# MATEMÁTICA A - 12º Ano
# Funções - 1ª Derivada (extremos, monotonia e retas tangentes)
# Propostas de resolução

## Exercícios de exames e testes intermédios

1. Recorrendo à definição de derivada num ponto, temos que:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{3+\dfrac{e^x}{1-x}-\left(3+\dfrac{e^0}{1-0}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{3+\dfrac{e^x}{1-x}-3-\dfrac{1}{1}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e^x}{1-x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e^x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e^x-(1-x)}{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1-x)}{x(1-x)} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1-x)}{x(1-x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+x}{x(1-x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x(1-x)}+\frac{x}{x(1-x)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-x}\right) = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{Lim. Notável}}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}+\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x} =$$

$$= 1\times\frac{1}{1-0}+\frac{1}{1-0} = 1\times 1+1 = 2$$

Exame – 2018, 2ª Fase

2. Temos que, pela definição de derivada num ponto, $f'(2) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

   Assim, vem que:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{f(x)-f(2)} = 4 \Leftrightarrow \lim_{x\to 2}\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(2)}{x^2-2x}} = 4 \Leftrightarrow \frac{\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x^2-2x}} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x(x-2)}} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x}\times\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\right)} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x}\times\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\dfrac{1}{2}\times f'(2)} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = 4\times\frac{1}{2}\times f'(2) \Leftrightarrow 1 = \frac{4}{2}\times f'(2) \Leftrightarrow 1 = 2f'(2) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = f'(2)$$

   Resposta: **Opção C**

Exame – 2017, 2ª Fase

3. Como os extremos relativos correspondem aos zeros da função derivada, começamos por determinar a expressão da função derivada da função $g$:

$$g'(x) = \left(\frac{k}{x} + f(x)\right)' = \left(\frac{k}{x}\right)' + \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{k' \times x - x' \times k}{x^2} + \frac{(\ln x)'x - x'(\ln x)}{x^2} =$$

$$= \frac{0 - 1 \times k}{x^2} + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} \underset{x \neq 0}{=} \frac{-k + 1 - \ln x}{x^2}$$

Como a função tem um extremo relativo para $x = 1$, então 1 é zero da função derivada ($g'(1) = 0$), pelo que podemos determinar o valor de $k$ resolvendo a equação seguinte:

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{-k + 1 - \ln 1}{1^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-k + 1 - 0}{1} = 0 \Leftrightarrow -k + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = k$$

Exame – 2017, 2ª Fase

4. Começamos por determinar a expressão da derivada da função $f$:

$$f'(x) = \left(9 - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right)\right)' = (9)' - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right)' =$$

$$= 0 - 2{,}5\left(\left(e^{1-0{,}2x}\right)' + \left(e^{0{,}2x-1}\right)'\right) = -2{,}5\left((1 - 0{,}2x)'\left(e^{1-0{,}2x}\right) + (0{,}2x - 1)'\left(e^{0{,}2x-1}\right)\right) =$$

$$= -2{,}5\left(-0{,}2\left(e^{1-0{,}2x}\right) + 0{,}2\left(e^{0{,}2x-1}\right)\right) = -2{,}5 \times 0{,}2\left(-e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right) =$$

$$= -0{,}5\left(-e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right)$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função ($[0{,}7]$), vem:

$$-0{,}5\left(-e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right) = 0 \Leftrightarrow -e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1} = 0 \Leftrightarrow e^{0{,}2x-1} = e^{1-0{,}2x} \Leftrightarrow$$

$$0{,}2x - 1 = 1 - 0{,}2x \Leftrightarrow 0{,}2x + 0{,}2x = 1 + 1 \Leftrightarrow 0{,}4x = 2 \Leftrightarrow 4x = 20 \Leftrightarrow x = 5$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

| $x$ | 0 | | 5 | | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | + | 0 | − | − |
| $f(x)$ | min | $\nearrow$ | Máx | $\searrow$ | min |

Assim, podemos concluir que o valor máximo da função $f$ é atingido quando $x = 5$, ou seja, a distância máxima entre a superfície da água e a ponte é:

$$f(5) = 9 - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2\times5} + e^{0{,}2\times5-1}\right) = 9 - 2{,}5\left(e^{1-1} + e^{1-1}\right) = 9 - 2{,}5\left(e^0 + e^0\right) = 9 - 2{,}5 \times 2 = 9 - 5 = 4$$

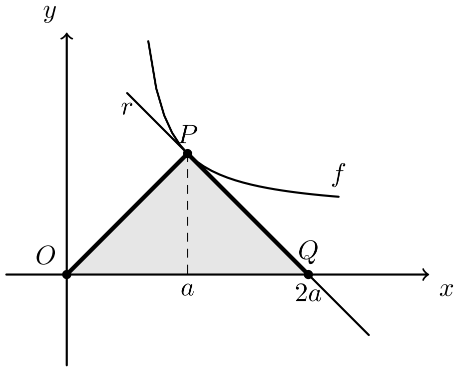
Ou seja, o barco do clube náutico não pode passar por baixo da ponte, porque a distância da superfície da água ao topo do mastro é de 6 metros e a maior distância entre a superfície da água e a ponte é de 4 metros.

Exame – 2017, 1ª Fase

5. Como $\overline{OP} = \overline{PQ}$, então o triângulo $[OPQ]$ é isósceles e $\overline{OQ} = 2a$

   Como as coordenadas do ponto $P$ são $(a,f(a))$ e as do ponto $Q$ são $(2a,0)$, temos que o declive da reta $PQ$, é:

$$m_{PQ} = \frac{0 - f(a)}{2a - a} = -\frac{f(a)}{a}$$




   Como a reta $r$ é tangente ao gráfico da função $f$ no ponto de abcissa $a$, então o declive da reta $r$, ou seja, da reta $PQ$, é igual a $f'(a)$, pelo que:

$$f'(a) = -\frac{f(a)}{a}$$

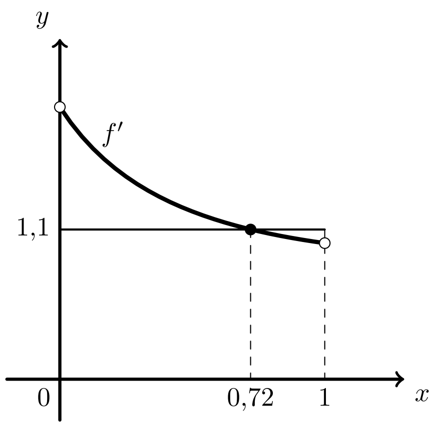
   Desta forma, temos que:

$$f'(a) + \frac{f(a)}{a} = -\frac{f(a)}{a} + \frac{f(a)}{a} = 0$$

Exame – 2017, 1ª Fase

6. Como o declive da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto é igual ao valor numérico da derivada no ponto, ou seja, $f'(a) = 1{,}1$, determinamos a expressão da derivada relativa ao intervalo $]0{,}1[$:

$$f'(x) = (\ln(e^x + x))' = \frac{(e^x + x)'}{e^x + x} = \frac{(e^x)' + (x)'}{e^x + x} = \frac{e^x + 1}{e^x + x}$$




   Assim, como o declive da reta tangente é 1,1, o valor de $a$ é a solução da equação

$$f'(a) = 1{,}1 \Leftrightarrow \frac{e^x + 1}{e^x + x} = 1{,}1$$

   Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função $f'$, e a reta horizontal definida por $y = 1{,}1$ numa janela coerente com a restrição $x \in ]0{,}1[$, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às centésimas) da abcissa do ponto $A$, $a = x_A \approx 0{,}72$

Exame – 2016, Ép. especial

7. Temos que:

$$p = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = f'(-1)$$

   Recorrendo à expressão algébrica função derivada de $f$, vem que:

$$p = f'(-1) = e^{-1}\left((-1)^2 + (-1) + 1\right) = e^{-1}(1 - 1 + 1) = e^{-1} \times 1 = \frac{1}{e}$$

   Logo, vem que:

$$q = -\frac{1}{p} = -\frac{1}{\frac{1}{e}} = -e$$

   Como $p$ é o valor da função derivada de $f$ no ponto de abcissa $-1$, então $p$ é o declive da reta tangente ao gráfico da função $f$ no ponto de abcissa $-1$
   E assim, o simétrico do inverso de $p$, ou seja, o valor de $q$, é o declive de uma reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $-1$

Exame – 2016, 1ª Fase

8. Temos que, pela definição de derivada num ponto $f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 6$

Assim, vem que

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2} \left( \frac{1}{x} \times \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x} \times \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2015, Ép. especial

9. Começamos por determinar a expressão da derivada da função $f$:

$$f'(x) = \left(x^2 e^{1-x}\right)' = \left(x^2\right)' \times e^{1-x} + x^2 \times \left(e^{1-x}\right)' = 2xe^{1-x} + x^2 \times (1-x)' \times e^{1-x} =$$
$$= 2xe^{1-x} + x^2 \times (-1) \times e^{1-x} = 2xe^{1-x} - x^2 e^{1-x}$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função ($\mathbb{R}_0^+$), vem:

$$2xe^{1-x} - x^2 e^{1-x} = 0 \Leftrightarrow xe^{1-x}(2-x) = 0 \Leftrightarrow xe^{1-x} = 0 \vee 2 - x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee \underbrace{e^{1-x} = 0}_{\text{Impossível}} \vee 2 = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

| $x$ | 0 | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | min | $\nearrow$ | Máx | $\searrow$ |

Assim, podemos concluir que a função $f$:

- é crescente no intervalo $[0,2]$;
- é decrescente no intervalo $[2, +\infty[$;
- tem um mínimo para $x = 0$
- tem um máximo para $x = 2$

Exame – 2015, Ép. especial

10. Para calcular o declive da reta tangente, no ponto de abcissa 4 começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x > 3$:

$$f'(x) = \left(\ln(x-3) - \ln x\right)' = \left(\ln(x-3)\right)' - \left(\ln x\right)' = \frac{(x-3)'}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa 4 é:

$$m = f'(4) = \frac{1}{4-3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Logo a equação da reta tangente é da forma $y = \dfrac{3}{4}x + b$

Como $f(4) = \ln(4-3) - \ln 4 = \ln 1 - \ln 4 = 0 - \ln 4 = -\ln 4$, sabemos que o ponto $P(4, -\ln 4)$ pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.
Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de $b$:

$$-\ln 4 = \frac{3}{4} \times 4 + b \Leftrightarrow -\ln 4 = 3 + b \Leftrightarrow -\ln 4 - 3 = b$$

Pelo que a equação da reta tangente é:

$$y = \frac{3}{4}x - \ln 4 - 3$$

Exame – 2015, 2ª Fase

11. Para determinar o instante em que a distância é mínima, começamos por determinar a expressão da derivada da função $d$:

$$d'(t) = \left(10+(5-t)e^{-0,05t}\right)' = (10)' + (5-t)' \times e^{-0,05t} + (5-t) \times (e^{-0,05t})' =$$

$$= 0 + (-1)e^{-0,05t} + (5-t) \times (-0,05t)'e^{-0,05t} = -e^{-0,05t} + (5-t) \times (-0,05e^{-0,05t}) =$$

$$= -e^{-0,05t} - 0,25e^{-0,05t} + 0,05te^{-0,05t} = e^{-0,05t}(-1-0,25+0,05t) = e^{-0,05t}(-1,25+0,05t)$$

Calculando os zeros da função derivada, com $t \geq 0$ vem:

$$d'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0,05t}(-1,25+0,05t) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-0,05t} = 0}_{\text{Eq.Imp.}} \vee -1,25+0,05t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,05t = 1,25 \Leftrightarrow t = \frac{1,25}{0,05} \Leftrightarrow t = 25$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

| $t$ | 0 | | 25 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $d'(t)$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $d(t)$ | 15 | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

Assim, como a função $d$ é decrescente no intervalo $]0,25]$ e crescente no intervalo $[25,+\infty[$ podemos concluir que a distância do centro da esfera ao ponto $P$ é mínima, quando $t = 25$, ou seja 25 segundos após se iniciar o movimento.

Exame – 2015, 1ª Fase

12. Começamos por determinar a expressão da derivada da função $g$:

$$g'(x) = \left(\frac{1+\ln x}{x^2}\right)' = \frac{(1+\ln x)'(x^2) - (1+\ln x)(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{\left(0+\frac{x'}{x}\right)(x^2) - (1+\ln x) \times 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x(1+\ln x)}{x^4} = \frac{\frac{x^2}{x} - 2x - 2x\ln x)}{x^4} \underset{x\neq 0}{=} \frac{x-2x-2x\ln x}{x^4} =$$

$$= \frac{-x-2x\ln x}{x^4} = \frac{x(-1-2\ln x)}{x(x^3)} \underset{x\neq 0}{=} \frac{-1-2\ln x}{x^3}$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função ($\mathbb{R}^+$), vem:

$$\frac{-1-2\ln x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow -1-2\ln x = 0 \wedge \underbrace{x^3 \neq 0}_{\text{PV},x>0} \Leftrightarrow -2\ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

| $x$ | 0 | | $e^{-\frac{1}{2}}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | n.d. | $+$ | 0 | $-$ |
| $g(x)$ | n.d. | $\nearrow$ | Máx | $\searrow$ |

Assim, como $g$ é crescente no intervalo $\left]0,e^{-\frac{1}{2}}\right]$ e decrescente no intervalo $\left[e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right[$ podemos concluir que o único valor de $x$, para o qual a função $g$ tem um extremo relativo, é $x = e^{-\frac{1}{2}}$ que é um maximizante da função.

