$ é o único mínimo da função.
Calculando o valor do mínimo, temos:

$$f(0) = 3+4(0)^2e^{-(0)} = 3+0 = 3$$

Teste Intermédio 12.º ano – 19.05.2010

60. Como a derivada de g é:

$$g'(x) = \left(f(x)+x\right)' = \left(f(x)\right)' + (x)' = f'(x)+1$$

Assim, o gráfico de g' é a translação do gráfico de f' pelo vetor $\vec{u} = (1{,}0)$, ou seja com um deslocamento vertical de uma unidade no sentido positivo.
Desta forma o gráfico da opção (D) é o único compatível com esta informação.

Resposta: **Opção D**

Exame – 2009, 2.ª fase

61. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$A'(t) = \left(2-t+5\ln(t+1)\right)' = (2)'-(t)'+\left(5\ln(t+1)\right)' = 0-1+5\left(\frac{(t+1)'}{t+1}\right) = -1+5\left(\frac{1}{t+1}\right) = -1+\frac{5}{t+1}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$A'(t) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad -1+\frac{5}{t+1} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{5}{t+1} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad 5 = t+1 \ \wedge\ t+1 \neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 4 = t \ \wedge\ \underbrace{t \neq -1}_{\text{PV, } t\in[0,16[}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		4		16
A'	+	+	0	−	n.d.
A	min	↗	Máx	↘	n.d.

Assim, como A é crescente no intervalo $[0,4]$ e decrescente no intervalo $[4,16[$ podemos concluir que 4 é único o maximizante da função, pelo que $A(4)$ é o único mínimo da função.
Calculando o valor do máximo da função e arredondando o resultado às centésimas, temos:

$$A(4) = 2-4+5\ln(4+1) = -2+5\ln 5 \approx 6{,}05$$

Logo, a área máxima afetada pela doença foi aproximadamente de 6,05 *ha*.

Exame – 2009, 2.ª Fase

62. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$C'(t) = \left(2te^{-0{,}3t}\right)' = (2t)'(e^{-0{,}3t}) + 2t\left(e^{-0{,}3t}\right)' = 2\times e^{-0{,}3t} + 2t(-0{,}3t)'e^{-0{,}3t} =$$

$$= 2e^{-0{,}3t} + 2t(-0{,}3)e^{-0{,}3t} = 2e^{-0{,}3t} - 0{,}6te^{-0{,}3t} = e^{-0{,}3t}(2-0{,}6t)$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$C'(t) = 0 \ \Leftrightarrow\ e^{-0{,}3t}(2-0{,}6t) = 0 \ \Leftrightarrow\ \underbrace{e^{-0{,}3t} = 0}_{\text{Eq Imp, } e^{-0{,}3t}>0} \ \vee\ 2-0{,}6t = 0 \ \Leftrightarrow\ 2 = 0{,}6t \ \Leftrightarrow\ \frac{2}{0{,}6} = t \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{2}{\frac{6}{10}} = t \ \Leftrightarrow\ \frac{20}{6} = t \ \Leftrightarrow\ \frac{10}{3} = t$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		$\frac{10}{3}$	$+\infty$
C'	+	+	0	−
C	min	↗	Máx	↘

Assim, como C é crescente no intervalo $\left[0,\frac{10}{3}\right]$ e decrescente no intervalo $\left[\frac{10}{3},+\infty\right[$ podemos concluir que $\frac{10}{3}$ é único o maximizante da função.

Como $\frac{10}{3} = 3+\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}\times 60 = 20$ ($\frac{1}{3}$ de hora são 20 minutos) temos que a concentração máxima do medicamento no sangue ocorreu 3 hora e 20 minutos após a toma, ou seja, às 12 horas e 20 minutos.

Exame – 2009, 1.ª Fase

63. Como gráfico de g é uma reta de declive negativo, temos que, sendo $y = ax + k$ a equação dessa reta, $g'(x) = a$, e $a < 0$.

Assim, a expressão da derivada de h, é:

$$h'(x) = \big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x) = (x^2 + 1)' + k = 2x + a$$

Ou seja, o gráfico de h' é uma reta de declive 2 e ordenada na origem igual a $g'(x)$.

- Como $m = 2$, temos que $m > 0$,
- e como $b = a$ e $a < 0$, então $b < 0$.

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 27.05.2009

64. Como o ponto A (o ponto de tangência) pertence ao eixo ordenadas tem abcissa zero, logo as suas coordenadas são $A(0,1)$.
Como o declive da reta tangente (m) é dado pela função derivada para a abcissa do ponto de tangência, temos que:

$$m = f'(0) = (2(0) + 4)e^0 = (0 + 4) \times 1 = 4$$

Substituindo o valor do declive e as coordenadas do ponto de tangência em $y = mx + b$, calculamos o valor da ordenada na origem:

$$1 = 4 \times 0 + b \;\Leftrightarrow\; 1 = b$$

Logo a equação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto A é:

$$y = 4x + 1$$

Teste Intermédio 12.º ano – 27.05.2009

65. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)'x - e^x(x)'}{x^2} = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Como o declive (m) da reta tangente ao gráfico de f em $x = 2$ é $f'(2)$, temos que:

$$m = f'(2) = \frac{2e^2 - e^2}{2^2} = \frac{e^2}{4}$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico da função que tem abcissa zero, temos:

$$f(2) = \frac{e^2}{2}$$

Como o ponto de abcissa 2, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de b:

$$\frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{4} \times 2 + b \;\Leftrightarrow\; \frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{2} + b \;\Leftrightarrow\; \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} = b \;\Leftrightarrow\; 0 = b$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0, é:

$$y = \frac{e^2}{4} \times x$$

Exame – 2008, Ép. especial

66. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(\ln(x^2+1)\right)' = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{2x+0}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \land \underbrace{x^2+1 \neq 0}_{\text{PV, } x^2+1 \geq 1} \Leftrightarrow x = 0$$

Analisando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de f, temos:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$

Assim, podemos concluir que a função f:

- é decrescente no intervalo $]-\infty,0]$;
- é crescente no intervalo $[0,+\infty[$;
- tem um único extremo - um mínimo (cujo minimizante é 0).

Calculando o valor do mínimo, vem:

$$f(0) = \ln(0^2+1) = \ln(0+1) = \ln 1 = 0$$

Exame – 2008, Ép. especial

67. Pela observação do gráfico sabemos que f' é constante, e positiva, para $x < 0$, porque a função varia num ritmo constante e é crescente, pelo que apenas as os gráficos das opções (A), (B) e (C) são coerentes com esta informação.

Como a semitangente ao gráfico de f à esquerda de 0 tem declive positivo, e a semitangente ao gráfico de f à direta de 0 tem declive negativo, ou seja,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

Podemos concluir que não existe $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, pelo que f' não está definida em $x=0$; e os únicos gráficos que são compatíveis com esta informação são os das opções (C) e (D).

