

# MATEMÁTICA A - 12º Ano

## Funções - 2ª Derivada (concavidades e pontos de inflexão)

### Propostas de resolução

#### Exercícios de exames e testes intermédios

1. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da primeira e depois da segunda derivadas:

- $f'(x) = (x^3 + 6 \ln x)' = (x^3)' + (6 \ln x)' = 3x^2 + 6(\ln x)' = 3x^2 + 6 \times \frac{1}{x} = 3x^2 + \frac{6}{x}$
- $f''(x) = (f'(x))' = \left(3x^2 + \frac{6}{x}\right)' = (3x^2)' + \left(\frac{6}{x}\right)' = 2 \times 3x + \frac{(6)' \times x - 6 \times (x)'}{x^2} =$   
 $= 6x + \frac{0 \times x - 6 \times 1}{x^2} = 6x - \frac{6}{x^2}$

Como os pontos de inflexão são zeros da segunda derivada, vamos determiná-los, no domínio da função, ou seja, para  $x \in \mathbb{R}^+$ :

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - \frac{6}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{6x}{1} - \frac{6}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{6x^3}{x^2} - \frac{6}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{6x^3 - 6}{x^2} = 0 \Leftrightarrow_{x>0} 6x^3 - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x^3 = 6 \Leftrightarrow x^3 = \frac{6}{6} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1} \Leftrightarrow x = 1$$

Assim, estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:

$x$	0		1	$+\infty$
$6x^3 - 6$	n.d.	-	0	+
$x^2$	n.d.	+	+	+
$f''(x)$	n.d.	-	0	+
$f(x)$	n.d.		Pt. I.	

Calculando a ordenada do ponto de inflexão, temos que:

$$f(1) = 1^3 + 6 \ln(1) = 1 + 6 \times 0 = 1$$

Logo, podemos concluir que o gráfico de  $f$ :

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo  $]0,1[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo  $[1, +\infty[$
- tem um único ponto de inflexão cujas coordenadas são  $(1,1)$

Exame – 2018, Ép. especial



2. Pela observação do gráfico e considerando os elementos do enunciado, podemos identificar os intervalos em que a função é decrescente e o intervalo em que é crescente e relacionar com o sinal da primeira derivada função.

Da mesma forma, podemos identificar os intervalos em que a função tem concavidades diferentes e relacionar com o sinal da segunda derivada.

Organizando as informações anteriores e estudando o sinal do produto  $f'(x) \times f''(x)$ , na mesma tabela, vem:

$x$	$-\infty$		$-2$		$0$		$2$		$+\infty$
$f(x)$	↗		Máx.	↘			Min.	↗	
$f'(x)$	+		0	-			0	+	
$f(x)$	⌒				Pt. I.	⌒			
$f''(x)$	-		-	-		0	+		+
$f'(x) \times f''(x)$	-		0	+		0	-		+

E assim, temos que o conjunto solução da condição  $f'(x) \times f''(x) \geq 0$ , é  $[-2,0] \cup [2, +\infty[$

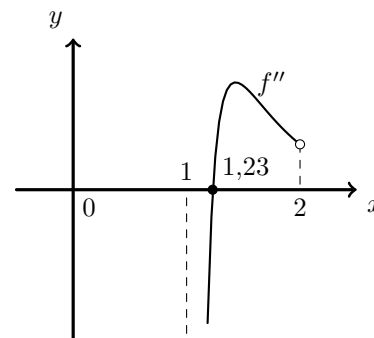
Resposta: **Opção A**

Exame – 2017, Ép. especial

3. Como a abscissa do ponto de inflexão é o zero da segunda derivada da função, começamos por determinar a expressão da segunda derivada, para  $x > 1$ :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (e^{-2x+4} + \ln(x-1))' = (e^{-2x+4})' + (\ln(x-1))' = \\
 &= (-2x+4)'e^{-2x+4} + \frac{(x-1)'}{x-1} = -2e^{-2x+4} + \frac{1}{x-1} \\
 f''(x) &= (f'(x))' = \left(-2e^{-2x+4} + \frac{1}{x-1}\right)' = (-2e^{-2x+4})' + \left(\frac{1}{x-1}\right)' = \\
 &= -2(e^{-2x+4})' + \frac{(1)'(x-1) - 1 \times (x-1)'}{(x-1)^2} = -2 \times (-2x+4)'e^{-2x+4} + \frac{0 \times (x-1) - 1 \times 1}{(x-1)^2} = \\
 &= -2 \times (-2)e^{-2x+4} + \frac{-1}{(x-1)^2} = 4e^{-2x+4} - \frac{1}{(x-1)^2}
 \end{aligned}$$





Representando na calculadora gráfica o gráfico da função  $f''$ , para valores de  $x \in ]1,2[$ , (reproduzido na figura ao lado) e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados dos zeros de uma função determinamos o valor (aproximado às centésimas) do zero da função  $f''(x_0)$ , ou seja, a abscissa do ponto de inflexão do gráfico da função  $f$ :  $x_0 \approx 1,23$







Exame – 2017, Ép. especial



4. Relacionando o sinal da segunda derivada de  $f$  com o sentido das concavidades do gráfico, temos:

$x$	$-\infty$	$-10$		$0$		$10$	$+\infty$
$f''$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f$		Pt. I.		Pt. I.		Pt. I.	