Exame – 2014, Ép. especial

13. A afirmação (I) é falsa. Como a reta de equação $x = 0$ é uma assíntota vertical do gráfico de $f$, a função não é contínua para $x = 0$, logo não é contínua no intervalo $[-3,5]$, pelo que não estão verificadas as condições de aplicação do Teorema de Bolzano.

A afirmação (II) é falsa. Como $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-2x\big) = 0$ podemos afirmar que a reta de equação $y = 2x + 0$ é uma assíntota do gráfico da função $f$, quando $x \to -\infty$. Assim, quando $x \to -\infty$ o gráfico de $f$ tem uma assíntota que não é horizontal.

A afirmação (III) é verdadeira. O $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ é a derivada de $f$. Como a derivada existe e é positiva em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, podemos afirmar que $f$ é crescente em $]-\infty,0]$ e também em $[0,+\infty[$, o que permite confirmar a veracidade desta afirmação.

Exame – 2014, Ép. especial

14. Começamos por determinar a expressão da derivada da função $g$, para $x < 0$:

$$g'(x) = \Big(-x+f(x)\Big)' = \left(-x+x-1+\frac{\ln(-x)}{x}\right)' = \left(-1+\frac{\ln(-x)}{x}\right)' = -(1)' + \left(\frac{\ln(-x)}{x}\right)' =$$

$$= -0 + \frac{(\ln(-x))'x - \ln(-x)(x)'}{x^2} = \frac{\frac{(-x)'}{-x}\times x - \ln(-x)(1)}{x^2} = \frac{\frac{-1}{-x}\times x - \ln(-x)}{x^2} = \frac{1-\ln(-x)}{x^2}$$

Calculando os zeros da derivada da função $g$, para $x < 0$:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln(-x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1-\ln(-x) = 0 \land \underbrace{x^2 \neq 0}_{\text{P.V, pq } x<0} \Leftrightarrow 1 = \ln(-x) \Leftrightarrow -x = e^1 \Leftrightarrow x = -e$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

| $x$ | $-\infty$ | $-e$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|
| $1-\ln(-x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | n.d. |
| $x^2$ | $+$ | $+$ | $+$ | n.d. |
| $g'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | n.d. |
| $g(x)$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | n.d. |

Assim, podemos concluir que a função $g$:

- é decrescente no intervalo $]-\infty,-e]$;
- é crescente no intervalo $[-e,0[$;
- tem um mínimo para $x = -e$

Exame – 2014, 2ª Fase

15. Começando por determinar a expressão da derivada, temos:

$$f'(x) = \left(a+\ln\left(\frac{a}{x}\right)\right)' = \big(a+\ln a - \ln x\big)' = (a)' + (\ln a)' - (\ln x)' = 0 + 0 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}$$

Assim, em $\mathbb{R}^+$, a derivada é estritamente negativa, pelo que o gráfico da opção (B) é o único compatível com esta conclusão.

Resposta: **Opção B**

Exame – 2014, 1ª fase

16. Para calcular o declive da reta tangente, começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x > 0$:

$$f'(x) = \left(\frac{3x+\ln x}{x}\right)' = \left(\frac{3x}{x}\right)' + \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = (3)' + \frac{(\ln x)'x - \ln x(x)'}{x^2} = 0 + \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa 1 é: $m = f'(1) = \frac{1-\ln 1}{1^2} = \frac{1-0}{1} = 1$
Logo a equação da reta tangente é da forma $y = mx + b$

Como $f(1) = \frac{3(1)+\ln 1}{1} = 3 + 0 = 3$, sabemos que o ponto $P(1,3)$ pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.
Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de $b$: $3 = 1 + b \;\Leftrightarrow\; 2 = b$; pelo que a equação da reta tangente é:

$$y = x + 2$$

Teste Intermédio 12º ano – 30.04.2014

17. Começamos por determinar a expressão da derivada da função:

$$f'(t) = \left((4t+2)e^{3,75-t}\right)' = (4t+2)'e^{3,75-t}(4t+2) + \left(e^{3,75-t}\right)' = 4e^{3,75-t} + (4t+2)(3,75-t)'e^{3,75-t} =$$
$$= 4e^{3,75-t} + (4t+2)(-1)e^{3,75-t} = 4e^{3,75-t} - (4t+2)e^{3,75-t} = \left(4-(4t+2)\right)e^{3,75-t} =$$
$$= (4-4t-2)e^{3,75-t} = (2-4t)e^{3,75-t}$$

Determinando os zeros da derivada, vem:

$$f'(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; (2-4t)e^{3,75-t} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2-4t = 0 \,\vee\, \underbrace{e^{3,75-t} = 0}_{\text{Eq. Imp.}, e^{3,75-t}>0} \;\Leftrightarrow\; 2 = 4t \;\Leftrightarrow\; t = \frac{1}{2}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

| $t$ | 0 | | $\frac{1}{2}$ | | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ |
| $f(t)$ | min | ↗ | Máx | ↘ | min |

Assim, podemos concluir que a função $f$:

- é crescente no intervalo $\left[0,\frac{1}{2}\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left[\frac{1}{2},6\right]$;
- tem um maximizante $\left(\frac{1}{2}\right)$

Como o número máximo de alunos com gripe irá ocorrer no instante $t = 0,5$, o que corresponde a meio dia após as zero horas de segunda-feira, ou seja, segunda-feira às 12 horas.

Teste Intermédio 12º ano – 30.04.2014

18. Começamos por determinar a expressão da derivada da função, no intervalo $]0,+\infty[$:

$$\left(\frac{x}{2}-\ln\left(\frac{6x}{x+1}\right)\right)'=\left(\frac{1}{2}x\right)'-\left(\ln\left(\frac{6x}{x+1}\right)\right)'=\frac{1}{2}-\frac{\left(\frac{6x}{x+1}\right)'}{\frac{6x}{x+1}}=\frac{1}{2}-\frac{\frac{(6x)'(x+1)-6x(x+1)'}{(x+1)^2}}{\frac{6x}{x+1}}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\frac{6(x+1)-6x(1)}{(x+1)^2}}{\frac{6x}{x+1}}=\frac{1}{2}-\frac{\frac{6x+6-6x}{(x+1)^2}}{\frac{6x}{x+1}}=\frac{1}{2}-\frac{\frac{6}{(x+1)^2}}{\frac{6x}{x+1}}=\frac{1}{2}-\frac{6(x+1)}{6x(x+1)^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{x(x+1)}=$$

$$=\frac{x(x+1)}{2x(x+1)}-\frac{2}{2x(x+1)}=\frac{x(x+1)-2}{2x(x+1)}=\frac{x^2+x-2}{2x^2+2x}$$

Calculando os zeros da derivada, no intervalo $]0,+\infty[$, vem:

$$\frac{x^2+x-2}{2x^2+2x}=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \wedge \underbrace{2x^2+2x\neq 0}_{\text{PV},x>0} \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-2)}}{2(1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow \underbrace{x=-2}_{\text{Imp.},x>0} \vee x=1$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

| $x$ | 0 | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | n.d. | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | n.d. | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

Assim, como $f$ é decrescente no intervalo $]0,1]$ e crescente no intervalo $[1,+\infty[$ podemos concluir que 1 é um minimizante da função, pelo que $f(1)$ é o valor mínimo em $]0,+\infty[$.
Calculando o valor do mínimo, temos:

$$f(1)=\frac{1}{2}-\ln\left(\frac{6(1)}{1+1}\right)=\frac{1}{2}-\ln\left(\frac{6}{2}\right)=\frac{1}{2}-\ln 3=\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)-\ln 3=\ln\left(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{3}\right)=\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{3}\right)$$

Exame – 2013, Ép. especial

19. Podemos descrever a monotonia da função $g$ pela análise do gráfico, e relacionar com a variação do sinal da derivada:

| $x$ | $-\infty$ | $a$ | | $b$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $\nearrow$ | Máx | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |
| $g'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

Pela observação do gráfico de $g$ podemos ainda afirmar que $-2<a<0$ e $0<b<2$.
Como $f(x)=g(x-3)$, o gráfico de $f$ resulta de uma translação horizontal do gráfico de $g$, de 3 unidades para a direita.
Assim, temos que os extremos da função $f$ têm abcissas $a+3$ e $b+3$, e a variação do sinal é dado por:

| $x$ | $-\infty$ | $a+3$ | | $b+3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\nearrow$ | Máx | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

Como $-2<a<0$, temos que $1<a+3<3$; e como $0<b<2$, sabemos que $3<b+3<5$, pelo que o gráfico da opção (A) é o único compatível com as condições.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2013, 2ª fase

20. - Como $f(0) = a^0 = 1$ e $g(0) = a^{-0} = a^0 = 1$, o ponto $P(0,1)$ pertence aos gráficos das duas funções, pelo que **a afirmação (I) é falsa**.
    - Como $a > 1$ a função $g(x) = a^{-x}$ é estritamente decrescente, pelo que também **a afirmação (II) é falsa**.
    - Como $f'(x) = \left(a^x\right)' = a^x \ln a$, logo, $f'(-1) = a^{-1} \ln a = \dfrac{1}{a} \ln a = \dfrac{\ln a}{a}$
      e como $g'(x) = \left(a^{-x}\right)' = -a^{-x} \ln a$, logo $g'(1) = -a^{-1} \ln a = -\dfrac{1}{a} \ln a = -\dfrac{\ln a}{a}$
      E assim,
      $$f'(-1) - g'(1) = \frac{\ln a}{a} - \left(-\frac{\ln a}{a}\right) = \frac{\ln a}{a} + \frac{\ln a}{a} = \frac{2 \ln a}{a}$$
      pelo que **a afirmação (III) é verdadeira**.

    Resposta: **Opção B**

Exame – 2013, 1ª fase

21. - Como $-1$ é um zero de $f$, temos que $g'(-1) = f(-1) \times e^{-1} = 0 \times e^{-1} = 0$, sabemos que o declive da reta tangente ao gráfico no ponto de abcissa $-1$ é uma reta de declive zero, ou seja, uma reta horizontal, o que não é compatível com o gráfico da opção (I), pelo que este gráfico não representa a função $g$.
    - Como $e^{-x} > 0 \,, \forall x \in \mathbb{R}$, a função derivada $(g')$ e a função $f$ têm o mesmo sinal. Ou seja, a derivada é positiva apenas no intervalo $]2, +\infty[$, logo a função $g$ é crescente apenas neste intervalo, ao contrário do que acontece com o gráfico da opção (II), pelo que este gráfico também não é o que representa a função $g$.
    - Como $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) - 2] = 0$, a reta de equação $y = 2$ é uma assíntota do gráfico de $g$. Da observação do gráfico da opção (III), verifica-se que assíntota deste gráfico é a reta $y = -2$ e não a reta $y = 2$, pelo que também não é este o gráfico da função $g$.

    Desta forma, o gráfico da opção (IV) é o único que pode representar a função $g$, uma vez que é compatível com as condições enunciadas.

Exame – 2013, 1ª Fase

22. Começamos por determinar a expressão da derivada, para $x > 0$:

$$g'(x) = \left(f(x) - x + \ln^2 x\right)' = \left(f(x)\right)' - (x)' + \left(\ln^2 x\right)' = (x)' \ln x + x(\ln x)' - 1 + \left(\ln(x) \times \ln x\right)' =$$
$$= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 + (\ln x)' \times \ln x + \ln x \times (\ln x)' = \ln x + 1 - 1 + 2\left(\ln x \times \frac{1}{x}\right) =$$
$$= \ln x + \frac{2 \ln x}{x} = \ln x \left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

Calculando os zeros da derivada, no intervalo $]0,e]$, temos:

$$g'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln x \left(1 + \frac{2}{x}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln x = 0 \vee 1 + \frac{2}{x} = 0 \;\Leftrightarrow\; e^0 = x \vee 1 = -\frac{2}{x} \;\Leftrightarrow\; x = 1 \vee \underbrace{x = -2}_{-2 \notin ]0,e]}$$

Como $g'$ só tem um zero no intervalo $]0,e]$ $\left(x = 1\right)$, a variação do sinal da derivada e a relação com a monotonia de $g$ é:

| $x$ | 0 | | 1 | | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | n.d | $-$ | 0 | $+$ | $+$ |
| $g(x)$ | n.d | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | Max |

Assim, podemos concluir que a função $g$:

- é decrescente no intervalo $]0,1]$;
- é crescente no intervalo $[1,e]$;
- tem um mínimo (cujo minimizante é 1) e um máximo (cujo maximizante é $e$).