Resposta: **Opção C**

Exame – 2008, 1ª fase

68. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$h'(x) = \big(4 - x + \ln(x+1)\big)' = (4') - (x)' + \big(\ln(x+1)\big)' = 0 - 1 + \frac{(x+1)'}{x+1} = -1 + \frac{1}{x+1}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$h'(x) = 0 \iff -1 + \frac{1}{x+1} = 0 \iff \frac{1}{x+1} = 1 \iff 1 = x+1 \land \underbrace{x+1 \neq 0}_{\text{PV, } x>-1} \iff 0 = x$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de h, temos:

x	-1		0	$+\infty$
h'	n.d.	$+$	0	$-$
h	n.d.	$\nearrow$	Máx	$\searrow$

Assim, podemos concluir que a função h:

- é crescente no intervalo $]-1{,}0]$;
- é decrescente no intervalo $[0, +\infty[$;
- tem um único extremo - um máximo (cujo maximizante é 0).

Calculando o valor do máximo, temos:

$$h(0) = 4 - 0 + \ln(0+1) = 4 + \ln 1 = 4 + 0 = 4$$

Exame – 2008, 1.ª fase

69.

69.1. Como o ponto A é o ponto de ordenada máxima, a abcissa deste ponto é o zero da derivada. Assim, determinando a expressão da derivada em $[0{,}3]$, vem:

$$\big(2 - x + \ln(1+3x)\big)' = (2)' - (x)' + \big(\ln(1+3x)\big)' = 0 - 1 + \frac{(1+3x)'}{1+3x} = -1 + \frac{3}{1+3x}$$

Calculando os zeros da derivada em $[0{,}3]$, temos:

$$-1 + \frac{3}{1+3x} = 0 \iff \frac{3}{1+3x} = 1 \iff 3 = 1 + 3x \land \underbrace{1+3x \neq 0}_{\text{PV, } x\geq 0} \iff 3 - 1 = 3x \iff \frac{2}{3} = x$$

Como a ordenada do ponto A é o único máximo de f em $[0{,}3]$, e a derivada da função f só tem um zero neste intervalo, podemos garantir que a abcissa do ponto A é o zero da derivada, ou seja, $x_A = \frac{2}{3}$

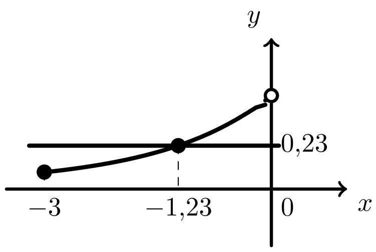
69.2. Como o declive da reta tangente num ponto, é dado pela derivada da função nesse ponto, e o declive da reta r é 0,23, sabemos que a abcissa do ponto B é a solução da equação $f'(x) = 0{,}23$

Como a abcissa do ponto B é negativa, vamos determinar a expressão de f', para $x \in [-3{,}0[$:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1 + x}{x}\right)' = \frac{(e^x - 1 + x)'.x - (e^x - 1 + x).(x)'}{x^2} = \frac{(e^x - 0 + 1)\,.x - (e^x - 1 + x).1}{x^2} =$$
$$= \frac{(e^x + 1)\,.x - (e^x - 1 + x)}{x^2} = \frac{x.e^x + x - e^x + 1 - x}{x^2} = \frac{x.e^x - e^x + 1}{x^2}$$

Assim a abcissa do ponto B é a solução da equação $\frac{x.e^x - e^x + 1}{x^2} = 0{,}23$

Traçando na calculadora o gráfico de $f'(x) = \frac{x.e^x - e^x + 1}{x^2}$ e da reta $y = 0{,}23$, numa janela compatível com o domínio $[-3{,}0[$, obtemos o gráfico que se reproduz na figura ao lado.



Depois, recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas de pontos de interseção de dois gráficos, obtemos a abcissa do ponto de interseção dos gráficos representados, com aproximação às centésimas, que coincide com a abcissa do ponto B:

$$x_B \approx -1.23$$

Teste Intermédio 12.º ano – 29.04.2008

70. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(1 - \ln(x^2)\right)' = (1)' - \left(\ln(x^2)\right)' = 0 - \frac{(x^2)'}{x^2} = -\frac{2x}{x^2} = -\frac{2}{x}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{2}{x} = 0}_{\text{Eq. Impossível}}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de h, temos:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	+	n.d.	−
f	↗	n.d.	↘

Assim podemos concluir que a função f:

- é crescente no intervalo $]-\infty{,}0]$;
- é decrescente no intervalo $[0,+\infty[$;
- não tem qualquer extremo.

Exame – 2007, 2.ª Fase

71. Para estudar a monotonia da função começamos por determinar a expressão da função derivada:

$$I'(x) = \left(10e^{-0,05x}\right)' = 10\left(e^{-0,05x}\right)' = 10(-0,05x)'e^{-0,05x} = 10 \times (-0,05)e^{-0,05x} = -0,5e^{-0,05x}$$

Como $e^{-0,05} > 0$, para qualquer valor de x, então $-0,05 \times e^{-0,05} < 0$, ou seja $I'(x) < 0$, pelo que podemos concluir que a função é estritamente decrescente no seu domínio.

Relativamente à existência de assintotas do gráfico de I, como a função está definida para $x \geq 0$ e é contínua (porque resulta de operações entre funções continuas no domínio da função), só podem existir assintotas quando $x \to +\infty$

Averiguando a existência de uma assintota horizontal temos que:

$$\lim_{x\to+\infty} I(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(10e^{-0,05x}\right) = 10e^{-0,05\times(+\infty)} = 10e^{-\infty} = 10 \times 0^+ = 0$$

E assim podemos concluir que a reta de equação $y = 0$ é uma assintota horizontal do gráfico de I e não existem outras assintotas.

Assim, a função ser estritamente decrescente, no contexto da situação descrita, significa que a um aumento do número de metros abaixo da superfície corresponde sempre uma diminuição da intensidade da luz solar, ou seja, a intensidade da luz diminuí com um aumento da profundidade.

A reta de equação $y = 0$ ser assintota do gráfico de I, significa no contexto da situação descrita, que a intensidade da luz solar tende para zero com um aumento arbitrariamente grande da profundidade.

Exame – 2007, 1.ª Fase

72.

72.1. Começamos por determinar a expressão da derivada, para $x \in]0,1[$:

$$\left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{(x)'\ln x - x(\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{1 \times \ln x - x\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

Calculando os zeros da derivada, no intervalo $]0,1[$, temos:

$$\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln x - 1 = 0 \wedge \ln^2 x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \ln x = 1 \wedge \ln x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x = e \wedge x \neq 1$$

Como $x \in]0,1[$ e $e > 1$, concluímos que $f'(x)$ não tem qualquer zero neste intervalo.

Assim, como no intervalo $]0,1[$, $\ln(x) < 0$ temos que $\ln x - 1 < 0$, e como $\ln^2(x) > 0$ (no mesmo intervalo), temos que:

$$f'(x) < 0,\ \forall x \in]0,1[$$

pelo que a função f é estritamente decrescente neste intervalo.