Como o gráfico de  $f(x-5)$  é uma translação horizontal do gráfico de  $f$  associada ao vetor de coordenadas  $(5,0)$ , e o gráfico de  $-f(x-5)$  é simétrico relativamente ao eixo das abcissas do gráfico de  $f(x-5)$ , podemos relacionar o sinal de  $f''(x-5)$  com o sinal da segunda derivada de  $-f''(x-5)$ :



$x$	$-\infty$	$-5$		$5$		$15$	$+\infty$
$f''(x-5)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$-f''(x-5)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$g$		Pt. I.		Pt. I.		Pt. I.	

Logo, podemos concluir que o gráfico de  $g$  tem a concavidade voltada para baixo no intervalo  $]-5,5[$  e também no intervalo  $]15, +\infty[$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2017, 2ª fase

5. Por observação do gráfico de  $f$ , podemos observar o sentido das concavidades e relacionar com o sinal da segunda derivada,  $f''$  (porque o único ponto de inflexão do gráfico de  $f$  tem abcissa zero).

$x$		$0$	
$f(x)$		Pt. I.	
$f''(x)$	$-$	$0$	$+$

Assim, temos que:

- Como  $f''(1) > 0$  e  $f''(2) > 0$ , então  $f''(-2) + f''(-1) > 0$
- Como  $f''(-2) < 0$  e  $f''(-1) < 0$ , então  $f''(-2) + f''(-1) < 0$
- Como  $f''(-2) < 0$  e  $f''(-1) < 0$ , então  $f''(-2) \times f''(-1) > 0$
- Como  $f''(1) > 0$  e  $f''(2) > 0$ , então  $f''(1) \times f''(2) > 0$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2017, 1ª fase






6. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$f''(x) = (f'(x))' = (e^x(x^2 + x + 1))' = (e^x)'(x^2 + x + 1) + e^x(x^2 + x + 1)' = e^x(x^2 + x + 1) + e^x(2x + 1) = e^x(x^2 + x + 1 + 2x + 1) = e^x(x^2 + 3x + 2)$$

Como os pontos de inflexão são zeros da segunda derivada, vamos determiná-los:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 + 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{Eq. Imp.}} \vee x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(2)}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$$

Assim, estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:



$x$	$-\infty$	$-2$		$-1$	$+\infty$
$e^x$	+	+	+	+	+
$x^2 + 3x + 2$	+	0	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		Pt. I.		Pt. I.	

Logo, podemos concluir que o gráfico de  $f$ :

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo  $] -2, 1[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo  $] -\infty, -2[$  e no intervalo  $] -1, +\infty[$
- tem dois pontos de inflexão cujas abcissas são, respetivamente,  $-2$  e  $-1$

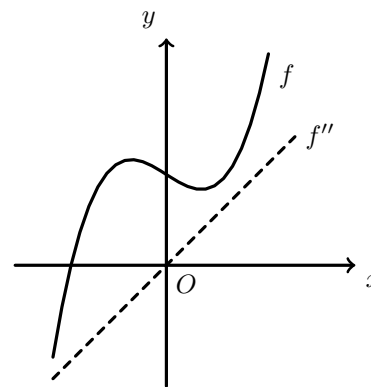
Exame – 2016, 1ª fase

7. Por observação do gráfico de  $f$ , podemos observar o sentido das concavidades e relacionar com o sinal da segunda derivada,  $f''$  (admitindo que o ponto de inflexão tem abcissa zero).

$x$		0	
$f(x)$		Pt. I.	
$f''(x)$	-	0	+

O único gráfico compatível com o sentido das concavidades do gráfico identificadas é o gráfico da opção (C).

Resposta: **Opção C**



Exame – 2015, Ép. especial

8. O gráfico **A**, não é o gráfico da função  $f$ , porque tem um ponto em que a função não é contínua, logo, nesse ponto, a função não tem derivada e sabemos que  $f$  tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio.

O gráfico **B**, não é o gráfico da função  $f$ , porque tem a concavidade voltada para cima para alguns valores de  $x \in ] -\infty, 0[$ , ou seja, a segunda derivada é positiva para alguns valores de  $x \in ] -\infty, 0[$ , e sabemos que  $f''(x) < 0$ , para qualquer  $x \in ] -\infty, 0[$

O gráfico **C**, não é o gráfico da função  $f$ , porque a reta tangente no ponto de abcissa zero tem declive negativo (a função é decrescente numa vizinhança de zero), ou seja a primeira derivada é negativa em  $x = 0$ , e sabemos que  $f'(0) > 0$

Exame – 2015, 2ª fase



9. Para determinar  $f''$  em  $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$ , começamos por determinar  $f'$  em  $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$ :

$$f'(x) = ((x+1)\ln x)' = (x+1)' \ln x + (x+1)(\ln x)' = (1+0)(\ln x) + (x+1)\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x + \frac{x+1}{x}$$



Assim, vem que

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = \left(\ln x + \frac{x+1}{x}\right)' = \left(\ln x + \frac{x}{x} + \frac{1}{x}\right)' = \left(\ln x + 1 + \frac{1}{x}\right)' = (\ln x)' + (1)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = \\ &= \frac{1}{x} + 0 + \frac{(1)'(x) - 1 \times (x)'}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{0 - 1 \times 1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} \end{aligned}$$

Para determinar o sentido das concavidades em  $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$ , vamos estudar o sinal de  $f''$  em  $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$ :

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \wedge \underbrace{x^2 \neq 0}_{\text{P.V., pq. } x > \frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = 1$$

Assim, estudando a variação de sinal de  $f''$  e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de  $f$ , vem:

$x$	$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$x-1$		-	0	+
$x^2$		+	+	+
$f''(x)$	n.d.	-	0	+
$f(x)$	n.d.		Pt. I.	