Exame – 2013, 1ª Fase

23. O declive da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $a$ é $f'(a)$.
Assim, determinando a expressão da derivada, vem:

$$f'(x) = \left(x^a + a^2 \ln x\right)' = \left(x^a\right)' + \left(a^2 \ln x\right)' = ax^{a-1} + a^2(\ln x)' = ax^{a-1} + a^2\left(\frac{1}{x}\right) = ax^{a-1} + \frac{a^2}{x}$$

Logo, temos que:

$$f'(a) = a \times a^{a-1} + \frac{a^2}{a} = a^{1+a-1} + a = a^a + a$$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12º ano – 24.05.2013

24. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$C'(t) = \left(0{,}5t^2 \times e^{-0{,}1t}\right)' = 0{,}5\big((t^2)' \times e^{-0{,}1t} + t^2 \times (e^{-0{,}1t})'\big) = 0{,}5\big(2te^{-0{,}1t} + t^2(-0{,}1e^{-0{,}1t})\big) =$$

$$= 0{,}5 \times 2te^{-0{,}1t} - 0{,}5 \times 0{,}1t^2e^{-0{,}1t} = te^{-0{,}1t} - 0{,}05t^2e^{-0{,}1t} = te^{-0{,}1t}(1 - 0{,}05t)$$

Calculando os zeros da derivada, vem:

$$C'(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; t \times e^{-0{,}1t} \times (1 - 0{,}05t) = 0 \;\Leftrightarrow\; \underbrace{t = 0}_{\text{Eq.Imp.},t>0} \;\vee\; \underbrace{e^{-0{,}1t} = 0}_{\text{Eq.Imp.},e^{-0{,}1t}>0} \;\vee\; 1 - 0{,}05t = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; -0{,}05t = -1 \;\Leftrightarrow\; t = \frac{1}{0{,}05} \;\Leftrightarrow\; t = 20$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

| $t$ | 0 | | 20 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $C'(t)$ | + | + | 0 | − |
| $C(t)$ | min | ↗ | Máx | ↘ |

Assim, como $C$ é crescente no intervalo $]0{,}20]$ e decrescente no intervalo $[20, +\infty[$ podemos concluir que quando $t = 20$, a concentração do produto químico na água é máxima.

Exame – 2012, Ép. especial

25. Sabemos que o declive da reta tangente ($m$) por ser calculado por:

- a tangente da inclinação: $m = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$
- o valor da derivada no ponto de abcissa $a$
  Determinando a expressão da derivada, vem:

$$f'(x) = \left(\ln\left(\frac{x}{3} + 2\right)\right)' = \frac{\left(\frac{x}{3} + 2\right)'}{\frac{x}{3} + 2} = \frac{\left(\frac{x}{3}\right)' + (2)'}{\frac{x}{3} + \frac{6}{3}} = \frac{\frac{1}{3} + 0}{\frac{x+6}{3}} = \frac{1}{x+6}$$

  Logo, $m = f'(a) = \dfrac{1}{a+6}$

Desta forma temos que:

$$\frac{1}{a+6} = 1 \;\Leftrightarrow\; 1 = a + 6 \wedge a \neq -6 \;\Leftrightarrow\; a = -5$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2012, 2ª Fase

26. Como o declive ($m$), da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa -1 é $f'(-1)$, começamos por determinar a expressão da derivada, para $x < 0$:

$f'(x) = \left(xe^{1-x}\right)' = (x)'e^{1-x} + x\left(e^{1-x}\right)' = 1 \times e^{1-x} + x(1-x)'e^{1-x} = e^{1-x} + x(-1)e^{1-x} = e^{1-x} - xe^{1-x}$

Calculando o declive da reta tangente temos:

$$m = f'(-1) = e^{1-(-1)} - (-1)e^{1-(-1)} = e^2 + e^2 = 2e^2$$

Calculando as coordenadas do ponto de tangência, temos: $f(-1) = (-1)e^{1-(-1)} = -e^2$, ou seja, o ponto $P(-1, -e^2)$ é um ponto do gráfico de $f$ que também pertence à reta tangente.
Substituindo o valor do declive na equação da reta, vem $y = 2e^2 \times x + b$
Substituindo as coordenadas do ponto na equação da reta, calculamos o valor da ordenada na origem:

$$-e^2 = 2e^2 \times (-1) + b \Leftrightarrow -e^2 = -2e^2 + b \Leftrightarrow -e^2 + 2e^2 = b \Leftrightarrow e^2 = b$$

Logo, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função $f$ no ponto de abcissa $x = -1$ é:

$$y = 2e^2 \times x + e^2$$

Exame – 2012, 1ª Fase

27. Como as retas $r$ e $s$ são paralelas, os respetivos declives são iguais.

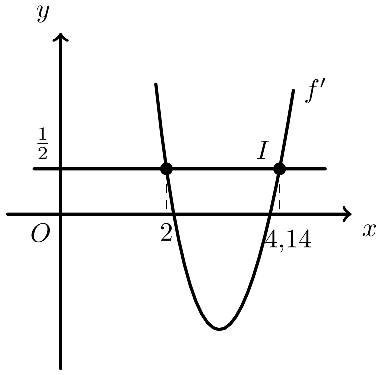
Como o declive da reta $r$ é $f'(2)$ e o da reta $s$ é $f'(b)$, temos que $f'(2) = f'(b)$, ou seja $b$ é uma solução da equação $f'(x) = f'(2)$

Como é conhecida a expressão analítica de $f'(x)$, podemos calcular
$f'(2) = 2^2 - 4(2) + \frac{9}{2} - 4\ln(2-1) = 4 - 8 + \frac{9}{2} - 4\ln(1) = -4 + \frac{9}{2} - 4 \times 0 = -\frac{8}{2} + \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$

Logo, podemos traçar na calculadora o gráfico da função derivada e a reta de equação $y = \frac{1}{2}$, numa janela compatível com o domínio da função, que se reproduz na figura ao lado.

Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados das coordenadas de pontos de interseção de dois gráficos, podemos determinar as soluções da equação $f'(x) = \frac{1}{2}$, que são as abcissas dos pontos de interseção.

Determinando o valor, arredondado às centésimas, do ponto $I$ de interseção dos dois gráficos, temos $I(4{,}14; 0{,}50)$ - o outro ponto tem abcissa 2, que é a abcissa do ponto $A$.




Como $b$ é uma das soluções da equação (diferente de 2), temos que $b \approx 4{,}14$

Teste Intermédio 12º ano – 24.05.2012

28. Podemos descrever a variação do sinal de $h'$, pela análise do gráfico, e relacionar com a monotonia da função $h$:

| $x$ | | 0 | |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | + | 0 | − |
| $h(x)$ | ↗ | Máx | ↘ |

Ou seja, a função $h$ é crescente se $x \leq 0$ e decrescente se $x \geq 0$, e apenas o gráfico da opção (D), é compatível com esta conclusão.

Resposta: **Opção D**

Exame – 2011, Prova especial

29. Como o declive $(m)$, da reta tangente ao gráfico de $g$ no ponto de abcissa 1 é $g'(1)$, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$g'(x) = \big((2x-1)\times f(x)\big)' = (2x-1)'f(x) + (2x-1)\big(f(x)\big)' = 2f(x) + (2x-1)f'(x)$$

Calculando o declive da reta tangente temos:

$$m = g'(1) = 2f(1) + (2x-1)f'(1) = 2\times 1 + (2(1)-1)\times 1 = 2 + 1\times 1 = 3$$

Calculando as coordenadas do ponto de tangência, temos: $g(1) = (2(1)-1)\times f(1) = (2-1)\times 1 = 1$, ou seja, o ponto $P(1,1)$ é um ponto do gráfico de $g$ que também pertence à reta tangente.
Substituindo o valor do declive na equação da reta, vem $y = 3x + b$
Substituindo as coordenadas do ponto na equação da reta, calculamos o valor da ordenada na origem:

$$1 = 3\times 1 + b \quad\Leftrightarrow\quad 1-3 = b \quad\Leftrightarrow\quad -2 = b$$

Logo, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função $g$ no ponto de abcissa $x=1$ é:

$$y = 3x - 2$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2011, Prova especial

30. Começamos por determinar a expressão da derivada para $x \neq -1$:

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{1-e^{x+1}} + 1\right)' = \left(\frac{x+1}{1-e^{x+1}}\right)' + (1)' = \frac{(x+1)'(1-e^{x+1}) - (x+1)(1-e^{x+1})'}{(1-e^{x+1})^2} + 0 =$$

$$= \frac{1\times(1-e^{x+1}) - (x+1)\big((1)' - (x+1)'e^{x+1}\big)}{(1-e^{x+1})^2} = \frac{1-e^{x+1} - (x+1)\big(0 - 1\times e^{x+1}\big)}{(1-e^{x+1})^2} =$$

$$= \frac{1-e^{x+1} - (x+1)\big(-e^{x+1}\big)}{(1-e^{x+1})^2} = \frac{1-e^{x+1} - \big(-xe^{x+1} - e^{x+1}\big)}{(1-e^{x+1})^2} =$$

$$= \frac{1-e^{x+1} + xe^{x+1} + e^{x+1}}{(1-e^{x+1})^2} = \frac{1+xe^{x+1}}{(1-e^{x+1})^2}$$

Como a função $f'$ resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}$, é uma função contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, e, por isso, também é contínua em $[0,1]$.

Como $\frac{1}{4} = 0{,}25$, temos que $0{,}21 < \dfrac{1}{4} < 0{,}34$, ou seja, $f'(1) < \dfrac{1}{4} < f'(0)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in ]0,1[$ tal que $f'(c) = \dfrac{1}{4}$, ou seja, que a equação $f'(x) = \dfrac{1}{4}$ tem, pelo menos, uma solução em $]0,1[$.

C.A.

$$f'(0) = \frac{1+0\times e^{0+1}}{(1-e^{0+1})^2} = \frac{1+0}{(1-e^1)^2} = \frac{1}{(1-e)^2} \approx 0{,}34$$

$$f'(1) = \frac{1+1\times e^{1+1}}{(1-e^{1+1})^2} = \frac{1+e^2}{(1-e^2)^2} = \frac{1}{(1-e)^2} \approx 0{,}21$$

Exame – 2011, Ép. especial

31. Começamos por determinar a expressão da derivada, em $]2,+\infty[$:

$$\left(\frac{x+1}{\ln(x+1)}\right)' = \frac{(x+1)'\ln(x+1)-(x+1)\big(\ln(x+1)\big)'}{\big(\ln(x+1)\big)^2} = \frac{(1+0)\ln(x+1)-(x+1)\times\dfrac{(x+1)'}{(x+1)}}{\big(\big(\ln(x+1)\big)^2\big)} =$$

$$= \frac{\ln(x+1)-(x+1)'}{\big(\ln(x+1)\big)^2} = \frac{\ln(x+1)-1}{\big(\ln(x+1)\big)^2}$$

Determinando os zeros da derivada, em $]2,+\infty[$, temos:

$$\frac{\ln(x+1)-1}{\big(\ln(x+1)\big)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln(x+1)-1=0 \;\wedge\; \underbrace{\big(\ln(x+1)\big)^2 \neq 0}_{PV, x>2 \Rightarrow \ln(x+1)>\ln 3} \;\Leftrightarrow\; \ln(x+1)=1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)=e^1 \;\Leftrightarrow\; x=e-1$$

Logo, como $e-1<2$, a função derivada não tem zeros em $]2,+\infty[$.
Como, para $x>2$,

- $\ln(x+1)-1>\ln(3)-1$, temos que $\ln(x+1)-1>0\,,\forall x\in]2,+\infty[$
- $\ln(x+1)\neq 0$, temos que $\big(\ln(x+1)\big)^2>0\,,\forall x\in]2,+\infty[$

temos que $f'$ é sempre positiva no intervalo $]2,+\infty[$, o que significa que a função $f$ é sempre crescente neste intervalo.

Exame – 2011, 2ª Fase

32. Pela observação do gráfico podemos afirmar que:

- Em $x=-3$ a função é crescente, ou seja, $f'(-3)>0$
- Em $x=0$ a função é decrescente, ou seja, $f'(0)<0$
- Em $x=6$ a função é crescente, ou seja, $f'(6)>0$

Assim, temos que:

- $f'(0)\times f'(6)<0$
- $f'(-3)\times f'(6)>0$
- $f'(-3)\times f'(0)<0$
- $f'(0)\times f'(6)<0$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2011, 1ª fase

33. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$T'(t) = \left(15 + 0{,}1t^2e^{-0{,}15t}\right)' = (15)' + \left(0{,}1t^2e^{-0{,}15t}\right)' = 0 + 0{,}1\Big((t^2)'e^{-0{,}15t} + t^2(e^{-0{,}15t})'\Big) =$$

$$= 0{,}1\Big(2t \times e^{-0{,}15t} + t^2(-0{,}15)e^{-0{,}15t}\Big) = 0{,}1\Big(2te^{-0{,}15t} - 0{,}15t^2e^{-0{,}15t}\Big) =$$

$$= 0{,}2te^{-0{,}15t} - 0{,}015t^2e^{-0{,}15t} = te^{-0{,}15t}(0{,}2 - 0{,}015t)$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$T'(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; te^{-0{,}15t}(0{,}2 - 0{,}015t) = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 0 \,\vee\, \underbrace{e^{-0{,}15t} = 0}_{\text{Eq. Imp.}, e^{-0{,}15t} > 0} \vee\, 0{,}2 - 0{,}015t = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; t = 0 \,\vee\, 0{,}2 = 0{,}015t \;\Leftrightarrow\; t = 0 \,\vee\, \frac{0{,}2}{0{,}015} = t \;\Leftrightarrow\; t = 0 \,\vee\, t = \frac{40}{3}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

| $t$ | 0 | | $\frac{40}{3}$ | | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| $T'(t)$ | 0 | + | 0 | − | − |
| $T(t)$ | min | $\nearrow$ | Máx | $\searrow$ | |

Assim, como $C$ é crescente no intervalo $\left[0,\frac{40}{3}\right]$ e decrescente no intervalo $\left[\frac{40}{3},20\right]$ podemos concluir que $\frac{40}{3}$ é único o maximizante da função.