72.2. Determinado a expressão da derivada, para $x > 1$, temos:

$$\left(xe^{2-x}\right)' = (x)'e^{2-x} + x\left(e^{2-x}\right)' = e^{2-x} + x(2-x)'e^{2-x} = e^{2-x} + x(-1)e^{2-x} = e^{2-x} - xe^{2-x} = e^{2-x}(1-x)$$

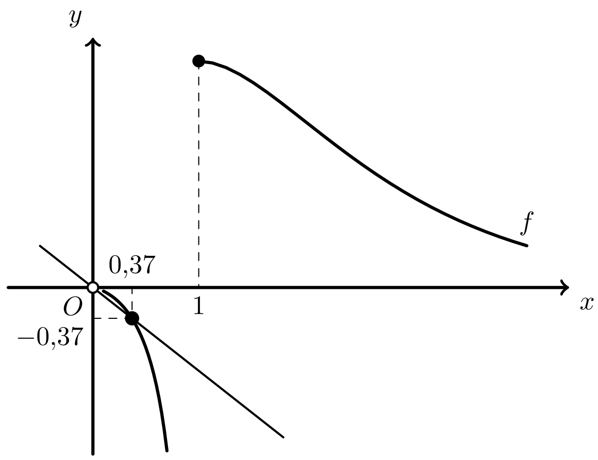
O declive da reta r pode ser calculado como:

$$m_r = f'(2) = e^{2-2}(1-2) = e^0(-1) = -1$$

Como a reta s é paralela à reta r, e tem a ordenada na origem igual a zero, a equação da reta s é: $y = -x$

Traçando a reta s e o gráfico da função f numa janela compatível com o domínio da função e que permita visualizar o ponto de interseção obtemos o gráfico reproduzido na figura ao lado.

Depois, recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados para as coordenadas de um ponto de interseção dos gráficos de duas funções, encontramos as coordenadas do ponto, arredondadas às centésimas $(0{,}37, -0{,}37)$



Exame – 2006, Ép. especial

73. Como o ponto Q pertence ao gráfico de f e tem abcissa 2, podemos calcular a respetiva ordenada:

$$f(2) = 2 + 2\ln(2-1) = 2 + 2\ln 1 = 2 + 2 \times 0 = 2$$

A reta r é tangente ao gráfico de f no ponto $Q(2{,}2)$, contém este ponto e tem declive $m = f'(2)$. Assim determinando a expressão da derivada, temos:

$$f'(x) = \big(x + x\ln(x-1)\big)' = (x)' + (x)'\ln(x-1) + x\big(\ln(x-1)\big)' =$$

$$= 1 + 1 \times \ln(x-1) + x \times \frac{(x-1)'}{x-1} = 1 + \ln(x-1) + x \times \frac{1}{x-1} = 1 + \ln(x-1) + \frac{x}{x-1}$$

Assim, calculando o valor do declive, vem:

$$m = f'(2) = 1 + \ln(2-1) + \frac{2}{2-1} = 1 + \ln 1 + \frac{2}{1} = 1 + 0 + 2 = 3$$

Substituindo as coordenadas do ponto de tangência e o declive em $y = mx + b$, podemos calcular o valor de b:

$$2 = 3(2) + b \;\Leftrightarrow\; 2 = 6 + b \;\Leftrightarrow\; 2 - 4 = b \;\Leftrightarrow\; -4 = b$$

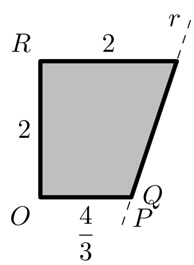
Pelo que a equação da reta r é: $y = 3x - 4$

Assim, a abcissa do ponto P pode ser calculada através da equação da reta r:

$$y = 3x - 4 \wedge y = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = 3x - 4 \;\Leftrightarrow\; 4 = 3x \;\Leftrightarrow\; \frac{4}{3} = x$$

Logo a área do trapezio é:

$$A_{[OPQR]} = \frac{\overline{RQ} + \overline{OP}}{2} \times \overline{OR} = \frac{x_Q + x_P}{2} \times y_R = \frac{2 + \frac{4}{3}}{2} \times 2 = 2 + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$



Exame – 2006, 2.ª fase

74. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$A'(x) = \left(xe^{-x}\right)' = (x)'e^{-x} + x\left(e^{-x}\right)' = 1 \times e^{-x} + x(-x)'e^{-x} = e^{-x} + x(-1)e^{-x} = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$A'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-x}(1-x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{Eq Imp, } e^{-x}>0} \vee 1 - x = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 = x$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de h, temos:

x	0		1	$+\infty$
A'	n.d.	$+$	0	$-$
A	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

Assim, podemos concluir que a função A:

- é crescente no intervalo $]0,1]$;
- é decrescente no intervalo $[1,+\infty[$;

Como a função A é crescente no intervalo $]0,1]$ e decrescente no intervalo $[1,+\infty[$, podemos concluir que a função só tem um extremo, e 1 é o maximizante.
Calculando o valor máximo que a área do triângulo pode assumir, temos:

$$A(1) = 1 \times e^{-1} = 1 \times \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

Exame – 2006, 1.ª fase

75. Começamos por determinar a ordenada do ponto em que a função interseta o eixo Oy:

$$f(0) = e^{a\times 0} + 1 = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2$$

Como a reta r contém os pontos $A(-6,0)$ e $B(0,2)$, podemos calcular o seu declive:

$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-0}{0-(-6)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ou seja, o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0 é $\frac{1}{3}$, pelo que $f'(0) = \frac{1}{3}$
Determinando a expressão da derivada temos:

$$f'(x) = \left(e^{ax} + 1\right)' = (ax)'e^{ax} + (1)' = ae^{ax} + 0 = ae^{ax}$$

Logo $f'(0) = ae^{a\times 0} = a \times e^0 = a \times 1 = a$

Igualando o valor da derivada ao declive da reta tangente, vem: $a = \frac{1}{3}$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)

76. Relacionando a monotonia de f com o sinal de f', temos:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$
f'	$+$	0	$-$

Determinando a expressão da derivada de g:

$$g'(x) = \left((f(x))^2 \right)' = \left(f(x) \times f(x) \right)' = f'(x) \times f(x) + f(x) \times f'(x) = 2f(x)f'(x)$$

Logo, como o máximo de f é -1, sabemos que $f(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pelo que podemos estudar a variação do sinal de g', para relacionar com a monotonia de g:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	$-$	$-$	$-$
2	$+$	$+$	$+$
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	min.	$\nearrow$

Assim, como g é decrescente em $]-\infty,0]$ e é crescente em $[0,+\infty[$, podemos afirmar que 0 é um minimizante de g.
Assim, calculando o valor do mínimo de g, temos:

$$g(0) = \left(f(0) \right)^2 = (-1)^2 = 1$$

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)

77. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$h'(x) = \left(2x + 10\ln(1-0{,}1x)\right)' = (2x)' + \left(10\ln(1-0{,}1x)\right)' = 2 + 10 \times \frac{(1-0{,}1x)'}{1-0{,}1x} = 2 + \frac{10 \times (0-0{,}1)}{1-0{,}1x} =$$

$$= 2 + \frac{-1}{1-0{,}1x} = \frac{2(1-0{,}1x)}{1-0{,}1x} + \frac{-1}{1-0{,}1x} = \frac{2-0{,}2x-1}{1-0{,}1x} = \frac{1-0{,}2x}{1-0{,}1x}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$h'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1-0{,}2x}{1-0{,}1x} = 0 \;\Leftrightarrow 1-0{,}2x = 0 \;\wedge\; 1-0{,}1x \neq 0 \;\Leftrightarrow 1 = 0{,}2x \;\wedge\; 1 \neq 0{,}1x \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{1}{0{,}2} = x \;\wedge \frac{1}{0{,}1} \neq x \;\Leftrightarrow\; x = 5 \;\wedge x \neq 10 \;\Leftrightarrow\; x = 5$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de h, temos:

x	0		5		a
h'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
h	min	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	min

Assim, podemos concluir que a função h:

- é crescente no intervalo $[0{,}5]$;
- é decrescente no intervalo $[5{,}a]$;

Como a função h é crescente no intervalo $[0{,}5]$ e decrescente no intervalo $[5{,}a]$, podemos concluir que a função só tem um máximo e 5 é o maximizante.
Calculando o valor máximo da função, e arredondando o resultado às décimas, temos:

$$h(5) = 2(5) + 10\ln\left(1 - 0{,}1(5)\right) = 10 + 10\ln(1-0{,}5) = 10 + 10\ln(0{,}5) \approx 3{,}07$$

A maior altura que a bola atingiu, relativamente ao solo, depois de pontapeada foi de 3,07 metros.