Calculando a ordenada do ponto de inflexão, temos:

$$f(1) = (1+1)\ln 1 = 2 \times 0 = 0$$

Logo, podemos concluir que o gráfico de  $f$ :

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo  $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo  $]1, +\infty[$
- tem um único ponto de inflexão de coordenadas (1,0)

Exame – 2015, 1ª fase

10. Para que o gráfico de uma função tenha exatamente dois pontos de inflexão, a segunda derivada deve ter exatamente dois zeros, associados a uma mudança de sinal.

Nas opções (B) e (C) existem 4 e 3 zeros associados a uma mudança de sinal, respetivamente, ou seja, se cada um destes for o gráfico da segunda derivada, o gráfico da função associada terá, respetivamente quatro e três pontos de inflexão.

Na opção (D) existem 2 zeros, mas só um deles está associado a uma mudança de sinal, ou seja, se este for o gráfico da segunda derivada, o gráfico da função associada terá um único ponto de inflexão.

Na opção (A) existem 2 zeros, ambos associados a uma mudança de sinal, pelo que podemos concluir que este é o gráfico da segunda derivada, em que o gráfico da função associada terá exatamente dois pontos de inflexão.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2014, Ép. especial



11. Relativamente à afirmação **(I)**, podemos estudar a variação do sinal da função  $h'$ , derivada de  $h$  (recorrendo à observação do gráfico de  $f$ ), e relacionar com a monotonia de  $h$ :

$x$	$-\infty$	$-2$		$3$	$+\infty$
$f$	+	0	+	0	-
$e^{2x}$	+	+	+	+	+
$h'(x)$	+	0	+	0	-
$h(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

Assim, podemos concluir que a função  $h$  é crescente no intervalo  $]-\infty, 3]$  e decrescente no intervalo  $[3, +\infty[$ , pelo que tem um único extremo (para  $x = 3$ ), ou seja a afirmação **(I)** é **falsa**.

Relativamente à afirmação **(II)**, temos que

$$h''(x) = \left( \frac{f(x)}{e^{2x}} \right)' = \frac{f'(x)e^{2x} - f(x)(e^{2x})'}{(e^{2x})^2} = \frac{f'(x)e^{2x} - f(x)(2x)'e^{2x}}{(e^{2x})(e^{2x})} = \frac{e^{2x}(f'(x) - f(x) \times 2)}{(e^{2x})(e^{2x})} = \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}$$

Como  $-2$  é um zero de  $f$ , temos que  $f(-2) = 0$ , e como  $f$  tem um extremo relativo em  $x = -2$ , então  $f'(-2) = 0$ , e assim, vem que:

$$h''(-2) = \frac{f'(-2) - 2f(-2)}{e^{2 \times (-2)}} = \frac{0 - 2 \times 0}{e^{-4}} = \frac{0}{e^{-4}} = 0$$




Logo, podemos concluir que a afirmação **(II)** é **verdadeira**.

Relativamente à afirmação **(III)**, como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 3$ , podemos concluir que quando  $x$  tende para  $+\infty$ , a reta de equação  $y = 3$  é uma assintota do gráfico de  $h$ .

Assim, quando  $x$  tende para  $+\infty$ , a reta de equação  $y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -3$  não pode ser assintota do gráfico de  $h$ , pelo que podemos afirmar que a afirmação **(III)** é **falsa**.

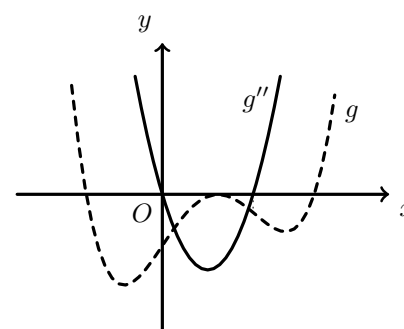
Exame – 2014, 2ª fase

12. Por observação do gráfico de  $g''$ , podemos estudar o sinal da segunda derivada e relacionar com o sentido das concavidades do gráfico de  $g$  (designa-se por  $a$ , o zero de  $g''$  maior que zero).

$x$		0		$a$	
$g''(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$		Pt. I.		Pt. I.	

O único gráfico compatível com o sentido das concavidades do gráfico identificadas é o gráfico da opção (A).

Resposta: **Opção A**



Exame – 2014, 2ª fase



13. Para estudar a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:



$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{1}{2}x^2 - \ln x\right)' = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' - (\ln x)' = \frac{1}{2} \times 2x - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x}$$

Como os pontos de inflexão são zeros da segunda derivada, vamos determiná-los:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \wedge \underbrace{x \neq 0}_{\text{PV, } x > 0} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

Como o domínio de  $f$  é  $\mathbb{R}^+$ , o único zero da segunda derivada é  $x = 1$ .