Como $\frac{40}{3} \approx 13{,}333$ corresponde a 13 horas e $0{,}333 \times 60$ minutos (ou seja 20 minutos), temos que às 13 horas e 20 minutos do dia 1 de Abril de 2010, se registou, no museu, a temperatura ambiente máxima.

Exame – 2011, 1ª fase

34. Averiguando a existência de assíntotas horizontais, temos:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{x-1} = \frac{3}{-\infty-1} = \frac{3}{-\infty} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2+\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} + \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim notável}} = \frac{2}{+\infty} + 0 = 0 + 0 = 0$

Pelo que podemos afirmar que a reta de equação $y = 0$ é a assíntota horizontal do gráfico de $f$.

Determinando a expressão da derivada, para $x > 1$, temos:

$$\left(\frac{2+\ln x}{x}\right)' = \frac{(2+\ln x)'(x) - (2+\ln x)(x)'}{x^2} = \frac{(0+\frac{1}{x})(x) - (2+\ln x)(1)}{x^2} = \frac{1-2-\ln x}{x^2} = \frac{-1-\ln x}{x^2}$$

Como $e > 1$, o declive da reta tangente no ponto de abcissa $e$, é dado por:

$$m = f'(e) = \frac{-1-\ln e}{e^2} = \frac{-1-1}{e^2} = \frac{-2}{e^2}$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico de abcissa $e$, temos:

$$f(e) = \frac{2+\ln e}{e} = \frac{2+1}{e} = \frac{3}{e}$$

Como o ponto de abcissa $e$, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de $b$:

$$\frac{3}{e} = \frac{-2}{e^2} \times e + b \Leftrightarrow \frac{3}{e} = -\frac{2}{e} + b \Leftrightarrow \frac{3}{e} + \frac{2}{e} = b \Leftrightarrow \frac{5}{e} = b$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $e$, é:

$$y = -\frac{2}{e^2} \times x + \frac{5}{e}$$

E a abcissa do ponto de intersecção com a reta de equação $y = 0$ (a assíntota horizontal), pode ser calculada como:

$$y = -\frac{2}{e^2} \times x + \frac{5}{e} \wedge y = 0 \Leftrightarrow 0 = -\frac{2}{e^2} \times x + \frac{5}{e} \Leftrightarrow \frac{2}{e^2} \times x = \frac{5}{e} \Leftrightarrow x = \frac{5e^2}{2e} \Leftrightarrow x = \frac{5e}{2}$$

Ou seja, as coordenadas do ponto de interseção da assíntota horizontal com a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $e$, são

$$P\left(\frac{5e}{2}, 0\right)$$

Exame – 2011, 1.ª fase

35. Através da análise do gráfico, podemos descrever a variação do sinal da derivada para relacionar com a monotonia da função $f$:

| $x$ | | $a$ | | $b$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | Máx | ↘ | min | ↗ |

Logo, o único gráfico apresentado compatível com a monotonia estudada é o gráfico da opção (A).

Resposta: **Opção A**

Exame – 2010, Ép. especial

36. Começamos por determinar a expressão da derivada para $x > 2$:

$$\left(\frac{1}{5}x - \ln x\right)' = \left(\frac{1}{5}x\right)' - (\ln x)' = \frac{1}{5} - \frac{1}{x}$$

Calculando os zeros da derivada, em $]2, +\infty[$, temos:

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{x} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{5} = \frac{1}{x} \;\Leftrightarrow\; x = 5 \wedge \underbrace{x \neq 0}_{\text{PV, } x>2}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

| $x$ | 2 | | 5 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | n.d. | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | n.d. | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

Assim, como $f$ é decrescente no intervalo ]0,5] e crescente no intervalo $[5, +\infty[$ podemos concluir que 5 é único o minimizante da função no intervalo $]2, +\infty[$, pelo que $f(5)$ é um mínimo da função neste intervalo.

Exame – 2010, 2ª Fase

37. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(-x + e^{2x^3-1}\right)' = -(x)' + \left(e^{2x^3-1}\right)' = -1 + (2x^3-1)'e^{2x^3-1} = -1 + 6x^2e^{2x^3-1}$$

Como o declive ($m$) da reta tangente ao gráfico de $f$ em $x = 0$ é $f'(0)$, temos que:

$$m = f'(0) = -1 + 6(0)^2e^{2(0)^3-1} = -1 + 0 = -1$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico da função que tem abcissa zero, temos:

$$f(0) = -0 + e^{2(0)^3-1} = 0 + e^{0-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Como o ponto de abcissa 0, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de $b$:

$$\frac{1}{e} = -1 \times 0 + b \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{e} = 0 + b \;\Leftrightarrow\; b = \frac{1}{e}$$

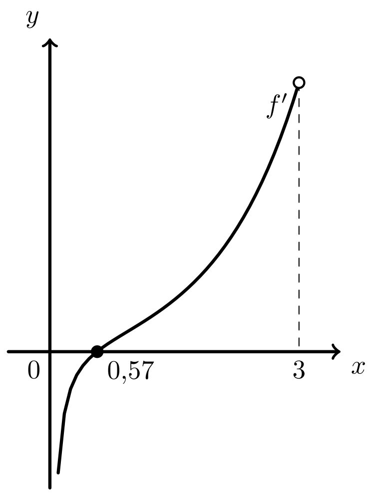
Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa 0, é:

$$y = -x + \frac{1}{e}$$

Exame – 2010, 2ª Fase

38. Para estudar a monotonia da função $f$, devemos analisar o sinal da função $f'$, pelo que podemos traçar o gráfico de $f'$ na calculadora gráfica, numa janela compatível com o domínio da função, para obter o gráfico reproduzido na figura seguinte.

Depois, recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados para um zero de uma função, num intervalo, podemos encontrar a solução da equação $f'(x) = 0$, com aproximação às centésimas: $x \approx 0{,}57$.




Pela análise do gráfico podemos ainda determinar a variação do sinal da função $f'$, para depois relacionar com a monotonia da função $f$:

| $x$ | 0 | | 0,57 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | n.d. | $-$ | 0 | $+$ | n.d. |
| $f(x)$ | n.d. | ↘ | min | ↗ | n.d. |

Assim temos que a função $f$:

- é decrescente no intervalo $]0;0{,}57[$
- é crescente no intervalo $]0{,}57;3[$
- tem um mínimo absoluto para $x \approx 0{,}57$

Exame – 2010, 1ª Fase

39. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(3+4x^2e^{-x}\right)' = (3)'+\left(4x^2\right)'e^{-x}+4x^2\left(e^{-x}\right)' = 0+8xe^{-x}+4x^2(-x)'e^{-x} = 8xe^{-x}+4x^2(-1)e^{-x} =$$

$$= 8xe^{-x} - 4x^2e^{-x} = e^{-x}(8x-4x^2)$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-x}(8x-4x^2) = 0 \;\Leftrightarrow\; \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{Eq Imp, } e^{-x}>0} \vee\ 8x-4x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x(8-4x) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x = 0 \vee 8-4x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \vee 8 = 4x \;\Leftrightarrow\; x = 0 \vee x = 2$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

| $x$ | $-\infty$ | 0 | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | min | ↗ | Máx | ↘ |

Assim, como $f$ é decrescente no intervalo $]-\infty{,}0]$ e em $[2,+\infty[$; e crescente no intervalo $[0{,}2]$ podemos concluir que 0 é único o minimizante da função, pelo que $f(0)$ é o único mínimo da função.
Calculando o valor do mínimo, temos:

$$f(0) = 3+4(0)^2e^{-(0)} = 3+0 = 3$$

Teste Intermédio 12º ano – 19.05.2010

40. Como a derivada de $g$ é:

$$g'(x) = \left(f(x)+x\right)' = \left(f(x)\right)' + (x)' = f'(x)+1$$

Assim, o gráfico de $g'$ é a translação do gráfico de $f'$ pelo vetor $\vec{u} = (1{,}0)$, ou seja com um deslocamento vertical de uma unidade no sentido positivo.
Desta forma o gráfico da opção (D) é o único compatível com esta informação.

Resposta: **Opção D**

Exame – 2009, 2ª fase

41. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$A'(t) = \left(2-t+5\ln(t+1)\right)' = (2)'-(t)'+\left(5\ln(t+1)\right)' = 0-1+5\left(\frac{(t+1)'}{t+1}\right) = -1+5\left(\frac{1}{t+1}\right) = -1+\frac{5}{t+1}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$A'(t) = 0 \Leftrightarrow -1+\frac{5}{t+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{t+1} = 1 \Leftrightarrow 5 = t+1 \wedge t+1 \neq 0 \Leftrightarrow 4 = t \wedge \underbrace{t \neq -1}_{\text{PV, } t\in[0,16[}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

| $t$ | 0 | | 4 | | 16 |
|---|---|---|---|---|---|
| $A'(t)$ | + | + | 0 | − | n.d. |
| $A(t)$ | min | ↗ | Máx | ↘ | n.d. |

Assim, como $A$ é crescente no intervalo $[0,4]$ e decrescente no intervalo $[4,16[$ podemos concluir que 4 é único o maximizante da função, pelo que $A(4)$ é o único mínimo da função.
Calculando o valor do máximo da função e arredondando o resultado às centésimas, temos:

$$A(4) = 2-4+5\ln(4+1) = -2+5\ln 5 \approx 6{,}05$$

Logo, a área máxima afetada pela doença foi aproximadamente de 6,05 *ha*.

Exame – 2009, 2ª Fase

42. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$C'(t) = \left(2te^{-0{,}3t}\right)' = (2t)'(e^{-0{,}3t}) + 2t\left(e^{-0{,}3t}\right)' = 2\times e^{-0{,}3t} + 2t(-0{,}3t)'e^{-0{,}3t} =$$

$$= 2e^{-0{,}3t} + 2t(-0{,}3)e^{-0{,}3t} = 2e^{-0{,}3t} - 0{,}6te^{-0{,}3t} = e^{-0{,}3t}(2-0{,}6t)$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$C'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0{,}3t}(2-0{,}6t) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-0{,}3t} = 0}_{\text{Eq Imp, } e^{-0{,}3t}>0} \vee 2-0{,}6t = 0 \Leftrightarrow 2 = 0{,}6t \Leftrightarrow \frac{2}{0{,}6} = t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\frac{6}{10}} = t \Leftrightarrow \frac{20}{6} = t \Leftrightarrow \frac{10}{3} = t$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

| $t$ | 0 | | $\frac{10}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $C'(t)$ | + | + | 0 | − | |
| $C(t)$ | min | ↗ | Máx | ↘ | |

Assim, como $C$ é crescente no intervalo $\left[0,\frac{10}{3}\right]$ e decrescente no intervalo $\left[\frac{10}{3},+\infty\right[$ podemos concluir que $\frac{10}{3}$ é único o maximizante da função.

Como $\frac{10}{3} = 3+\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}\times 60 = 20$ ($\frac{1}{3}$ de hora são 20 minutos) temos que a concentração máxima do medicamento no sangue ocorreu 3 hora e 20 minutos após a toma, ou seja, às 12 horas e 20 minutos.

Exame – 2009, 1ª Fase

43. Como gráfico de $g$ é uma reta de declive negativo, temos que, sendo $y = ax + k$ a equação dessa reta, $g'(x) = a$, e $a < 0$.

Assim, a expressão da derivada de $h$, é:

$$h'(x) = \big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x) = (x^2 + 1)' + k = 2x + a$$

Ou seja, o gráfico de $h'$ é uma reta de declive 2 e ordenada na origem igual a $g'(x)$.

- Como $m = 2$, temos que $m > 0$,
- e como $b = a$ e $a < 0$, então $b < 0$.

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12º ano – 27.05.2009

44. Como o ponto $A$ (o ponto de tangência) pertence ao eixo ordenadas tem abcissa zero, logo as suas coordenadas são $A(0,1)$.
Como o declive da reta tangente $(m)$ é dado pela função derivada para a abcissa do ponto de tangência, temos que:

$$m = f'(0) = (2(0) + 4)e^0 = (0 + 4) \times 1 = 4$$

Substituindo o valor do declive e as coordenadas do ponto de tangência em $y = mx + b$, calculamos o valor da ordenada na origem:

$$1 = 4 \times 0 + b \quad \Leftrightarrow \quad 1 = b$$

Logo a equação da reta tangente ao gráfico de $f$, no ponto $A$ é:

$$y = 4x + 1$$

Teste Intermédio 12º ano – 27.05.2009

45. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)'x - e^x(x)'}{x^2} = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Como o declive $(m)$ da reta tangente ao gráfico de $f$ em $x = 2$ é $f'(2)$, temos que:

$$m = f'(2) = \frac{2e^2 - e^2}{2^2} = \frac{e^2}{4}$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico da função que tem abcissa zero, temos:

$$f(2) = \frac{e^2}{2}$$

Como o ponto de abcissa 2, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de $b$:

$$\frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{4} \times 2 + b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{2} + b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} = b \quad \Leftrightarrow \quad 0 = b$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa 0, é:

$$y = \frac{e^2}{4} \times x$$

Exame – 2008, Ép. especial

46. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(\ln(x^2+1)\right)' = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{2x+0}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \wedge \underbrace{x^2+1 \neq 0}_{\text{PV, } x^2+1 \geq 1} \Leftrightarrow x = 0$$

Analisando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de $f$, temos:

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

Assim, podemos concluir que a função $f$:

- é decrescente no intervalo $]-\infty,0]$;
- é crescente no intervalo $[0,+\infty[$;
- tem um único extremo - um mínimo (cujo minimizante é 0).