Exame – 2005, 2.ª Fase (cód. 435)

78. A reta r é tangente ao gráfico de f no ponto $Q(1{,}3)$, contém este ponto e tem declive

$$m = f'(1) = 2 + (1)\ln(1) = 2 + 1 \times 0 = 2$$

Substituindo as coordenadas do ponto de tangência e o declive em $y = mx + b$, podemos calcular o valor de b:

$$3 = 2(1) + b \;\Leftrightarrow\; 3 = 2 + b \;\Leftrightarrow\; 3 - 2 = b \;\Leftrightarrow\; 1 =$$

Pelo que a equação da reta r é: $y = 2x + 1$

Substituindo $y = 0$ na equação da reta r, calculamos a abcissa do ponto em que a reta interseta o eixo Ox, ou seja, a abcissa do ponto P:

$$0 = 2x + 1 \;\Leftrightarrow\; -1 = 2x \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{2} = x$$

Exame – 2005, 1.ª Fase (cód. 435)

79. Pela observação do gráfico podemos afirmar que:

- Como a função h é contínua em $\mathbb{R}$, $f(0) = \lim_{x \to 0} h(x)$, pelo que como $f(0) \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to 0} h(x) \neq +\infty$; logo a afirmação da opção (A) não é verdadeira.
- $\exists x \in \mathbb{R} : \ f(x) \neq -f(-x)$, ou seja a função h **não** é ímpar; pelo que a afirmação da opção (B) não é verdadeira.
- Como a h é decescente em $[0,3]$, $\forall x \in]0,3[, h'(x) < 0$, ou seja, a afirmação da opção (D) não é verdadeira.

Nem o gráfico, nem a informação complementar do enunciado permitem decidir sobre o valor de $\lim_{x \to +\infty} h(x)$, pelo que a afirmação da opção (C) **pode** ser verdadeira.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2004, Ép. especial (cód. 435)

80. Começamos por determinar a expressão da derivada, para $x > 0$:

$$\left(\frac{3x+2}{2x+2}\right)' = \frac{(3x+2)'(2x+2) - (3x+2)(2x+2)'}{(2x+2)^2} = \frac{(3+0)(2x+2) - (3x+2)(2+0)}{(2x+2)^2} =$$

$$= \frac{6x+6-(6x+4)}{(2x+2)^2} = \frac{6x+6-6x-4}{(2x+2)^2} = \frac{2}{(2x+2)^2}$$

Assim, $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) > 0$ (visto ser o quociente de funções estritamente positivas).
Logo, f é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$

Exame – 2004, Ép. especial (cód. 435)

81. Pela observação do gráfico de f', podemos verificar que $f'(x) < 0, \forall x \in [0,3]$, pelo que podemos afirmar que, f é decrescente em $[0,3]$.

Como $f(0) = 2$, e a função decresce em $[0,3]$, logo $f(3) < 2$.
Assim, temos que o valor da opção (A) é o único compatível com esta condição.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2004, 2.ª Fase (cód. 435)

82. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)' = \frac{(e^x-1)'x - (e^x-1)(x)'}{x^2} = \frac{(e^x - 0) \times x - (e^x - 1) \times 1}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$$

Como o declive (m) da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ é $f'(1)$, temos que:

$$m = f'(1) = \frac{1 \times e^1 - e^1 + 1}{1^2} = \frac{0+1}{1} = 1$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico da função que tem abcissa 1, temos:

$$f(1) = \frac{e^1 - 1}{1} = e - 1$$

Como o ponto de abcissa 1, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de b:

$$e - 1 = 1 \times 1 + b \ \Leftrightarrow \ e - 1 - 1 = b \ \Leftrightarrow \ e - 2 = b$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1, é:

$$y = 1 \times x + e - 2 \ \Leftrightarrow \ y = x + e - 2$$

Exame – 2004, 2.ª Fase (cód. 435)

83. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(1+3x^2e^{-x}\right)' = 0 + (3x^2)'e^{-x} + 3x^2\left(e^{-x}\right)' = 6xe^{-x} + 3x^2((-x)'e^{-x}) =$$

$$= 6xe^{-x} + 3x^2(-e^{-x}) = 6xe^{-x} - 3x^2e^{-x} = e^{-x}(6x-3x^2)$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(6x-3x^2) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x}=0}_{\text{Eq Imp, } e^{-x}>0} \vee 6x-3x^2=0 \Leftrightarrow 3x(2-x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = 0 \vee 2-x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee 2=x$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de f, temos:

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

Assim, podemos concluir que $x=0$ é o único minimizante de f, pelo que o mínimo da função é:

$$f(0) = 1+3(0)^2e^{-0} = 1+0\times 1 = 1$$

Exame – 2004, 1.ª Fase (cód. 435)

84. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)'}{x+\frac{1}{x}} = \frac{(x)'+\left(\frac{1}{x}\right)'}{\frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}} = \frac{1+\frac{(1)'\times x - 1\times (x)'}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x}} =$$

$$= \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{0\times x-1\times 1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x}} = \frac{\frac{x^2+0-1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x}} = \frac{(x^2-1)x}{(x^2+1)x^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)x} = \frac{x^2-1}{x^3+x}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^3+x} = 0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \wedge \underbrace{x^3+x\neq 0}_{\text{PV, porque } x>0} \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x=1 \vee x=-1$$

Como $D_f = \mathbb{R}^+$, $x=1$ é o único zero da derivada, e assim, estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de f, temos:

x	0		1	$+\infty$
f'	n.d.	$-$	0	$+$
f	n.d.	$\searrow$	min	$\nearrow$

Assim podemos concluir que a função f:

- é decrescente no intervalo $]0,1]$;
- é crescente no intervalo $[1,+\infty[$;
- tem um único extremo, mais concretamente um mínimo cujo minimizante é 1

Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)

85. Como x_0 é uma raiz dupla do polinómio que define a função g, então $g(x) = (x - x_0)^2(ax^2 + bx + c)$, determinando a expressão da derivada, vem:

$$g'(x) = \big((x - x_0)^2(ax^2 + bx + c)\big)' = \big((x^2 - 2x_0x + x_0^2)(ax^2 + bx + c)\big)' =$$
$$= (x^2 - 2x_0x + x_0^2)'(ax^2 + bx + c) + (x^2 - 2x_0x + x_0^2)(ax^2 + bx + c)' =$$
$$= (2x - 2x_0)(ax^2 + bx + c) + (x^2 - 2x_0x + x_0^2)(2ax + b)$$