Assim, estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:

$x$	0		1	$+\infty$
$g''(x)$	n.d.	-	0	+
$g(x)$	n.d.		Pt. I.	

Logo o gráfico de  $f$  tem um único ponto de inflexão.

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12º ano – 30.04.2014



14. Determinando a expressão da segunda derivada vem:

$$f''(x) = (f'(x))' = ((4 + x)^2)' = (4^2 + 2 \times 4x + x^2)' = (16)' + (8x)' + (x^2)' = 0 + 8 + 2x = 2x + 8$$

Calculando o zero da segunda derivada temos:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow 2x = -8 \Leftrightarrow x = -4$$

Estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:

$x$	$-\infty$	-4	$+\infty$
$g''(x)$		0	+
$g(x)$			Pt. I. 

Logo, podemos concluir que gráfico da função  $f$  tem um ponto de inflexão de coordenadas  $(-4, f(-4))$

Resposta: **Opção D**

A afirmação da opção (A) é falsa porque existem objetos cuja imagem pela segunda derivada é negativa ( $x \in ]-\infty, -4[$ ).

A afirmação da opção (B) é falsa, porque apesar da primeira derivada ter um zero ( $x = -4$ ), este não está associado a uma mudança de sinal.

A afirmação da opção (C) é falsa porque o gráfico de  $f$  tem um ponto de inflexão.

Exame – 2013, Ép. especial



15. Sabemos que  $a$  é um zero da primeira derivada (porque  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \Leftrightarrow f'(a) = 0$ ) e que tem uma mudança de sinal associada, (porque  $f''(x) < 0$ , ou seja,  $f'$  é decrescente):

$x$		$a$	
$(f'(x))'$		-	
$f'(x)$		$\searrow$	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	Máx	$\searrow$

Logo podemos concluir que  $a$  é um maximizante, e por isso  $f(a)$  é um máximo relativo da função  $f$ .

Resposta: **Opção B**

Não existem dados suficientes para rejeitar ou validar a afirmação da opção (A).

A afirmação (C) é falsa, porque se  $a$  fosse um minimizante, então  $f''(a) > 0$ .

A afirmação (D) é falsa, porque se  $P$  fosse um ponto de inflexão, então  $f''(a) = 0$

Exame – 2013, 2ª fase

16. Começando por determinar  $g''$  temos:

$$g''(x) = (g'(x))' = \frac{(e^x + 6e^{-x} + 4x)'}{e^x + 6e^{-x} + 4x} = \frac{(e^x)' + (6e^{-x})' + (4x)'}{e^x + 6e^{-x} + 4x} = \frac{e^x + 6(-x)'e^{-x} + 4}{e^x + 6e^{-x} + 4x} = \frac{e^x - 6e^{-x} + 4}{e^x + 6e^{-x} + 4x}$$

Para determinar o sentido das concavidades, vamos estudar o sinal de  $g''$  :

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 6e^{-x} + 4}{e^x + 6e^{-x} + 4x} = 0 \Leftrightarrow e^x - 6e^{-x} + 4 = 0 \wedge e^x + 6e^{-x} + 4x \neq 0 \Leftrightarrow$$

(como  $e^x + 6e^{-x} + 4x > 0$  em  $\mathbb{R}^+$ )

$$\Leftrightarrow e^x - 6e^{-x} + 4 = 0 \Leftrightarrow e^x - 6\frac{1}{e^x} + 4 = 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{6}{e^x} + 4 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 6 + 4e^x = 0 \Leftrightarrow$$

(fazendo a substituição de variável  $y = e^x$ )



$$\Leftrightarrow y^2 - 6 + 4y = 0 \Leftrightarrow y^2 + 4y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{4 \times 10}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow y = -2 \pm \sqrt{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{2} \Leftrightarrow y = -2 + \sqrt{10} \vee y = -2 + \sqrt{10} \quad (-2 - \sqrt{10} \notin \mathbb{R}^+) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -2 + \sqrt{10} \Leftrightarrow e^x = -2 + \sqrt{10} \Leftrightarrow x = \ln(-2 + \sqrt{10})$$

Assim, estudando a variação de sinal de  $g''$  e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de  $g$ , vem:

$x$	0		$\ln(-2 + \sqrt{10})$	$+\infty$
$g''(x)$	n.d.	-	0	+
$g(x)$	n.d.		Pt. I.	

Logo, podemos concluir que o gráfico de  $g$ :

- tem um único ponto de inflexão (de abcissa  $x = \ln(-2 + \sqrt{10})$ )
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo  $]0, \ln(-2 + \sqrt{10})[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo  $] \ln(-2 + \sqrt{10}), +\infty[$

Exame – 2013, 2ª fase








17. Calculando os zeros da segunda derivada, temos:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{Eq Imp, } e^{-x} > 0} \vee x^2 = 0 \vee x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

Assim, estudando a variação de sinal de  $f''$  e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de  $f$ , vem:

$x$	$-\infty$	0		1	$+\infty$	
$f''(x)$		-	0	-	0	+
$f(x)$					Pt. I.	