Calculando o valor do mínimo, vem:

$$f(0) = \ln(0^2+1) = \ln(0+1) = \ln 1 = 0$$

Exame – 2008, Ép. especial

47. Pela observação do gráfico sabemos que $f'$ é constante, e positiva, para $x < 0$, porque a função varia num ritmo constante e é crescente, pelo que apenas as os gráficos das opções (A), (B) e (C) são coerentes com esta informação.

Como a semitangente ao gráfico de $f$ à esquerda de 0 tem declive positivo, e a semitangente ao gráfico de $f$ à direta de 0 tem declive negativo, ou seja,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

Podemos concluir que não existe $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, pelo que $f'$ não está definida em $x = 0$; e os únicos gráficos que são compatíveis com esta informação são os das opções (C) e (D).

Resposta: **Opção C**

Exame – 2008, 1ª fase

48. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$h'(x) = \left(4 - x + \ln(x+1)\right)' = (4') - (x)' + \left(\ln(x+1)\right)' = 0 - 1 + \frac{(x+1)'}{x+1} = -1 + \frac{1}{x+1}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = 1 \Leftrightarrow 1 = x+1 \wedge \underbrace{x+1 \neq 0}_{\text{PV, } x>-1} \Leftrightarrow 0 = x$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de $h$, temos:

| $x$ | $-1$ | | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | n.d. | $+$ | $0$ | $-$ |
| $h(x)$ | n.d. | $\nearrow$ | Máx | $\searrow$ |

Assim, podemos concluir que a função $h$:

- é crescente no intervalo $]-1,0]$;
- é decrescente no intervalo $[0,+\infty[$;
- tem um único extremo - um máximo (cujo maximizante é 0).

Calculando o valor do máximo, temos:

$$h(0) = 4 - 0 + \ln(0+1) = 4 + \ln 1 = 4 + 0 = 4$$

Exame – 2008, 1ª fase

49.

49.1. Como o ponto $A$ é o ponto de ordenada máxima, a abcissa deste ponto é o zero da derivada. Assim, determinando a expressão da derivada em $[0,3]$, vem:

$$\left(2 - x + \ln(1+3x)\right)' = (2)' - (x)' + \left(\ln(1+3x)\right)' = 0 - 1 + \frac{(1+3x)'}{1+3x} = -1 + \frac{3}{1+3x}$$

Calculando os zeros da derivada em $[0,3]$, temos:

$$-1 + \frac{3}{1+3x} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{1+3x} = 1 \Leftrightarrow 3 = 1+3x \wedge \underbrace{1+3x \neq 0}_{\text{PV, } x\geq 0} \Leftrightarrow 3-1 = 3x \Leftrightarrow \frac{2}{3} = x$$

Como a ordenada do ponto $A$ é o único máximo de $f$ em $[0,3]$, e a derivada da função $f$ só tem um zero neste intervalo, podemos garantir que a abcissa do ponto $A$ é o zero da derivada, ou seja,

$x_A = \dfrac{2}{3}$

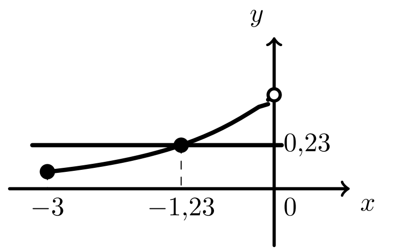
49.2. Como o declive da reta tangente num ponto, é dado pela derivada da função nesse ponto, e o declive da reta $r$ é 0,23, sabemos que a abcissa do ponto $B$ é a solução da equação $f'(x) = 0{,}23$

Como a abcissa do ponto $B$ é negativa, vamos determinar a expressão de $f'$, para $x \in [-3{,}0[$:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1 + x}{x}\right)' = \frac{(e^x - 1 + x)'.x - (e^x - 1 + x).(x)'}{x^2} = \frac{(e^x - 0 + 1)\,.x - (e^x - 1 + x).1}{x^2} =$$
$$= \frac{(e^x + 1)\,.x - (e^x - 1 + x)}{x^2} = \frac{x.e^x + x - e^x + 1 - x}{x^2} = \frac{x.e^x - e^x + 1}{x^2}$$

Assim a abcissa do ponto $B$ é a solução da equação $\dfrac{x.e^x - e^x + 1}{x^2} = 0{,}23$

Traçando na calculadora o gráfico de $f'(x) = \dfrac{x.e^x - e^x + 1}{x^2}$ e da reta $y = 0{,}23$, numa janela compatível com o domínio $[-3{,}0[$, obtemos o gráfico que se reproduz na figura ao lado.




Depois, recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas de pontos de interseção de dois gráficos, obtemos a abcissa do ponto de interseção dos gráficos representados, com aproximação às centésimas, que coincide com a abcissa do ponto $B$:

$$x_B \approx -1.23$$

Teste Intermédio 12º ano – 29.04.2008

50. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(1 - \ln(x^2)\right)' = (1)' - \left(\ln(x^2)\right)' = 0 - \frac{(x^2)'}{x^2} = -\frac{2x}{x^2} = -\frac{2}{x}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{2}{x} = 0 \;\Leftrightarrow\; \underbrace{\frac{2}{x} = 0}_{\text{Eq. Impossível}}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de $h$, temos:

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | n.d. | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | n.d. | ↘ |

Assim podemos concluir que a função $f$:

- é crescente no intervalo $]-\infty{,}0]$;
- é decrescente no intervalo $[0,+\infty[$;
- não tem qualquer extremo.

Exame – 2007, 2ª Fase

51. Para estudar a monotonia da função começamos por determinar a expressão da função derivada:

$$I'(x) = \left(10e^{-0,05x}\right)' = 10\left(e^{-0,05x}\right)' = 10(-0,05x)'e^{-0,05x} = 10 \times (-0,05)e^{-0,05x} = -0,5e^{-0,05x}$$

Como $e^{-0,05} > 0$, para qualquer valor de $x$, então $-0,05 \times e^{-0,05} < 0$, ou seja $I'(x) < 0$, pelo que podemos concluir que a função é estritamente decrescente no seu domínio.

Relativamente à existência de assíntotas do gráfico de $I$, como a função está definida para $x \geq 0$ e é contínua (porque resulta de operações entre funções continuas no domínio da função), só podem existir assíntotas quando $x \to +\infty$
Averiguando a existência de uma assíntota horizontal temos que:

$$\lim_{x\to+\infty} I(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(10e^{-0,05x}\right) = 10e^{-0,05\times(+\infty)} = 10e^{-\infty} = 10 \times 0^+ = 0$$

E assim podemos concluir que a reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de $I$ e não existem outras assíntotas.

Assim, a função ser estritamente decrescente, no contexto da situação descrita, significa que a um aumento do número de metros abaixo da superfície corresponde sempre uma diminuição da intensidade da luz solar, ou seja, a intensidade da luz diminuí com um aumento da profundidade.
A reta de equação $y = 0$ ser assíntota do gráfico de $I$, significa no contexto da situação descrita, que a intensidade da luz solar tende para zero com um aumento arbitrariamente grande da profundidade.

Exame – 2007, 1ª Fase

52.

52.1. Começamos por determinar a expressão da derivada, para $x \in ]0,1[$:

$$\left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{(x)'\ln x - x(\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{1 \times \ln x - x\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

Calculando os zeros da derivada, no intervalo $]0,1[$, temos:

$$\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln x - 1 = 0 \wedge \ln^2 x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \ln x = 1 \wedge \ln x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x = e \wedge x \neq 1$$

Como $x \in ]0,1[$ e $e > 1$, concluímos que $f'(x)$ não tem qualquer zero neste intervalo.
Assim, como no intervalo $]0,1[$, $\ln(x) < 0$ temos que $\ln x - 1 < 0$, e como $\ln^2(x) > 0$ (no mesmo intervalo), temos que:

$$f'(x) < 0, \ \forall x \in ]0,1[$$

pelo que a função $f$ é estritamente decrescente neste intervalo.

52.2. Determinado a expressão da derivada, para $x > 1$, temos:

$$\left(xe^{2-x}\right)' = (x)'e^{2-x}+x\left(e^{2-x}\right)' = e^{2-x}+x(2-x)'e^{2-x} = e^{2-x}+x(-1)e^{2-x} = e^{2-x}-xe^{2-x} = e^{2-x}(1-x)$$

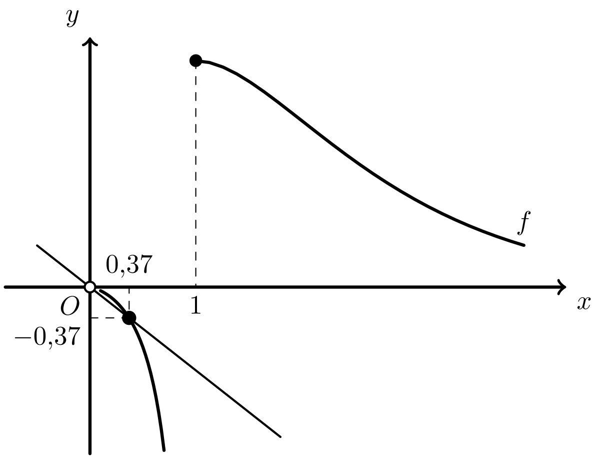
O declive da reta $r$ pode ser calculado como:

$$m_r = f'(2) = e^{2-2}(1-2) = e^0(-1) = -1$$

Como a reta $s$ é paralela à reta $r$, e tem a ordenada na origem igual a zero, a equação da reta $s$ é: $y = -x$

Traçando a reta $s$ e o gráfico da função $f$ numa janela compatível com o domínio da função e que permita visualizar o ponto de interseção obtemos o gráfico reproduzido na figura ao lado.

Depois, recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados para as coordenadas de um ponto de interseção dos gráficos de duas funções, encontramos as coordenadas do ponto, arredondadas às centésimas $(0{,}37, -0{,}37)$




Exame – 2006, Ép. especial

53. Como o ponto $Q$ pertence ao gráfico de $f$ e tem abcissa 2, podemos calcular a respetiva ordenada:

$$f(2) = 2 + 2\ln(2-1) = 2 + 2\ln 1 = 2 + 2 \times 0 = 2$$

A reta $r$ é tangente ao gráfico de $f$ no ponto $Q(2{,}2)$, contém este ponto e tem declive $m = f'(2)$. Assim determinando a expressão da derivada, temos:

$$f'(x) = \left(x + x\ln(x-1)\right)' = (x)' + (x)'\ln(x-1) + x\left(\ln(x-1)\right)' =$$

$$= 1 + 1 \times \ln(x-1) + x \times \frac{(x-1)'}{x-1} = 1 + \ln(x-1) + x \times \frac{1}{x-1} = 1 + \ln(x-1) + \frac{x}{x-1}$$

Assim, calculando o valor do declive, vem:

$$m = f'(2) = 1 + \ln(2-1) + \frac{2}{2-1} = 1 + \ln 1 + \frac{2}{1} = 1 + 0 + 2 = 3$$

Substituindo as coordenadas do ponto de tangência e o declive em $y = mx + b$, podemos calcular o valor de $b$:

$$2 = 3(2) + b \;\Leftrightarrow\; 2 = 6 + b \;\Leftrightarrow\; 2 - 4 = b \;\Leftrightarrow\; -4 = b$$

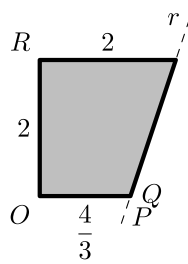
Pelo que a equação da reta $r$ é: $y = 3x - 4$

Assim, a abcissa do ponto $P$ pode ser calculada através da equação da reta $r$:

$$y = 3x - 4 \wedge y = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = 3x - 4 \;\Leftrightarrow\; 4 = 3x \;\Leftrightarrow\; \frac{4}{3} = x$$

Logo a área do trapezio é:

$$A_{[OPQR]} = \frac{\overline{RQ} + \overline{OP}}{2} \times \overline{OR} = \frac{x_Q + x_P}{2} \times y_R = \frac{2 + \frac{4}{3}}{2} \times 2 = 2 + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$




Exame – 2006, 2ª fase

54. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$A'(x) = \left(xe^{-x}\right)' = (x)'e^{-x} + x\left(e^{-x}\right)' = 1 \times e^{-x} + x(-x)'e^{-x} = e^{-x} + x(-1)e^{-x} = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$A'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x}(1-x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{Eq Imp, } e^{-x} > 0} \quad \vee\, 1 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = x$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de $h$, temos:

| $x$ | 0 | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $A'(x)$ | n.d. | $+$ | 0 | $-$ |
| $A(x)$ | n.d. | $\nearrow$ | Máx. | $\searrow$ |

Assim, podemos concluir que a função $A$:

- é crescente no intervalo $]0,1]$;
- é decrescente no intervalo $[1, +\infty[$;

Como a função $A$ é crescente no intervalo $]0,1]$ e decrescente no intervalo $[1, +\infty[$, podemos concluir que a função só tem um extremo, e 1 é o maximizante.
Calculando o valor máximo que a área do triângulo pode assumir, temos:

$$A(1) = 1 \times e^{-1} = 1 \times \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