Como o declive (m) da reta tangente ao gráfico de g em $x = x_0$ é $g'(x_0)$, temos que:

$$m = g'(x_0) = (2x_0 - 2x_0)(ax_0^2 + bx_0 + c) + (x_0^2 - 2x_0x + x_0^2)(2ax_0 + b) =$$
$$= 0(ax_0^2 + bx_0 + c) + (2x_0^2 - 2x_0x)(2ax_0 + b) = 0 + 0(2ax_0 + b) = 0$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico da função que tem abcissa x_0, temos:

$$g(x_0) = (x_0 - x_0)^2(ax_0^2 + bx_0 + c) = 0(ax_0^2 + bx_0 + c) = 0$$

Como o ponto de abcissa x_0, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de b: $0 = 0 \times 0 + b \;\Leftrightarrow\; b = 0$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa x_0, é: $y = 0 \times x + 0 \;\Leftrightarrow\; y = 0$

Como $y = 0$ define o eixo Ox, temos o eixo Ox é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa x_0.

Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)

86. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$h'(x) = \big(15 - 4\ln(-x^2 + 10x + 11)\big)' = (15)' - 4\big(\ln(-x^2 + 10x + 11)\big)' = 0 - 4\left(\frac{(-x^2 + 10x + 11)'}{-x^2 + 10x + 11}\right) =$$
$$= -4\left(\frac{-2x + 10}{-x^2 + 10x + 11}\right) = \frac{8x - 40}{-x^2 + 10x + 11}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$h'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{8x - 40}{-x^2 + 10x + 11} = 0 \;\Leftrightarrow\; 8x - 40 = 0 \land -x^2 + 10x + 11 \neq 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{40}{8} \;\land \big(x \neq -1 \lor x \neq 11\big) \;\Leftrightarrow\; x = 5$$

C.A.:

$$-x^2 + 10x + 11 = 0$$
$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(-1)(11)}}{2(-1)}$$
$$x = -1 \;\lor\; x = 11$$

Assim, estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de h, para $x \in [0,10]$, temos:

x	0		5		10
$8x - 40$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$-x^2 + 10x + 11$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
h'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
h	Máx	↘	min	↗	Máx

Logo, como h é decrescente no intervalo [0,5] e crescente no intervalo [5,10]; podemos concluir 5 é o minimizante da função h.
Como o ponto da rampa em que a altura é mínima se situa a 5 metros da parede A, e as duas paredes distam 10 metros, o ponto de altura mínima também se situa a 5 metros da parede B $(10 - 5 = 5)$, ou seja é equidistante das duas paredes.

Exame – 2003, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

87. Como o nível de poluição do ar diminuiu enquanto o purificador esteve ligado e começou a aumentar quando o purificador foi desligado, sabemos que o purificador esteve ligado entre as zero horas e $t = t_0$, sendo t_0 o minimizante da função.

Assim, para determinar t_0, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$P'(t) = \left(1 - \frac{\ln(t+1)}{t+1}\right)' = (1)' - \left(\frac{\ln(t+1)}{t+1}\right)' = 0 - \frac{\big(\ln(t+1)\big)'(t+1) - \big(\ln(t+1)\big)(t+1)'}{(t+1)^2} =$$

$$= -\frac{\frac{(t+1)'}{t+1}(t+1) - \big(\ln(t+1)\big)(t'+1')}{(t+1)^2} = -\frac{(t+1)' - \big(\ln(t+1)\big)(1+0)}{(t+1)^2} =$$

$$= -\frac{1-\ln(t+1)}{(t+1)^2} = \frac{-1+\ln(t+1)}{(t+1)^2} = \frac{\ln(t+1)-1}{(t+1)^2}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$P'(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\ln(t+1)-1}{(t+1)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln(t+1) - 1 = 0 \;\wedge\; \underbrace{(t+1)^2 \neq 0}_{\text{PV, porque } t\in[0,12]} \;\Leftrightarrow\; \ln(t+1) = 1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \ln(t+1) = 1 \;\Leftrightarrow\; t+1 = e^1 \;\Leftrightarrow\; t = e-1$$

Assim, estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função A, para $t \in [0{,}24]$, temos:

t	0		$e-1$		24
P'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
P	Máx	$\searrow$	min	$\nearrow$	Máx

Logo, como P é decrescente no intervalo $[0,e-1]$ e crescente no intervalo $[e-1{,}24]$; podemos concluir $e-1$ é o minimizante da função P.
Como $e - 1 \approx 1{,}718$, e 0,718 horas são $0{,}718 \approx 43{,}080$ minutos, podemos concluir que o purificador esteve ligado desde as zero horas até às 1,718 horas, ou seja esteve ligado durante 1 hora e 43 minutos.

Exame – 2003, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

88. Como qualquer função quadrática, f, é definida pela expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, determinando a expressão da derivada, vem:

$$f'(x) = (ax^2 + bx + c)' = (ax^2)' + (bx)' + (c)' = 2ax + b + 0 = 2ax + b$$

Assim, o declive (m) da reta tangente ao gráfico de uma função quadrática num ponto $x = x_0$ é $f'(x_0)$, pelo que:

$$m = f'(x_0) = 2ax_0 + b$$

E para que a reta tangente seja paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, $m = 1$ (porque a bissetiz dos quadrantes ímpares é uma reta de declive 1, e os declives de retas paralelas são iguais), logo:

$$m = 1 \;\Leftrightarrow\; 2ax_0 + b = 1 \;\Leftrightarrow\; 2ax_0 = 1 - b \;\Leftrightarrow\; x_0 = \frac{1-b}{2a}$$

Ou seja, sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, a reta tangente ao gráfico da função só tem declive 1 no ponto de abcissa $x = \dfrac{1-b}{2a}$; ou seja, só existe um ponto do gráfico cuja reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exame – 2003, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

89. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$(f-g)'(x) = \left(\ln x - (x^2-3)\right)' = (\ln x)' - \left((x^2-3)\right)' = \frac{1}{x} - (2x-0) = \frac{1}{x} - \frac{2x^2}{x} = \frac{1-2x^2}{x}$$

Como $D_f = \mathbb{R}^+$ e $D_g = \mathbb{R}$, temos que $D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^+$, e assim, calculando os zeros da derivada, vem:

$$(f-g)'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1-2x^2}{x} = 0 \;\Leftrightarrow\; 1-2x^2 = 0 \;\wedge\; \underbrace{x \neq 0}_{\text{PV, porque } x>0} \;\Leftrightarrow\; 1 = 2x^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{1}{2} = x^2 \;\Leftrightarrow\; \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = x \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\vee\; x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $D_{f-g} = \mathbb{R}^+$, $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ é o único zero da derivada, e assim, estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de $f-g$, temos:

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$(f-g)'$	n.d.	$+$	0	$-$
$(f-g)$	n.d.	$\nearrow$	Máx	$\searrow$

Assim podemos concluir que a função $f-g$:

- é crescente no intervalo $\left]0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$.