Logo o gráfico de  $f$  tem um único ponto de inflexão.

Resposta: **Opção D**

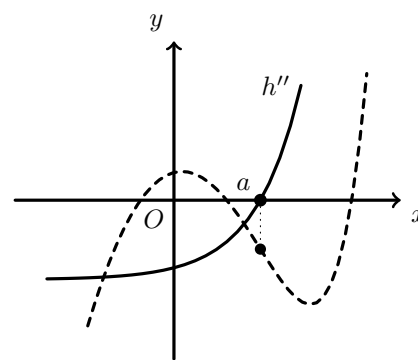
Teste Intermédio 12º ano – 24.05.2013

18. Seja  $a$ , o único zero da segunda derivada ( $h''(a) = 0$ ). Como o zero está associado a uma mudança de sinal da segunda derivada, é um ponto de inflexão do gráfico de  $h$ .

Os gráficos das opções (B) e (C) têm a concavidade voltada para cima para todos os valores do domínio.

O gráfico da opção (D) tem um ponto de inflexão de abcissa negativa, por isso, incompatível com a segunda derivada apresentada.

O único gráfico compatível com a abcissa do ponto de inflexão detetado é o gráfico da opção (A).



Resposta: **Opção A**

Exame – 2012, Ép. especial

19. Das funções representadas graficamente, a única que satisfaz cumulativamente todas as condições definidas é a **opção (I)**.

**Podemos rejeitar:**

- a **opção (II)**, porque sabemos que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - 1) = 0$ , ou seja  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 1$ , e na função representada nesta opção temos que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -1$
- a **opção (III)**, porque sabemos que  $h$  tem um mínimo relativo em  $]a, c[$ , porque a função representada nesta opção é crescente neste intervalo, pelo que não se verifica a existência de um mínimo.
- a **opção (IV)**, porque sabemos que  $h''(x) > 0$  para  $x > b$ , ou seja, no intervalo  $]b, +\infty[$ , o gráfico tem a concavidade voltada para cima, e no gráfico da função representada nesta opção, verifica-se o oposto - no intervalo  $]b, +\infty[$ , o gráfico tem a concavidade voltada para baixo.

Exame – 2012, Ép. especial





20. Para estudar o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$\begin{aligned} \text{Como } x \in \mathbb{R}^+, \quad g'(x) &= f(x) - \frac{1}{x} = \frac{1 - e^{4x}}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1 - e^{4x} - 1}{x} = -\frac{e^{4x}}{x} \\ g''(x) &= (g'(x))' = \left(-\frac{e^{4x}}{x}\right)' = -\left(\frac{e^{4x}}{x}\right)' = -\frac{(e^{4x})' \times x - e^{4x} \times (x)'}{x^2} = -\frac{(4x)'e^{4x} \times x - e^{4x}}{x^2} = \\ &= -\frac{4e^{4x} \times x - e^{4x}}{x^2} = -\frac{e^{4x}(4x - 1)}{x^2} \end{aligned}$$

Determinando os zeros da segunda derivada, vem:

$$\begin{aligned} g''(x) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{e^{4x}(4x - 1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow -e^{4x}(4x - 1) = 0 \wedge \underbrace{x^2 \neq 0}_{\text{PV, } x > 0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \underbrace{-e^{4x} = 0}_{\text{Eq Imp}} \vee 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Assim, estudando a variação de sinal de  $g''$  e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de  $g$ , vem:

$x$	0		$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$g''(x)$	n.d.	+	0	-
$g(x)$	n.d.		Pt. I.	

Logo, podemos concluir que o gráfico de  $g$ :

- tem um único ponto de inflexão (de abscissa  $x = \frac{1}{4}$ )
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo  $]0, \frac{1}{4}[$
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo  $]\frac{1}{4}, +\infty[$

Exame – 2012, 2ª Fase

21. As retas tangentes ao gráfico nos pontos de abscissas  $x = -3$  e  $x = 1$  têm declive negativo, ou seja, em  $x = -3$  e  $x = 1$  a função é decrescente, pelo que  $f'(-3) < 0$  e também  $f'(1) < 0$ .

Relativamente ao sentido das concavidades, em  $x = 1$ , o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para baixo, pelo que  $f''(1) < 0$ .

Em  $x = -3$ , o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para cima, pelo que  $f''(-3) > 0$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2012, 1ª Fase

22. Para determinar a abscissa do ponto de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = \left(x^2 - 4x + \frac{9}{2} - 4 \ln(x - 1)\right)' = (x^2)' - (4x)' + \left(\frac{9}{2}\right)' - (4 \ln(x - 1))' = \\ &= 2x - 4 + 0 - 4 \times \frac{(x - 1)'}{x - 1} = 2x - 4 - \frac{4 \times 1}{x - 1} = \frac{(2x - 4)(x - 1) - 4}{x - 1} = \frac{2x^2 - 2x - 4x + 4 - 4}{x - 1} = \frac{2x^2 - 6x}{x - 1} \end{aligned}$$

De seguida, determinamos os zeros da segunda derivada:

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 6x}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \wedge \underbrace{x - 1 \neq 0}_{\text{PV, } x > 1} \Leftrightarrow x(2x - 6) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{\text{Impossível, } x > 1} \vee 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6}{2} \Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Como é certa a existência de um ponto de inflexão, o único zero da segunda derivada ( $x = 3$ ) é a abscissa desse ponto.