Exame – 2006, 1.ª fase

55. Começamos por determinar a ordenada do ponto em que a função interseta o eixo $Oy$:

$$f(0) = e^{a \times 0} + 1 = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2$$

Como a reta $r$ contém os pontos $A(-6,0)$ e $B(0,2)$, podemos calcular o seu declive:

$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-0}{0-(-6)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ou seja, o declive da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa 0 é $\frac{1}{3}$, pelo que $f'(0) = \frac{1}{3}$
Determinando a expressão da derivada temos:

$$f'(x) = \left(e^{ax} + 1\right)' = (ax)'e^{ax} + (1)' = ae^{ax} + 0 = ae^{ax}$$

Logo $f'(0) = ae^{a \times 0} = a \times e^0 = a \times 1 = a$

Igualando o valor da derivada ao declive da reta tangente, vem: $a = \frac{1}{3}$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)

56. Relacionando a monotonia de $f$ com o sinal de $f'$, temos:

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\nearrow$ | Máx. | $\searrow$ |
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ |

Determinando a expressão da derivada de $g$:

$$g'(x) = \left( (f(x))^2 \right)' = \left(f(x) \times f(x)\right)' = f'(x) \times f(x) + f(x) \times f'(x) = 2f(x)f'(x)$$

Logo, como o máximo de $f$ é -1, sabemos que $f(x) < 0 \, , \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que podemos estudar a variação do sinal de $g'$, para relacionar com a monotonia de $g$:

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| 2 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $g'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $g(x)$ | $\searrow$ | min. | $\nearrow$ |

Assim, como $g$ é decrescente em $]-\infty{,}0]$ e é crescente em $[0{,}+\infty[$, podemos afirmar que 0 é um minimizante de $g$.
Assim, calculando o valor do mínimo de $g$, temos:

$$g(0) = \left(f(0)\right)^2 = (-1)^2 = 1$$

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)

57. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$h'(x) = \left(2x + 10\ln(1-0{,}1x)\right)' = (2x)' + \left(10\ln(1-0{,}1x)\right)' = 2 + 10 \times \frac{(1-0{,}1x)'}{1-0{,}1x} = 2 + \frac{10 \times (0-0{,}1)}{1-0{,}1x} =$$

$$= 2 + \frac{-1}{1-0{,}1x} = \frac{2(1-0{,}1x)}{1-0{,}1x} + \frac{-1}{1-0{,}1x} = \frac{2-0{,}2x-1}{1-0{,}1x} = \frac{1-0{,}2x}{1-0{,}1x}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$h'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1-0{,}2x}{1-0{,}1x} = 0 \;\Leftrightarrow 1-0{,}2x = 0 \,\wedge\, 1-0{,}1x \neq 0 \;\Leftrightarrow 1 = 0{,}2x \,\wedge\, 1 \neq 0{,}1x \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{1}{0{,}2} = x \,\wedge \frac{1}{0{,}1} \neq x \;\Leftrightarrow\; x = 5 \,\wedge x \neq 10 \;\Leftrightarrow\; x = 5$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de $h$, temos:

| $x$ | 0 | | 5 | | $a$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | + | + | 0 | − | − |
| $h(x)$ | min | ↗ | Máx. | ↘ | min |

Assim, podemos concluir que a função $h$:

- é crescente no intervalo $[0{,}5]$;
- é decrescente no intervalo $[5{,}a]$;

Como a função $h$ é crescente no intervalo $[0{,}5]$ e decrescente no intervalo $[5{,}a]$, podemos concluir que a função só tem um máximo e 5 é o maximizante.
Calculando o valor máximo da função, e arredondando o resultado às décimas, temos:

$$h(5) = 2(5) + 10\ln\left(1-0{,}1(5)\right) = 10 + 10\ln(1-0{,}5) = 10 + 10\ln(0{,}5) \approx 3{,}07$$

A maior altura que a bola atingiu, relativamente ao solo, depois de pontapeada foi de 3,07 metros.

Exame – 2005, 2ª Fase (cód. 435)

58. A reta $r$ é tangente ao gráfico de $f$ no ponto $Q(1{,}3)$, contém este ponto e tem declive

$$m = f'(1) = 2 + (1)\ln(1) = 2 + 1 \times 0 = 2$$

Substituindo as coordenadas do ponto de tangência e o declive em $y = mx + b$, podemos calcular o valor de $b$:

$$3 = 2(1) + b \;\Leftrightarrow\; 3 = 2 + b \;\Leftrightarrow\; 3 - 2 = b \;\Leftrightarrow\; 1 =$$

Pelo que a equação da reta $r$ é: $y = 2x + 1$

Substituindo $y = 0$ na equação da reta $r$, calculamos a abcissa do ponto em que a reta interseta o eixo $Ox$, ou seja, a abcissa do ponto $P$:

$$0 = 2x + 1 \;\Leftrightarrow\; -1 = 2x \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{2} = x$$

Exame – 2005, 1ª Fase (cód. 435)

59. Pela observação do gráfico podemos afirmar que:

- Como a função $h$ é contínua em $\mathbb{R}$, $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} h(x)$, pelo que como $f(0) \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to 0} h(x) \neq +\infty$; logo a afirmação da opção (A) não é verdadeira.
- $\exists x \in \mathbb{R} :\ f(x) \neq -f(-x)$, ou seja a função $h$ **não** é ímpar; pelo que a afirmação da opção (B) não é verdadeira.
- Como a $h$ é decescente em $[0,3]$, $\forall x \in ]0,3[, h'(x) < 0$, ou seja, a afirmação da opção (D) não é verdadeira.

Nem o gráfico, nem a informação complementar do enunciado permitem decidir sobre o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$, pelo que a afirmação da opção (C) **pode** ser verdadeira.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2004, Ép. especial (cód. 435)

60. Começamos por determinar a expressão da derivada, para $x > 0$:

$$\left(\frac{3x+2}{2x+2}\right)' = \frac{(3x+2)'(2x+2)-(3x+2)(2x+2)'}{(2x+2)^2} = \frac{(3+0)(2x+2)-(3x+2)(2+0)}{(2x+2)^2} =$$

$$= \frac{6x+6-(6x+4)}{(2x+2)^2} = \frac{6x+6-6x-4}{(2x+2)^2} = \frac{2}{(2x+2)^2}$$

Assim, $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) > 0$ (visto ser o quociente de funções estritamente positivas).
Logo, $f$ é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$

Exame – 2004, Ép. especial (cód. 435)

61. Pela observação do gráfico de $f'$, podemos verificar que $f'(x) < 0, \forall x \in [0,3]$, pelo que podemos afirmar que, $f$ é decrescente em $[0,3]$.

Como $f(0) = 2$, e a função decresce em $[0,3]$, logo $f(3) < 2$.
Assim, temos que o valor da opção (A) é o único compatível com esta condição.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2004, 2ª Fase (cód. 435)

62. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{x}\right)' = \frac{(e^x-1)'x-(e^x-1)(x)'}{x^2} = \frac{(e^x-0)\times x-(e^x-1)\times 1}{x^2} = \frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$$

Como o declive $(m)$ da reta tangente ao gráfico de $f$ em $x=1$ é $f'(1)$, temos que:

$$m = f'(1) = \frac{1\times e^1-e^1+1}{1^2} = \frac{0+1}{1} = 1$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico da função que tem abcissa 1, temos:

$$f(1) = \frac{e^1-1}{1} = e-1$$

Como o ponto de abcissa 1, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx+b$, para calcular o valor de $b$:

$$e-1 = 1\times 1+b \ \Leftrightarrow\ e-1-1 = b \ \Leftrightarrow\ e-2 = b$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa 1, é:

$$y = 1\times x+e-2 \ \Leftrightarrow\ y = x+e-2$$

Exame – 2004, 2ª Fase (cód. 435)

63. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(1+3x^2e^{-x}\right)' = 0 + (3x^2)'e^{-x} + 3x^2\left(e^{-x}\right)' = 6xe^{-x} + 3x^2((-x)'e^{-x}) =$$

$$= 6xe^{-x} + 3x^2(-e^{-x}) = 6xe^{-x} - 3x^2e^{-x} = e^{-x}(6x-3x^2)$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-x}(6x-3x^2) = 0 \;\Leftrightarrow\; \underbrace{e^{-x}=0}_{\text{Eq Imp, } e^{-x}>0} \vee\; 6x-3x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x(2-x) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 3x = 0 \vee 2-x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \vee 2 = x$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de $f$, temos:

| $x$ | $-\infty$ | 0 | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | Máx. | $\searrow$ |

Assim, podemos concluir que $x=0$ é o único minimizante de $f$, pelo que o mínimo da função é:

$$f(0) = 1+3(0)^2e^{-0} = 1+0\times 1 = 1$$

Exame – 2004, 1ª Fase (cód. 435)

64. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)'}{x+\frac{1}{x}} = \frac{(x)' + \left(\frac{1}{x}\right)'}{\frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}} = \frac{1+\frac{(1)'\times x - 1\times(x)'}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x}} =$$

$$= \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{0\times x - 1\times 1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x}} = \frac{\frac{x^2+0-1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x}} = \frac{(x^2-1)x}{(x^2+1)x^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)x} = \frac{x^2-1}{x^3+x}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2-1}{x^3+x} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2-1 = 0 \;\wedge\; \underbrace{x^3+x\neq 0}_{\text{PV, porque } x>0} \;\Leftrightarrow\; x^2 = 1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x = \pm\sqrt{1} \;\Leftrightarrow\; x = 1 \vee x = -1$$

Como $D_f = \mathbb{R}^+$, $x=1$ é o único zero da derivada, e assim, estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de $f$, temos:

| $x$ | 0 | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | n.d. | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | n.d. | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

Assim podemos concluir que a função $f$:

- é decrescente no intervalo $]0,1]$;
- é crescente no intervalo $[1,+\infty[$;
- tem um único extremo, mais concretamente um mínimo cujo minimizante é 1

Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)

65. Como $x_0$ é uma raiz dupla do polinómio que define a função $g$, então $g(x) = (x - x_0)^2(ax^2 + bx + c)$, determinando a expressão da derivada, vem:

$$g'(x) = \big((x - x_0)^2(ax^2 + bx + c)\big)' = \big((x^2 - 2x_0x + x_0^2)(ax^2 + bx + c)\big)' =$$
$$= (x^2 - 2x_0x + x_0^2)'(ax^2 + bx + c) + (x^2 - 2x_0x + x_0^2)(ax^2 + bx + c)' =$$
$$= (2x - 2x_0)(ax^2 + bx + c) + (x^2 - 2x_0x + x_0^2)(2ax + b)$$

Como o declive $(m)$ da reta tangente ao gráfico de $g$ em $x = x_0$ é $g'(x_0)$, temos que:

$$m = g'(x_0) = (2x_0 - 2x_0)(ax_0^2 + bx_0 + c) + (x_0^2 - 2x_0x + x_0^2)(2ax_0 + b) =$$
$$= 0(ax_0^2 + bx_0 + c) + (2x_0^2 - 2x_0x)(2ax_0 + b) = 0 + 0(2ax_0 + b) = 0$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico da função que tem abcissa $x_0$, temos:

$$g(x_0) = (x_0 - x_0)^2(ax_0^2 + bx_0 + c) = 0(ax_0^2 + bx_0 + c) = 0$$

Como o ponto de abcissa $x_0$, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de $b$: $0 = 0 \times 0 + b \Leftrightarrow b = 0$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $x_0$, é: $y = 0 \times x + 0 \Leftrightarrow y = 0$

Como $y = 0$ define o eixo $Ox$, temos o eixo $Ox$ é tangente ao gráfico de $g$ no ponto de abcissa $x_0$.

Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)

66. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$h'(x) = \big(15 - 4\ln(-x^2 + 10x + 11)\big)' = (15)' - 4\big(\ln(-x^2 + 10x + 11)\big)' = 0 - 4\left(\frac{(-x^2 + 10x + 11)'}{-x^2 + 10x + 11}\right) =$$
$$= -4\left(\frac{-2x + 10}{-x^2 + 10x + 11}\right) = \frac{8x - 40}{-x^2 + 10x + 11}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8x - 40}{-x^2 + 10x + 11} = 0 \Leftrightarrow 8x - 40 = 0 \wedge -x^2 + 10x + 11 \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{40}{8} \wedge \big(x \neq -1 \vee x \neq 11\big) \Leftrightarrow x = 5$$

C.A.:

$$-x^2 + 10x + 11 = 0$$
$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(-1)(11)}}{2(-1)}$$
$$x = -1 \vee x = 11$$

Assim, estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de $h$, para $x \in [0,10]$, temos:

| $x$ | 0 | | 5 | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $8x - 40$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ |
| $-x^2 + 10x + 11$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $h'(x)$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ |
| $h(x)$ | Máx | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | Máx |

Logo, como $h$ é decrescente no intervalo $[0,5]$ e crescente no intervalo $[5,10]$; podemos concluir 5 é o minimizante da função $h$.
Como o ponto da rampa em que a altura é mínima se situa a 5 metros da parede $A$, e as duas paredes distam 10 metros, o ponto de altura mínima também se situa a 5 metros da parede $B$ $(10 - 5 = 5)$, ou seja é equidistante das duas paredes.