Exame – 2002, Prova para militares (cód. 435)

90. Para determinar o minimizante, e o mínimo, da função, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$A'(x) = \left(\frac{2x^3+8}{x}\right)' = \frac{(2x^3+8)'x - (2x^3+8)(x)'}{x^2} = \frac{((2x^3)' + (8)')x - (2x^3+8)\times 1}{x^2} =$$

$$= \frac{(6x^2+0)x - (2x^3+8)}{x^2} = \frac{6x^3 - 2x^3 - 8}{x^2} = \frac{4x^3-8}{x^2}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$A'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{4x^3-8}{x^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 4x^3 - 8 = 0 \;\wedge\; x^2 \neq 0 \;\Leftrightarrow\; 4x^3 = 8 \;\wedge\; x \neq 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x^3 = \frac{8}{4} \;\wedge\; x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt[3]{2} \;\wedge\; x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt[3]{2}$$

Assim, estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função A, para $x > 0$, temos:

x	0		$\sqrt[3]{2}$	$+\infty$
A'		$-$	0	$+$
A		$\searrow$	min	$\nearrow$

Logo, como a função A é decrescente no intervalo $]0, \sqrt[3]{2}]$ e crescente no intervalo $[\sqrt[3]{2}, +\infty[$; podemos concluir $\sqrt[3]{2}$ é o minimizante da função A, ou seja o valor de x, para o qual a área total da embalagem é mínima.

Exame – 2002, 2.ª fase (cód. 435)

91. Como o declive de uma reta tangente ao gráfico de uma função, é dado pelo valor da derivada para a abcissa do ponto de tangência, os declives das retas r e s são $f'(a)$ e $f'(b)$, respetivamente ($m_r = f'(a)$ e $m_s = f'(b)$).

    Como a função f é crescente, a função derivada, f', é sempre não negativa ($f'(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

    Como retas perpendiculares têm declives com sinais contrários, as retas r e s não podem ser perpendiculares porque têm ambas declives positivos $\left(\left(f'(a) \geq 0 \wedge f'(b) \geq 0\right) \Rightarrow f'(a) \neq -\dfrac{1}{f'(b)} \right)$.

Exame – 2002, 2.ª fase (cód. 435)

92. Como o declive de uma reta tangente ao gráfico de f, é dado pelo valor da derivada para a abcissa 1, temos que $m_r = f'(1)$.

    Assim, determinando a expressão da derivada, vem:

$$f'(x) = (1 + 2\ln x)' = (1)' + 2(\ln x)' = 0 + 2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x}$$

    Pelo que: $m_r = f'(1) = \dfrac{2}{1} = 2$

    Resposta: **Opção B**

Exame – 2002, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

93. Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

    Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de f, vem:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$

    Logo, como f é decrescente no intervalo $]-\infty,2]$ e crescente no intervalo $[2,+\infty[$; podemos concluir que f em um máximo para $x = 2$.

    Resposta: **Opção C**

Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)

94. Como se pretende determinar a equação de uma reta tangente ao gráfico de f, que seja paralela à reta de equação $y = x - 2$, ou seja, uma reta com declive 1, pretende-se que o declive da reta tangente seja 1 (porque retas paralelas têm declives iguais).

Como o declive de uma reta tangente no ponto de abcissa a, é dado pelo valor da derivada para a, temos que $f'(a) = 1$.

Como a derivada de f é

$$f'(x) = (e^x)' = e^x$$

Logo, calculando o valor da abcissa, a, do ponto onde a reta tangente tem declive, vem:

$$f'(a) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \ln 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$$

Pelo que a ordenada do ponto de tangência é $f(0) = e^0 = 1$

Assim, substituindo o valor do declive e as coordenadas do ponto de tangência em $y = mx + b$, podemos determinar o valor de b:

$$1 = 0 \times 1 + b \quad \Leftrightarrow \quad 1 = b$$

Pelo que uma equação da reta paralela à reta r e tangente à curva C é:

$$y = 1 \times x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = x + 1$$

Exame – 2001, Ép. especial

95. Como $f'(3) = 4$, logo, pela definição de derivada num ponto, $f'(3) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 4$

Como $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x+3)(x-3)$, temos que:

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \to 3} \left(\frac{1}{x+3} \times \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{1}{x+3} \times \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{1}{6} \times 4 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, 2.ª fase (cód. 435)

96. Para que a reta de equação $y = x$ seja tangente ao gráfico de uma certa função f, no ponto de abcissa 0, têm que se verificar as condições:

- $f(0) = 0$, ou seja, o ponto de coordenadas (0,0) é o ponto de tangência pelo que deve pertencer ao gráfico de f (pelo que podemos excluir expressões das opções (C) e (D)).
- $f'(0) = 1$, ou seja o declive da reta tangente no ponto de abcissa 0, deve ser 1, porque é o declive da reta $y = x$ (pelo que podemos excluir a expressão da opção (B) porque $(x^2 + 2x)' = 2x + 2$ e substituindo x por 0, obtemos o valor 2 para o declive).

A expressão da opção (A) é a única que verifica cumulativamente as duas condições anteriores (substituindo x por 0, obtemos 0 para a ordenada do ponto de tangência e o valor da derivada $(x^2 + x)' = 2x + 1$ para $x = 0$ é 1).

Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

97. Começamos por determinar a expressão da derivada de f:

$$f'(x) = (3x - 2\ln x)' = (3x)' - 2(\ln x)' = 3 - 2\left(\frac{1}{x}\right) = 3 - \frac{2}{x} = \frac{3x}{x} - \frac{2}{x} = \frac{3x-2}{x}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{x} = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \land \underbrace{x \neq 0}_{\text{PV, porque } x>0} \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Assim, estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função f, temos:

x	0		$\frac{2}{3}$	$+\infty$
f'	n.d.	$-$	0	$+$
f	n.d.	$\searrow$	min	$\nearrow$

Logo, como f é decrescente no intervalo $\left]0,\frac{2}{3}\right]$ e crescente no intervalo $\left[\frac{2}{3},+\infty\right[$; podemos concluir que a função tem um único mínimo, que é $f\left(\frac{2}{3}\right)$.

Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

98.

98.1. Para estudar a monotonia da função f, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(t) = \left(\frac{5}{1+124e^{-0,3t}}\right)' = \frac{(5)'(1+124e^{-0,3t}) - 5(1+124e^{-0,3t})'}{(1+124e^{-0,3t})^2} = \frac{0 - 5\big((1)' + 124(e^{-0,3t})'\big)}{(1+124e^{-0,3t})^2} =$$

$$= \frac{-5\big(0 + 124((-0,3t)'e^{-0,3t})\big)}{(1+124e^{-0,3t})^2} = \frac{-5\big(124(-0,3 \times e^{-0,3t})\big)}{(1+124e^{-0,3t})^2} = \frac{186e^{-0,3t}}{(1+124e^{-0,3t})^2} =$$

Como $e^{-0,3t}$, $\forall t \geq 0$, então também $186e^{-0,3t} > 0$ e $(1+124e^{-0,3t})^2 > 0$, ou seja a derivada da função f é positiva para todos os valores de t,

$$f'(t) > 0 \,,\ \forall t > 0$$

o que significa que a função é crescente no seu domínio.
No contexto da situação descrita, isto significa que o número de pessoas que sabiam do acidente em Malmequeres de Baixo, foi sempre aumentando com o passar do tempo.