Teste Intermédio 12º ano – 24.05.2012



23. Determinando a expressão da primeira, e depois da segunda derivada, temos:

$$f'(x) = (ax^2 - 1)' = 2ax + 0 = 2ax$$

$$f''(x) = (f'(x))' = (2ax)' = 2a$$

Como o gráfico de  $f''$  é a reta de equação  $y = 2a$ , e pela observação do gráfico, podemos constatar que  $2a < 0$ , logo  $a < 0$ .

Assim, das opções apresentadas, apenas o valor  $-3$  é compatível com a condição  $a < 0$ .

Resposta: **Opção D**

Exame – 2011, Ép. especial

24. Para estudar o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$g''(x) = (g'(x))' = \left( \log_2 \left( -\frac{\pi}{6} - x \right) \right)' = \frac{\left( -\frac{\pi}{6} - x \right)'}{\left( -\frac{\pi}{6} - x \right) \ln 2} = \frac{-\left( \frac{\pi}{6} \right)' - (x)'}{\left( -\frac{\pi}{6} - x \right) \ln 2} = \frac{-1}{\left( -\frac{\pi}{6} - x \right) \ln 2}$$

Assim temos que a equação  $g''(x) = 0$  é impossível, pelo que o gráfico da função  $g$  **não tem qualquer ponto de inflexão**.

Relativamente ao sentido das concavidades do gráficos, temos que, no intervalo em qua a função está definida,  $-\frac{\pi}{6} - x > 0$ , pelo que também  $\left( -\frac{\pi}{6} - x \right) \ln 2 > 0$

Assim, o quociente  $\frac{-1}{\left( -\frac{\pi}{6} - x \right) \ln 2}$  toma sempre valores negativos no domínio da função, isto é,

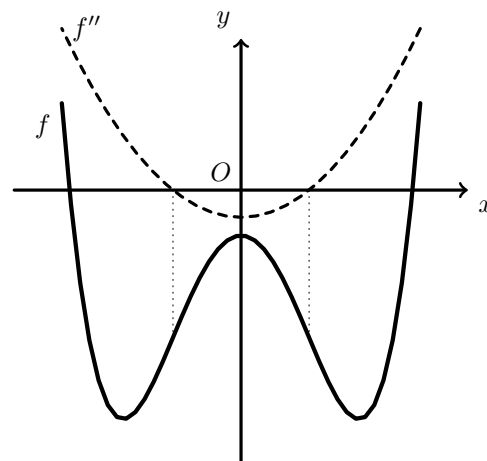
$g''(x) < 0, \forall x \in \left] -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} \right[$ , ou seja, o gráfico de  $g$  **tem a concavidade voltada para baixo** em todo o domínio.

Exame – 2011, Ép. especial

25. Os gráficos das funções apresentadas nas opções (A) e (B) são parábolas cujo vértice está sobre o eixo das abcissas, ou seja, ambas têm um zero, mas que não está associado a uma mudança de sinal, pelo que, cada uma destas funções é a segunda derivada de uma função sem pontos de inflexão, e pela observação do gráfico, podemos constatar que a função  $f$  tem dois pontos de inflexão, pelo que nenhuma destas opções é correta.

O gráfico da função da opção (C), é uma parábola com dois zeros simétricos, e por isso coerente com os pontos de inflexão observados no gráfico de  $f$ , mas esta função é negativa quando o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para cima, e é positiva quando o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para baixo, pelo que, esta também não é a opção correta.

Resposta: **Opção D**



Exame – 2011, 2ª fase






26. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico de  $f$ , determinamos os zeros da segunda derivada:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) \times (x^2 - 5x + 4) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{g(x) = 0}_{\text{Eq. imp., } g(x) > 0} \vee x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2(1)} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$$

Como  $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , podemos estudar o sinal de  $f''$  e relacionar com o sentido das concavidades do gráfico de  $f$ , vem:

$x$	$-\infty$	1		4	$+\infty$
$g(x)$	+	+	+	+	+
$x^2 - 5x + 4$	+	0	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		Pt. I.		Pt. I.	

- Assim, por observação do gráfico da função da opção (I) podemos rejeitar esta hipótese, porque o sentido das concavidades é o oposto do que foi estudado.
- Relativamente à opção (II), podemos observar que  $f(1) > 0$  e  $f(4) < 0$ , logo  $f(1) \times f(4) < 0$  o que contraria a informação do enunciado ( $f(1) \times f(4) > 0$ ), pelo que esta hipótese também é excluída.
- Observando o gráfico da opção (IV), constatamos que existe um ponto ( $x = a$ ) em que a função não é contínua. Neste caso a primeira derivada, neste ponto não estaria definida (não existe  $f'(a)$  e consequentemente também a segunda derivada não estaria definida ( $f''(a)$  não existe), o que contraria a informação do enunciado, que afirma que  $f''$  tem domínio  $\mathbb{R}$

Assim, temos que, a única opção coerente com todos os dados do enunciado é a opção (III).