Exame – 2003, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 435)

67. Como o nível de poluição do ar diminuiu enquanto o purificador esteve ligado e começou a aumentar quando o purificador foi desligado, sabemos que o purificador esteve ligado entre as zero horas e $t = t_0$, sendo $t_0$ o minimizante da função.

Assim, para determinar $t_0$, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$P'(t) = \left(1 - \frac{\ln(t+1)}{t+1}\right)' = (1)' - \left(\frac{\ln(t+1)}{t+1}\right)' = 0 - \frac{\big(\ln(t+1)\big)'(t+1) - \big(\ln(t+1)\big)(t+1)'}{(t+1)^2} =$$

$$= -\frac{\frac{(t+1)'}{t+1}(t+1) - \big(\ln(t+1)\big)(t'+1')}{(t+1)^2} = -\frac{(t+1)' - \big(\ln(t+1)\big)(1+0)}{(t+1)^2} =$$

$$= -\frac{1-\ln(t+1)}{(t+1)^2} = \frac{-1+\ln(t+1)}{(t+1)^2} = \frac{\ln(t+1)-1}{(t+1)^2}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$P'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(t+1)-1}{(t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \ln(t+1)-1 = 0 \wedge \underbrace{(t+1)^2 \neq 0}_{\text{PV, porque } t\in[0,12]} \Leftrightarrow \ln(t+1) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(t+1) = 1 \Leftrightarrow t+1 = e^1 \Leftrightarrow t = e-1$$

Assim, estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função $A$, para $t \in [0{,}24]$, temos:

| $t$ | 0 | | $e-1$ | | 24 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P'(t)$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ |
| $P(t)$ | Máx | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | Máx |

Logo, como $P$ é decrescente no intervalo $[0,e-1]$ e crescente no intervalo $[e-1,24]$; podemos concluir $e-1$ é o minimizante da função $P$.
Como $e-1 \approx 1{,}718$, e $0{,}718$ horas são $0{,}718 \approx 43{,}080$ minutos, podemos concluir que o purificador esteve ligado desde as zero horas até às $1{,}718$ horas, ou seja esteve ligado durante 1 hora e 43 minutos.

Exame – 2003, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

68. Como qualquer função quadrática, $f$, é definida pela expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, determinando a expressão da derivada, vem:

$$f'(x) = (ax^2+bx+c)' = (ax^2)' + (bx)' + (c)' = 2ax + b + 0 = 2ax + b$$

Assim, o declive $(m)$ da reta tangente ao gráfico de uma função quadrática num ponto $x = x_0$ é $f'(x_0)$, pelo que:

$$m = f'(x_0) = 2ax_0 + b$$

E para que a reta tangente seja paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, $m = 1$ (porque a bissetiz dos quadrantes ímpares é uma reta de declive 1, e os declives de retas paralelas são iguais), logo:

$$m = 1 \Leftrightarrow 2ax_0 + b = 1 \Leftrightarrow 2ax_0 = 1 - b \Leftrightarrow x_0 = \frac{1-b}{2a}$$

Ou seja, sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, a reta tangente ao gráfico da função só tem declive 1 no ponto de abcissa $x = \frac{1-b}{2a}$; ou seja, só existe um ponto do gráfico cuja reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exame – 2003, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

69. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$(f-g)'(x) = \left(\ln x - (x^2-3)\right)' = (\ln x)' - \left((x^2-3)\right)' = \frac{1}{x} - (2x-0) = \frac{1}{x} - \frac{2x^2}{x} = \frac{1-2x^2}{x}$$

Como $D_f = \mathbb{R}^+$ e $D_g = \mathbb{R}$, temos que $D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^+$, e assim, calculando os zeros da derivada, vem:

$$(f-g)'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x^2}{x} = 0 \Leftrightarrow 1-2x^2 = 0 \wedge \underbrace{x \neq 0}_{\text{PV, porque } x>0} \Leftrightarrow 1 = 2x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = x^2 \Leftrightarrow \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = x \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $D_{f-g} = \mathbb{R}^+$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ é o único zero da derivada, e assim, estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de $f-g$, temos:

| $x$ | $0$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $(f-g)'(x)$ | n.d. | $+$ | $0$ | $-$ |
| $(f-g)(x)$ | n.d. | $\nearrow$ | Máx | $\searrow$ |

Assim podemos concluir que a função $f-g$:

- é crescente no intervalo $\left]0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$.

Exame – 2002, Prova para militares (cód. 435)

70. Para determinar o minimizante, e o mínimo, da função, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$A'(x) = \left(\frac{2x^3+8}{x}\right)' = \frac{(2x^3+8)'x - (2x^3+8)(x)'}{x^2} = \frac{((2x^3)' + (8)')x - (2x^3+8)\times 1}{x^2} =$$

$$= \frac{(6x^2+0)x - (2x^3+8)}{x^2} = \frac{6x^3 - 2x^3 - 8}{x^2} = \frac{4x^3-8}{x^2}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^3-8}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8 = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow 4x^3 = 8 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 = \frac{8}{4} \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2} \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

Assim, estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função $A$, para $x > 0$, temos:

| $x$ | $0$ | | $\sqrt[3]{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $A'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $A(x)$ | | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

Logo, como a função $A$ é decrescente no intervalo $]0, \sqrt[3]{2}]$ e crescente no intervalo $[\sqrt[3]{2}, +\infty[$; podemos concluir $\sqrt[3]{2}$ é o minimizante da função $A$, ou seja o valor de $x$, para o qual a área total da embalagem é mínima.

Exame – 2002, 2ª fase (cód. 435)

71. Como o declive de uma reta tangente ao gráfico de uma função, é dado pelo valor da derivada para a abcissa do ponto de tangência, os declives das retas $r$ e $s$ são $f'(a)$ e $f'(b)$, respetivamente ($m_r = f'(a)$ e $m_s = f'(b)$).

Como a função $f$ é crescente, a função derivada, $f'$, é sempre não negativa ($f'(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

Como retas perpendiculares têm declives com sinais contrários, as retas $r$ e $s$ não podem ser perpendiculares porque têm ambas declives positivos $\left(\big(f'(a) \geq 0 \wedge f'(b) \geq 0\big) \Rightarrow f'(a) \neq -\dfrac{1}{f'(b)}\right)$.

Exame – 2002, 2ª fase (cód. 435)

72. Como o declive de uma reta tangente ao gráfico de $f$, é dado pelo valor da derivada para a abcissa 1, temos que $m_r = f'(1)$.

Assim, determinando a expressão da derivada, vem:

$$f'(x) = (1 + 2\ln x)' = (1)' + 2(\ln x)' = 0 + 2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x}$$

Pelo que: $m_r = f'(1) = \dfrac{2}{1} = 2$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2002, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

73. Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de $f$, vem:

| $x$ | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

Logo, como $f$ é decrescente no intervalo $]-\infty,2]$ e crescente no intervalo $[2,+\infty[$; podemos concluir que $f$ em um máximo para $x = 2$.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)

74. Como se pretende determinar a equação de uma reta tangente ao gráfico de $f$, que seja paralela à reta de equação $y = x - 2$, ou seja, uma reta com declive 1, pretende-se que o declive da reta tangente seja 1 (porque retas paralelas têm declives iguais).

Como o declive de uma reta tangente no ponto de abcissa $a$, é dado pelo valor da derivada para $a$, temos que $f'(a) = 1$.

Como a derivada de $f$ é

$$f'(x) = (e^x)' = e^x$$

Logo, calculando o valor da abcissa, $a$, do ponto onde a reta tangente tem declive, vem:

$$f'(a) = 1 \;\Leftrightarrow\; e^a = 1 \;\Leftrightarrow\; a = \ln 1 \;\Leftrightarrow\; a = 0$$

Pelo que a ordenada do ponto de tangência é $f(0) = e^0 = 1$

Assim, substituindo o valor do declive e as coordenadas do ponto de tangência em $y = mx + b$, podemos determinar o valor de $b$:

$$1 = 0 \times 1 + b \;\Leftrightarrow\; 1 = b$$

Pelo que uma equação da reta paralela à reta $r$ e tangente à curva $C$ é:

$$y = 1 \times x + 1 \;\Leftrightarrow\; y = x + 1$$

Exame – 2001, Ép. especial

75. Como $f'(3) = 4$, logo, pela definição de derivada num ponto, $f'(3) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 4$

Como $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3)$, temos que:

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{(x + 3)(x - 3)} = \lim_{x \to 3} \left( \frac{1}{x + 3} \times \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{1}{x + 3} \times \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{1}{6} \times 4 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, 2ª fase (cód. 435)

76. Para que a reta de equação $y = x$ seja tangente ao gráfico de uma certa função $f$, no ponto de abcissa 0, têm que se verificar as condições:

- $f(0) = 0$, ou seja, o ponto de coordenadas (0,0) é o ponto de tangência pelo que deve pertencer ao gráfico de $f$ (pelo que podemos excluir expressões das opções (C) e (D)).
- $f'(0) = 1$, ou seja o declive da reta tangente no ponto de abcissa 0, deve ser 1, porque é o declive da reta $y = x$ (pelo que podemos excluir a expressão da opção (B) porque $(x^2 + 2x)' = 2x + 2$ e substituindo $x$ por 0, obtemos o valor 2 para o declive).

A expressão da opção (A) é a única que verifica cumulativamente as duas condições anteriores (substituindo $x$ por 0, obtemos 0 para a ordenada do ponto de tangência e o valor da derivada $(x^2 + x)' = 2x + 1$ para $x = 0$ é 1).

Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

77. Começamos por determinar a expressão da derivada de $f$:

$$f'(x) = (3x - 2\ln x)' = (3x)' - 2(\ln x)' = 3 - 2\left(\frac{1}{x}\right) = 3 - \frac{2}{x} = \frac{3x}{x} - \frac{2}{x} = \frac{3x-2}{x}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{3x-2}{x} = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x - 2 = 0 \;\wedge\; \underbrace{x \neq 0}_{\text{PV, porque } x>0} \;\Leftrightarrow\; 3x = 2 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{2}{3}$$

Assim, estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função $f$, temos:

| $x$ | 0 | | $\frac{2}{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | n.d. | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | n.d. | ↘ | min | ↗ |

Logo, como $f$ é decrescente no intervalo $\left]0,\frac{2}{3}\right]$ e crescente no intervalo $\left[\frac{2}{3},+\infty\right[$; podemos concluir que a função tem um único mínimo, que é $f\left(\frac{2}{3}\right)$.

Exame – 2001, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

78.

78.1. Para estudar a monotonia da função $f$, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(t) = \left(\frac{5}{1+124e^{-0,3t}}\right)' = \frac{(5)'(1+124e^{-0,3t}) - 5(1+124e^{-0,3t})'}{(1+124e^{-0,3t})^2} = \frac{0 - 5\big((1)' + 124(e^{-0,3t})'\big)}{(1+124e^{-0,3t})^2} =$$

$$= \frac{-5\big(0 + 124((-0,3t)'e^{-0,3t})\big)}{(1+124e^{-0,3t})^2} = \frac{-5\big(124(-0,3 \times e^{-0,3t})\big)}{(1+124e^{-0,3t})^2} = \frac{186e^{-0,3t}}{(1+124e^{-0,3t})^2} =$$

Como $e^{-0,3t}$, $\forall t \geq 0$, então também $186e^{-0,3t} > 0$ e $(1+124e^{-0,3t})^2 > 0$, ou seja a derivada da função $f$ é positiva para todos os valores de $t$,

$$f'(t) > 0\,,\; \forall\, t > 0$$

o que significa que a função é crescente no seu domínio.
No contexto da situação descrita, isto significa que o número de pessoas que sabiam do acidente em Malmequeres de Baixo, foi sempre aumentando com o passar do tempo.

78.2. Como o segundo acidente foi testemunhado pelas mesmas pessoas, sabemos que $f(0) = g(0)$.
Assim, como

$$f(0) = \frac{5}{1+124e^{-0,3\times 0}} = \frac{5}{1+124e^{0}} = \frac{5}{1+124} = \frac{5}{125}$$

Logo

$$g(0) = \frac{5}{125} \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{1+ae^{-b\times 0}} = \frac{5}{125} \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{1+a} = \frac{5}{125} \;\Leftrightarrow\; 1+a = 125 \;\Leftrightarrow\; a = 125-1 \;\Leftrightarrow\; a = 124$$

Desta forma temos que:

$$g(t) = \frac{5}{1+124e^{-bt}}\;,\; t \geq 0$$

E uma vez que a notícia se propagou mais depressa, para cada valor de $t$, temos que:

$$g(t) > f(t) \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{1+124e^{-bt}} > \frac{5}{1+124e^{-0,3t}} \;\Leftrightarrow\; 1+124e^{-bt} > 1+124e^{-0,3t} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 124e^{-bt} > 124e^{-0,3t} \;\Leftrightarrow\; e^{-bt} > e^{-0,3t} \;\Leftrightarrow\; -bt < -0,3t \;\Leftrightarrow\; -b < -0,3 \;\Leftrightarrow\; b > 0,3$$

Assim podemos concluir que pelo facto de que, no instante $t = 0$, o mesmo número de pessoas sabiam dos dois acidentes, ou seja $f(0) = g(0)$, então o parâmetro $a$, da função $g$, tem o mesmo valor que o seu correspondente na função $f$, ou seja 124.
Como, no segundo acidente, mais pessoas sabiam da notícia, no mesmo instante, $g(t) > f(t)$, $(t > 0)$, o que se verifica se o parâmetro $b$, da função $g$, for maior que o seu correspondente na função $f$.