98.2. Como o segundo acidente foi testemunhado pelas mesmas pessoas, sabemos que $f(0) = g(0)$.
Assim, como

$$f(0) = \frac{5}{1+124e^{-0,3\times 0}} = \frac{5}{1+124e^{0}} = \frac{5}{1+124} = \frac{5}{125}$$

Logo

$$g(0) = \frac{5}{125} \Leftrightarrow \frac{5}{1+ae^{-b\times 0}} = \frac{5}{125} \Leftrightarrow \frac{5}{1+a} = \frac{5}{125} \Leftrightarrow 1+a = 125 \Leftrightarrow a = 125-1 \Leftrightarrow a = 124$$

Desta forma temos que:

$$g(t) = \frac{5}{1+124e^{-bt}} \,,\ t \geq 0$$

E uma vez que a notícia se propagou mais depressa, para cada valor de t, temos que:

$$g(t) > f(t) \Leftrightarrow \frac{5}{1+124e^{-bt}} > \frac{5}{1+124e^{-0,3t}} \Leftrightarrow 1+124e^{-bt} > 1+124e^{-0,3t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 124e^{-bt} > 124e^{-0,3t} \Leftrightarrow e^{-bt} > e^{-0,3t} \Leftrightarrow -bt < -0,3t \Leftrightarrow -b < -0,3 \Leftrightarrow b > 0,3$$

Assim podemos concluir que pelo facto de que, no instante $t = 0$, o mesmo número de pessoas sabiam dos dois acidentes, ou seja $f(0) = g(0)$, então o parâmetro a, da função g, tem o mesmo valor que o seu correspondente na função f, ou seja 124.
Como, no segundo acidente, mais pessoas sabiam da notícia, no mesmo instante, $g(t) > f(t)$, $(t > 0)$, o que se verifica se o parâmetro b, da função g, for maior que o seu correspondente na função f.

Exame – 2001, Prova modelo (cód. 435)

99. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x-1}\right)' = \frac{(e^x)'(x-1)-(e^x)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(e^x)(x-1)-(e^x)(1-0)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(e^x)(x-1)-e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x\big((x-1)-1\big)}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; e^x(x-2) = 0 \wedge \underbrace{(x-1)^2 \neq 0}_{\text{PV, } x\neq 1} \;\Leftrightarrow\; \underbrace{e^x = 0}_{\text{Imp., } e^x>0} \vee x-2=0 \;\Leftrightarrow\; x = 2 = 0$$

Analisando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de f, temos:

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
f'	$-$	n.d.	$-$	0	$+$
f	↘	n.d.	↘	min	↗

Assim, podemos concluir que a função f:

- é decrescente no intervalo $]-\infty,1[$ e também no intervalo $]1,2]$;
- é crescente no intervalo $[2,+\infty[$;
- tem um único extremo - um mínimo relativo (cujo minimizante é 2).

Exame – 2000, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

100. Da análise do gráfico de g, podemos inferir a monotonia da função, e depois relacionar esta informação com a variação do sinal da derivada:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	n.d.	↗
f'	$-$	n.d.	$+$

Assim, a única representação gráfica coerente com esta informação é a representação da opção (A).

Resposta: **Opção A**

Exame – 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

101. Começamos por verificar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \big(e^x(x^2+x)\big)' = (e^x)'(x^2+x) + e^x(x^2+x)' = e^x(x^2+x) + e^x(2x+1) =$$

$$= e^x\big((x^2+x)+(2x+1)\big) = e^x(x^2+3x+1)$$

Como o declive (m) da reta tangente ao gráfico de f em $x=0$ é $f'(0)$, temos que:

$$m = f'(0) = e^0(0^2+3(0)+1)^1 \times (0+0+1) = 1$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico da função que tem abcissa 0, temos:

$$f(0) = e^0(0^2+0) = 1 \times 0 = 0$$

Como o ponto de abcissa 0, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx+b$, para calcular o valor de b:

$$0 = 1\times 0 + b \;\Leftrightarrow\; 0 = b$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0, é:

$$y = 1\times x + 0 \;\Leftrightarrow\; y = x$$

Exame – 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

102. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$c'(t) = \left(t^2e^{-0,6t}\right)' = (t^2)'e^{-0,6t} + t^2(e^{-0,6t})' = 2te^{-0,6t} + t^2(-0,6t)'e^{-0,6t} =$$

$$= 2te^{-0,6t} - 0,6t^2e^{-0,6t} = e^{-0,6t}(2t - 0,6t^2)$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$c'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-0,6t}(2t - 0,6t^2) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-0,6t} = 0}_{\text{Imp., } e^{-0,6t}>0} \vee 2t - 0,6t^2 = 0 \Leftrightarrow t(2 - 0,6t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee 2 - 0,6t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee 2 = 0,6t \Leftrightarrow t = 0 \vee \frac{2}{\frac{6}{10}} = t \Leftrightarrow t = 0 \vee \frac{10}{3} = t$$

Analisando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de c, temos:

t	0		$\frac{10}{3}$	$+\infty$
c'	0	$+$	0	$-$
c	min	$\nearrow$	Máx	$\searrow$

Assim, como a função c é crescente no intervalo $\left[0,\frac{10}{3}\right]$ e decrescente no intervalo $\left[\frac{10}{3},+\infty\right[$, podemos concluir que a concentração registou um máximo, quando $t = \dfrac{10}{3}$.

Assim, determinado o valor da concentração máxima de *AntiDor* no sangue de uma pessoa que o tenha tomado, e arredondando o resultado às décimas, temos:

$$c\left(\frac{10}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}\right)^2 e^{-0,6\times\frac{10}{3}} \approx 1,5$$

Exame – 2000, Prova modelo (cód. 435)

103. Como a função tem uma assíntota horizontal, quando $x \to +\infty$, o declive da reta tangente ao gráfico de h, num ponto de abcissa arbitrariamente grande aproxima-se de 0, porque é o declive da assíntota, ou seja, a variação da função tende para zero, porque o gráfico da função aproxima-se de uma reta (que tem variação nula).

Resposta: **Opção A**

Exame – 1999, Prova para militares (cód. 135)

104. Como o declive da reta tangente ao gráfico de uma função é dado pelo valor da derivada para a abcissa do ponto de tangência, temos que o declive da reta r, pode ser obtido calculado como $f'(a)$, e também pode ser calculado como $g'(b)$.