Exame – 2011, 1ª fase

27. Por observação do gráfico, concluímos que  $f$  é crescente em todo o domínio, logo  $f'(x) > 0, \forall x \in ]1,3[$   
Também pela observação do gráfico, é possível constatar que a concavidade do gráfico de  $f$  está sempre voltada para baixo, isto é  $f''(x) < 0, \forall x \in ]1,3[$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12º ano – 26.05.2011

28. Representando a informação do gráfico sob a forma de uma tabela, temos:

$x$		0		$a$	
$f'(x)$	+	+	+	0	-
$f(x)$				Máx	

Assim, podemos verificar que a função  $f$  é crescente em  $]0, a[$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2010, 2ª fase

29. Como  $h(x) = f(x) + e^x$  e a derivada de uma função afim é o valor do declive (o seu gráfico é uma reta), determinando a expressão da primeira, e depois da segunda derivada, vem:

$$h'(x) = (f(x) + e^x)' = (f(x))' + (e^x)' = m + e^x$$

$$h''(x) = (m + e^x)' = (m)' + (e^x)' = 0 + e^x = e^x$$

Assim, apenas o gráfico da opção (A) é compatível com a expressão determinada para a segunda derivada.

Resposta: **Opção A**

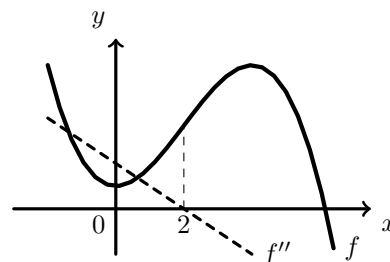
Exame – 2010, 1ª Fase



30. Os gráficos das funções das opções (A) e (B) são parábolas com o vértice sobre o eixo das abcissas, ou seja, cada uma das funções tem um zero, mas ao qual não está associada uma mudança de sinal, pelo que, esses zeros não correspondem à abscissa de um ponto de inflexão.

A função da opção (D) tem um zero em  $x = 2$ , mas é positiva para os valores de  $x$  em que o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para baixo, e é negativa para os valores de  $x$  em que a concavidade do gráfico de  $f$  está voltada para cima.

A função da opção (C) tem um zero, para  $x = 2$ , com mudança de sinal associada, o que sinaliza a existência de um ponto de inflexão, e é positiva para  $x < 2$  (quando o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para cima) e negativa para  $x > 2$  (quando o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para baixo).



Teste Intermédio 12º ano – 19.05.2010

31. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = ((2x + 4)e^x)' = (2x + 4)'e^x + (2x + 4)(e^x)' = (2 + 0)e^x + (2x + 4)e^x = \\ &= 2e^x + 2xe^x + 4e^x = 2xe^x + 6e^x = e^x(2x + 6) \end{aligned}$$

Calculando os zeros da segunda derivada, temos:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(2x + 6) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{Eq. Imp.}, e^x > 0} \wedge (2x + 6) = 0 \Leftrightarrow 2x = -6 \Leftrightarrow x = -3$$

Assim, estudando a variação de sinal de  $f''$  e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de  $f$ , vem:

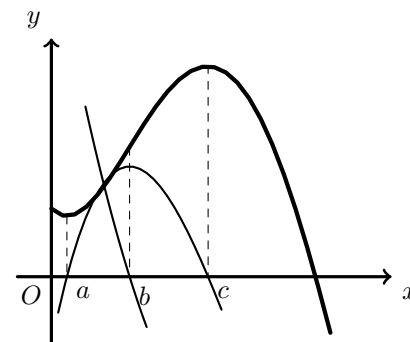
$x$	$-\infty$	$-3$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$		Pt. I.	

Logo, podemos concluir que o gráfico de  $f$ :

- tem um único ponto de inflexão (de abscissa  $x = -3$ )
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo  $] -\infty, -3[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo  $] -3, +\infty[$

Teste Intermédio 12º ano – 27.05.2009

32. O zero da função representada no gráfico da Figura 2, corresponde à abscissa do ponto de inflexão do gráfico de  $h$ , o que é suficiente para relacionar este gráfico com a segunda derivada. Mas, podemos ainda observar que para  $x \in ]0, b[$  a função representada no gráfico da Figura 1 é positiva enquanto, para os mesmos valores, a concavidade do gráfico de  $h$  está voltada para cima; e de forma análoga, quando  $x \in ]b, +\infty[$ , a função do gráfico da Figura 2 é negativa, enquanto o gráfico da função  $h$ , tem a concavidade voltada para baixo. Desta forma, podemos concluir que **o gráfico da Figura 2 é o gráfico de  $h''$**







Os zeros da função representada no gráfico Figura 3, correspondem às abcissas dos extremos de  $h$ , o que permite relacionar este gráfico com a primeira derivada. Mas, podemos ainda observar que para  $x \in ]a, c[$  a função representada no gráfico da Figura 3 é positiva enquanto, para os mesmos valores, a função  $h$  é crescente; e de forma análoga, quando  $x \in ]0, a[ \cup ]c, +\infty[$ , a função representada no gráfico da Figura 2 é negativa, enquanto a função  $h$  é decrescente. Desta forma, podemos concluir que **o gráfico da Figura 3 é o gráfico de  $h'$**

Exame – 2007, 2ª fase



33. Estudando a variação de sinal de  $f''$  e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de  $f$ , vem:

$x$		-6		-1		1	
$(x^2 - 1)$	+	+	+	0	-	0	+
$(x^2 + 5)$	+	+	+	+	+	+	+
$(x + 6)^2$	+	0	+	+	+	+	+
$f''(x)$	+	0	+	0	-	0	+
$f(x)$				Pt. Inf.		Pt. Inf.	