Exame – 2001, Prova modelo (cód. 435)

79. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x-1}\right)' = \frac{(e^x)'(x-1)-(e^x)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(e^x)(x-1)-(e^x)(1-0)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(e^x)(x-1)-e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x\big((x-1)-1\big)}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}=0 \;\Leftrightarrow\; e^x(x-2)=0 \wedge \underbrace{(x-1)^2 \neq 0}_{\text{PV, } x\neq 1} \;\Leftrightarrow\; \underbrace{e^x=0}_{\text{Imp., } e^x>0} \vee x-2=0 \;\Leftrightarrow\; x=2=0$$

Analisando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de $f$, temos:

| $x$ | $-\infty$ | 1 | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | n.d. | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | n.d. | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

Assim, podemos concluir que a função $f$:

- é decrescente no intervalo $]-\infty,1[$ e também no intervalo $]1,2]$;
- é crescente no intervalo $[2,+\infty[$;
- tem um único extremo - um mínimo relativo (cujo minimizante é 2).

Exame – 2000, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 435)

80. Da análise do gráfico de $g$, podemos inferir a monotonia da função, e depois relacionar esta informação com a variação do sinal da derivada:

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ | n.d. | $\nearrow$ |
| $f'(x)$ | $-$ | n.d. | $+$ |

Assim, a única representação gráfica coerente com esta informação é a representação da opção (A).

Resposta: **Opção A**

Exame – 2000, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

81. Começamos por verificar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \big(e^x(x^2+x)\big)' = (e^x)'(x^2+x)+e^x(x^2+x)' = e^x(x^2+x)+e^x(2x+1) =$$

$$= e^x\big((x^2+x)+(2x+1)\big) = e^x(x^2+3x+1)$$

Como o declive ($m$) da reta tangente ao gráfico de $f$ em $x=0$ é $f'(0)$, temos que:

$$m = f'(0) = e^0(0^2+3(0)+1)^1 \times (0+0+1) = 1$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico da função que tem abcissa 0, temos:

$$f(0) = e^0(0^2+0) = 1\times 0 = 0$$

Como o ponto de abcissa 0, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y=mx+b$, para calcular o valor de $b$:

$$0 = 1\times 0 + b \;\Leftrightarrow\; 0=b$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa 0, é:

$$y = 1\times x + 0 \;\Leftrightarrow\; y = x$$

Exame – 2000, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

82. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$c'(t) = \left(t^2e^{-0,6t}\right)' = (t^2)'e^{-0,6t} + t^2(e^{-0,6t})' = 2te^{-0,6t} + t^2(-0,6t)'e^{-0,6t} =$$

$$= 2te^{-0,6t} - 0,6t^2e^{-0,6t} = e^{-0,6t}(2t - 0,6t^2)$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$c'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-0,6t}(2t - 0,6t^2) = 0 \;\Leftrightarrow\; \underbrace{e^{-0,6t} = 0}_{\text{Imp., } e^{-0,6t}>0} \vee 2t - 0,6t^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; t(2 - 0,6t) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; t = 0 \;\vee\; 2 - 0,6t = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 0 \;\vee\; 2 = 0,6t \;\Leftrightarrow\; t = 0 \;\vee\; \frac{2}{\frac{6}{10}} = t \;\Leftrightarrow\; t = 0 \;\vee\; \frac{10}{3} = t$$

Analisando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de $c$, temos:

| $t$ | 0 | | $\frac{10}{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $c'(t)$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $c(t)$ | min | $\nearrow$ | Máx | $\searrow$ |

Assim, como a função $c$ é crescente no intervalo $\left[0,\frac{10}{3}\right]$ e decrescente no intervalo $\left[\frac{10}{3},+\infty\right[$, podemos concluir que a concentração registou um máximo, quando $t = \dfrac{10}{3}$.

Assim, determinado o valor da concentração máxima de *AntiDor* no sangue de uma pessoa que o tenha tomado, e arredondando o resultado às décimas, temos:

$$c\left(\frac{10}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}\right)^2 e^{-0,6\times\frac{10}{3}} \approx 1,5$$

Exame – 2000, Prova modelo (cód. 435)

83. Como a função tem uma assíntota horizontal, quando $x \to +\infty$, o declive da reta tangente ao gráfico de $h$, num ponto de abcissa arbitrariamente grande aproxima-se de 0, porque é o declive da assíntota, ou seja, a variação da função tende para zero, porque o gráfico da função aproxima-se de uma reta (que tem variação nula).

Resposta: **Opção A**

Exame – 1999, Prova para militares (cód. 135)

84. Como o declive da reta tangente ao gráfico de uma função é dado pelo valor da derivada para a abcissa do ponto de tangência, temos que o declive da reta $r$, pode ser obtido calculado como $f'(a)$, e também pode ser calculado como $g'(b)$.

Assim, temos que

- $f'(x) = (e^x)' = e^x$, pelo que , $m_r = f'(a) = e^a$
- $g'(x) = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, pelo que , $m_r = g'(b) = \dfrac{1}{b}$

Logo: $f'(a) = g'(b) \;\Leftrightarrow\; e^a = \dfrac{1}{b}$

Resposta: **Opção A**

Exame – 1999, 2ª fase (cód. 135)

85. Determinando a expressão da derivada, vem:

$$v'(t) = \big(-3\ln(1-0{,}005t) - 0{,}01t\big)' = -3\big(\ln(1-0{,}005t)\big)' - (0{,}01t)' = -3 \times \frac{(1-0{,}005t)'}{1-0{,}005t} - 0{,}01 =$$

$$= -3 \times \frac{0-0{,}005}{1-0{,}005t} - 0{,}01 = \frac{0{,}015}{1-0{,}005t} - 0{,}01 = \frac{0{,}015}{1-0{,}005t} - \frac{0{,}01(1-0{,}005t)}{1-0{,}005t} =$$

$$= \frac{0{,}015 - 0{,}01 + 0{,}00005t}{1-0{,}005t} = \frac{0{,}005 + 0{,}00005t}{1-0{,}005t}$$

Assim, como

- $0{,}005 + 0{,}00005t > 0 \ , \ \forall t \in [0{,}160]$
- $1 - 0{,}005t > 0 \ \Leftrightarrow \ 1 > 0{,}005t \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{0{,}005} > t \ \Leftrightarrow \ 200 > t \ \Leftrightarrow \ t < 200$
  logo também $1 - 0{,}005t > 0 \ , \ \forall t \in [0{,}160]$

Pelo que $\frac{0{,}005 + 0{,}00005t}{1-0{,}005t} > 0 \ , \ \forall t \in [0{,}160]$, isto é, $v'(t) > 0 \ , \ \forall t \in [0{,}160]$

Assim, como a derivada é positiva, podemos afirmar que a função é crescente no intervalo $[0{,}160]$, ou seja, a velocidade máxima é atingida no estremo superior do intervalo de tempo; pelo que $v(160)$ é o máximo da função.
Calculando a velocidade máxima que o foguetão atinge, neste intervalo de tempo, e arredondado o resultado às décimas, temos:

$$v(160) = -3\ln(1 - 0{,}005 \times 160) - 0{,}01 \times 160 \approx 3{,}2$$

Exame – 1999, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 135)

86. Como o declive da reta tangente é igual ao valor da derivada para a abcissa do ponto de tangência, e a derivada de $g$ é:

$$g'(x) = \left(\sqrt{3}x^2 - 1\right)' = \sqrt{3}(x^2)' - (1)' = \sqrt{3}(2x) - 0 = 2\sqrt{3}x$$

Logo o declive da reta $r$ é: $m_r = g'(a) = 2\sqrt{3} \times a$

Como o declive de uma reta é igual à tangente da respetiva inclinação, temos que $m_r = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$

Assim, igualando os dois valores do declive, temos que:

$$2\sqrt{3} \times a = \sqrt{3} \ \Leftrightarrow \ a = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \ \Leftrightarrow \ a = \frac{1}{2}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 1999, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 135)

87. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$C'(t) = \left(2te^{-0,3t}\right)' = (2t)'e^{-0,3t} + 2t\left(e^{-0,3t}\right)' = 2e^{-0,3t} + 2t\left((-0,3t)'e^{-0,3t}\right) =$$

$$= 2e^{-0,3t} + 2t\left(-0,3e^{-0,3t}\right) = 2e^{-0,3t} - 0,6te^{-0,3t} = e^{-0,3t}(2-0,6t)$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$C'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0,3t}(2-0,6t) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-0,3t} = 0}_{\text{Imp., } e^{-0,3t}>0} \vee 2 - 0,6t = 0 \Leftrightarrow 2 = 0,6t \Leftrightarrow \frac{2}{\frac{6}{10}} = t \Leftrightarrow \frac{10}{3} = t$$

Analisando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de $c$, temos:

| $t$ | $0$ | | $\frac{10}{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $c'(t)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $c(t)$ | min | $\nearrow$ | Máx | $\searrow$ |

Assim, como a função $c$ é crescente no intervalo $\left[0, \frac{10}{3}\right]$ e decrescente no intervalo $\left[\frac{10}{3}, +\infty\right[$, podemos concluir que o instante em que a concentração de medicamento no sangue do doente foi máxima foi $t = \frac{10}{3}$.

Como $t = \frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}$ de hora são $\frac{1}{3} \times 60 = \frac{60}{3} = 20$ minutos, o instante em que a concentração de medicamento no sangue do doente foi máxima foi às 3 horas e 20 minutos após as 9 horas da manhã daquele dia, ou seja, às 12 horas e 20 minutos.

Exame – 1999, Prova modelo (cód. 135)

88. Como o declive da reta tangente é igual ao valor da derivada para a abcissa do ponto de tangência, e a derivada de $g$ é:

$$g'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

E assim, o declive da reta tangente no ponto de abcissa $a$, é $m = g'(a) = \frac{1}{a}$.

Como retas paralelas têm declives iguais, e o declive da bissetriz dos quadrantes ímpares é 1, pretende-se que o declive da reta tangente seja 1, ou seja, $m = 1$

Assim, igualando os dois valores do declive, temos que:

$$\frac{1}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1} = a \Leftrightarrow 1 = a$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 1998, Prova para militares (cód. 135)

89. Como o declive ($m$) da reta tangente ao gráfico de $f$ em $x = 1$ é $f'(1)$, temos que:

$$m = f'(1) = \frac{1 + \ln 1}{1} = 1 + 0 = 1$$

Como o ponto de abcissa 1 (e ordenada 0), também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de $b$:

$$0 = 1 \times 1 + b \Leftrightarrow 0 = 1 + b \Leftrightarrow -1 = b$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa 0, é:

$$y = 1 \times x + (-1) \Leftrightarrow y = x - 1$$

Exame – 1998, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 135)

90. Da análise do gráfico de $g$, podemos inferir a monotonia da função, e depois relacionar esta informação com a variação do sinal da derivada:

| $x$ | | $-2$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | $\longrightarrow$ | n.d. | $\searrow$ | n.d. | $\nearrow$ |
| $h'(x)$ | $0$ | n.d. | $-$ | n.d. | $+$ |

Assim, a única representação gráfica coerente com esta informação é a representação da opção (C).

Resposta: **Opção C**

Exame – 1998, Prova modelo (cód. 135)

91. A distância ao primeiro poste do ponto do fio mais próximo do solo, corresponde ao valor do minimizante da função $f$.
Assim, determinando a expressão da derivada de $f$, vem:

$$f'(x) = \left(5\left(e^{1-0,1x} + e^{0,1x-1}\right)\right)' = 5\left(e^{1-0,1x} + e^{0,1x-1}\right)' = 5\Big(\left(e^{1-0,1x}\right)' + \left(e^{0,1x-1}\right)'\Big) =$$

$$= 5\big((1-0,1x)'e^{1-0,1x} + (0,1x-1)'e^{0,1x-1}\big) = 5\big(-0,1e^{1-0,1x} + 0,1e^{0,1x-1}\big)$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 5\big(-0,1e^{1-0,1x} + 0,1e^{0,1x-1}\big) = 0 \;\Leftrightarrow\; -0,1e^{1-0,1x} + 0,1e^{0,1x-1} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 0,1e^{0,1x-1} = 0,1e^{1-0,1x} \;\Leftrightarrow\; e^{0,1x-1} = e^{1-0,1x} \;\Leftrightarrow\; 0,1x - 1 = 1 - 0,1x \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 0,1x + 0,1x = 1 + 1 \;\Leftrightarrow\; 0,2x = 2 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{2}{\frac{2}{10}} \;\Leftrightarrow\; x = 10$$

Analisando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de $f$, temos:

| $x$ | $0$ | | $10$ | | $30$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | Máx | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | Máx |

Assim, como $f$ é decrescente no intervalo $[0,10]$ e crescente no intervalo $[10,30]$, podemos concluir que a distância ao primeiro poste do ponto do fio mais próximo do solo é de 10 metros.

Exame – 1998, Prova modelo (cód. 135)

92. Como a reta $t$ contém os pontos de coordenadas $(0,0)$ e $(6,3)$, podemos calcular o seu declive:

$$m_t = \frac{3-0}{6-0} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Assim, como o declive $(m)$ da reta tangente ao gráfico de $h$ em $x = a$ é $h'(a)$, temos que

$$h'(a) = m_t = \frac{1}{2}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 1997, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 135)