Assim, temos que

- $f'(x) = (e^x)' = e^x$, pelo que , $m_r = f'(a) = e^a$
- $g'(x) = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, pelo que , $m_r = g'(b) = \dfrac{1}{b}$

Logo: $f'(a) = g'(b) \Leftrightarrow e^a = \dfrac{1}{b}$

Resposta: **Opção A**

Exame – 1999, 2.ª fase (cód. 135)

105. Determinando a expressão da derivada, vem:

$$v'(t) = \big(-3\ln(1-0{,}005t) - 0{,}01t \big)' = -3\big(\ln(1-0{,}005t)\big)' - (0{,}01t)' = -3 \times \frac{(1-0{,}005t)'}{1-0{,}005t} - 0{,}01 =$$

$$= -3 \times \frac{0-0{,}005}{1-0{,}005t} - 0{,}01 = \frac{0{,}015}{1-0{,}005t} - 0{,}01 = \frac{0{,}015}{1-0{,}005t} - \frac{0{,}01(1-0{,}005t)}{1-0{,}005t} =$$

$$= \frac{0{,}015 - 0{,}01 + 0{,}00005t}{1-0{,}005t} = \frac{0{,}005 + 0{,}00005t}{1-0{,}005t}$$

Assim, como

- $0{,}005 + 0{,}00005t > 0 \ , \ \forall t \in [0{,}160]$
- $1 - 0{,}005t > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 > 0{,}005t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{0{,}005} > t \quad \Leftrightarrow \quad 200 > t \quad \Leftrightarrow \quad t < 200$
  logo também $1 - 0{,}005t > 0 \ , \ \forall t \in [0{,}160]$

Pelo que $\frac{0{,}005 + 0{,}00005t}{1-0{,}005t} > 0 \ , \ \forall t \in [0{,}160]$, isto é, $v'(t) > 0 \ , \ \forall t \in [0{,}160]$

Assim, como a derivada é positiva, podemos afirmar que a função é crescente no intervalo [0,160], ou seja, a velocidade máxima é atingida no estremo superior do intervalo de tempo; pelo que $v(160)$ é o máximo da função.
Calculando a velocidade máxima que o foguetão atinge, neste intervalo de tempo, e arredondado o resultado às décimas, temos:

$$v(160) = -3\ln(1 - 0{,}005 \times 160) - 0{,}01 \times 160 \approx 3{,}2$$

Exame – 1999, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

106. Como o declive da reta tangente é igual ao valor da derivada para a abcissa do ponto de tangência, e a derivada de g é:

$$g'(x) = \left(\sqrt{3}x^2 - 1\right)' = \sqrt{3}(x^2)' - (1)' = \sqrt{3}(2x) - 0 = 2\sqrt{3}x$$

Logo o declive da reta r é: $m_r = g'(a) = 2\sqrt{3} \times a$

Como o declive de uma reta é igual à tangente da respetiva inclinação, temos que $m_r = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$

Assim, igualando os dois valores do declive, temos que:

$$2\sqrt{3} \times a = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 1999, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

107. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$C'(t) = \left(2te^{-0,3t}\right)' = (2t)'e^{-0,3t} + 2t\left(e^{-0,3t}\right)' = 2e^{-0,3t} + 2t\left((-0,3t)'e^{-0,3t}\right) =$$
$$= 2e^{-0,3t} + 2t\left(-0,3e^{-0,3t}\right) = 2e^{-0,3t} - 0,6te^{-0,3t} = e^{-0,3t}(2-0,6t)$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$C'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0,3t}(2-0,6t) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-0,3t} = 0}_{\text{Imp., } e^{-0,3t}>0} \vee 2-0,6t = 0 \Leftrightarrow 2 = 0,6t \Leftrightarrow \frac{2}{\frac{6}{10}} = t \Leftrightarrow \frac{10}{3} = t$$

Analisando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de c, temos:

t	0		$\frac{10}{3}$	$+\infty$
C'	0	+	0	−
C	min	$\nearrow$	Máx	$\searrow$

Assim, como a função c é crescente no intervalo $\left[0,\frac{10}{3}\right]$ e decrescente no intervalo $\left[\frac{10}{3},+\infty\right[$, podemos concluir que o instante em que a concentração de medicamento no sangue do doente foi máxima foi $t = \frac{10}{3}$.

Como $t = \frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}$ de hora são $\frac{1}{3} \times 60 = \frac{60}{3} = 20$ minutos, o instante em que a concentração de medicamento no sangue do doente foi máxima foi às 3 horas e 20 minutos após as 9 horas da manhã daquele dia, ou seja, às 12 horas e 20 minutos.

Exame – 1999, Prova modelo (cód. 135)

108. Como o declive da reta tangente é igual ao valor da derivada para a abcissa do ponto de tangência, e a derivada de g é:

$$g'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

E assim, o declive da reta tangente no ponto de abcissa a, é $m = g'(a) = \frac{1}{a}$.

Como retas paralelas têm declives iguais, e o declive da bissetriz dos quadrantes ímpares é 1, pretende-se que o declive da reta tangente seja 1, ou seja, $m = 1$

Assim, igualando os dois valores do declive, temos que:

$$\frac{1}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1} = a \Leftrightarrow 1 = a$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 1998, Prova para militares (cód. 135)

109. Como o declive (m) da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ é $f'(1)$, temos que:

$$m = f'(1) = \frac{1+\ln 1}{1} = 1 + 0 = 1$$

Como o ponto de abcissa 1 (e ordenada 0), também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de b:

$$0 = 1 \times 1 + b \Leftrightarrow 0 = 1 + b \Leftrightarrow -1 = b$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0, é:

$$y = 1 \times x + (-1) \Leftrightarrow y = x - 1$$

Exame – 1998, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

110. Da análise do gráfico de g, podemos inferir a monotonia da função, e depois relacionar esta informação com a variação do sinal da derivada:

x		-2		2	
h	$\longrightarrow$	n.d.	$\searrow$	n.d.	$\nearrow$
h'	0	n.d.	$-$	n.d.	$+$

Assim, a única representação gráfica coerente com esta informação é a representação da opção (C).

Resposta: **Opção C**

Exame – 1998, Prova modelo (cód. 135)

111. A distância ao primeiro poste do ponto do fio mais próximo do solo, corresponde ao valor do minimizante da função f.
Assim, determinando a expressão da derivada de f, vem:

$$f'(x) = \left(5\left(e^{1-0,1x} + e^{0,1x-1}\right)\right)' = 5\left(e^{1-0,1x} + e^{0,1x-1}\right)' = 5\Big(\left(e^{1-0,1x}\right)' + \left(e^{0,1x-1}\right)'\Big) =$$

$$= 5\big((1-0,1x)'e^{1-0,1x} + (0,1x-1)'e^{0,1x-1}\big) = 5\big(-0,1e^{1-0,1x} + 0,1e^{0,1x-1}\big)$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 5\big(-0,1e^{1-0,1x} + 0,1e^{0,1x-1}\big) = 0 \;\Leftrightarrow\; -0,1e^{1-0,1x} + 0,1e^{0,1x-1} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 0,1e^{0,1x-1} = 0,1e^{1-0,1x} \;\Leftrightarrow\; e^{0,1x-1} = e^{1-0,1x} \;\Leftrightarrow\; 0,1x - 1 = 1 - 0,1x \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 0,1x + 0,1x = 1 + 1 \;\Leftrightarrow\; 0,2x = 2 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{2}{\frac{2}{10}} \;\Leftrightarrow\; x = 10$$

Analisando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de f, temos:

x	0		10		30
f'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
f	Máx	$\searrow$	min	$\nearrow$	Máx

Assim, como f é decrescente no intervalo $[0,10]$ e crescente no intervalo $[10,30]$, podemos concluir que a distância ao primeiro poste do ponto do fio mais próximo do solo é de 10 metros.

Exame – 1998, Prova modelo (cód. 135)

112. Como a reta t contém os pontos de coordenadas $(0,0)$ e $(6,3)$, podemos calcular o seu declive:

$$m_t = \frac{3-0}{6-0} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Assim, como o declive (m) da reta tangente ao gráfico de h em $x = a$ é $h'(a)$, temos que

$$h'(a) = m_t = \frac{1}{2}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 1997, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)