Pelo que podemos concluir que a função  $f$  tem **dois pontos de inflexão**.

Resposta: **Opção B**

Exame – 2006, Ép. especial

34. Por observação do gráfico, temos que:

- $h(0) < 0$ , porque a imagem de zero é negativa
- $h'(0) > 0$ , porque em  $x = 0$  a função é crescente
- $h''(0) < 0$ , porque em  $x = 0$  a concavidade do gráfico da função está voltada para baixo

Logo, podemos afirmar que:

- $h(0) + h''(0) < 0$  ;  $h(0) - h'(0) < 0$  e  $h'(0) \times h''(0) < 0$
- $h'(0) - h''(0) > 0$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2006, 2ª Fase

35. De acordo com os dados, temos que:

- $f''(0) = 0$ , porque no ponto de abscissa 0, o gráfico de  $f$  inverte o sentido das concavidades, ou seja é um ponto de inflexão
- $f'(0) = 1$ , a tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa 0, é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, logo tem declive 1
- $f(0) = 2$ , porque a reta tangente tem declive 1 e contém o ponto  $(-2, 0)$ , logo, a ordenada na origem pode ser calculada como:  $0 = 1 \times (-2) + b \Leftrightarrow 2 = b$

Assim,  $f(0) + f'(0) + f''(0) = 2 + 1 + 0 = 3$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2006, 1ª Fase

36. Determinando a expressão da segunda deriva, temos:

$$f''(x) = (f'(x))' = (x^3 - 3x + 1)' = (x^3)' - (3x)' + (1)' = 3x^2 - 3$$

Determinado os zeros da segunda derivada, vem:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Como o gráfico da segunda derivada é uma parábola, com a concavidade voltada para cima, temos que a segunda derivada é negativa em  $] - 1, 1[$ , ou seja, o gráfico da função tem a concavidade voltada para baixo, neste intervalo.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)





37. Determinando a expressão da segunda derivada, vem:

$$f''(x) = (f'(x))' = (2 + x \ln x)' = (2)' + (x \ln x)' = 0 + (x)' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Determinando os zeros da segunda derivada, temos:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

Assim, estudando a variação de sinal de  $f''$  e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de  $f$ , vem:

$x$	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f''(x)$	n.d.	-	0	+
$f(x)$	n.d.		Pt. I.	

Logo, podemos concluir que o gráfico de  $f$ :

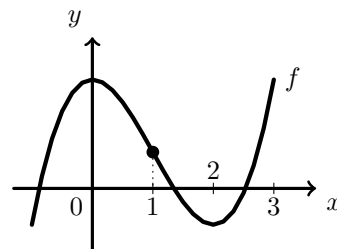
- tem um único ponto de inflexão (de abscissa  $x = \frac{1}{e}$ )
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo  $]0, \frac{1}{e}[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo  $]\frac{1}{e}, +\infty[$

Exame – 2005, 1ª Fase (cód. 435)

38. A solução da equação  $f''(x) = 0$  é a abscissa do ponto de inflexão do gráfico de  $f$ .

Logo, pela observação do gráfico, a única opção razoável - de entre as apresentadas - para o valor da abscissa do ponto de inflexão é o valor 1.

Resposta: **Opção B**



Exame – 2004, Ép. especial (cód. 435)

39. Determinando a expressão da primeira, e depois, da segunda derivada vem:

$$f'(x) = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$f''(x) = (f'(x))' = (\alpha x^{\alpha-1})' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-1-1} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

Assim, temos que:

- Como  $\alpha \in [0,1]$ , então  $\alpha - 1 < 0$
- Como o domínio de  $f$  é  $\mathbb{R}^+$ , então  $x^{\alpha-2} > 0$

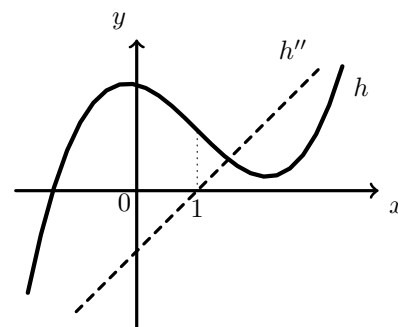
Logo, como  $\alpha > 0$ , o produto  $\alpha \times (\alpha-1)$  é negativo, e por isso, o produto  $\alpha(\alpha-1) \times x^{\alpha-2}$  também é negativo.

Desta forma a segunda derivada da função  $f$  é sempre negativa, o que permite afirmar que a concavidade do gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para baixo, qualquer que seja o valor de  $\alpha \in ]0,1[$ .

Exame – 2004, 2ª Fase (cód. 435)



40. Os gráficos das funções apresentadas nas opções (A) e (B) são parábolas cujo vértice está sobre o eixo das abcissas, ou seja, ambas têm um zero, mas que não está associado a uma mudança de sinal, pelo que, cada uma destas funções é a segunda derivada de uma função sem pontos de inflexão, e pela observação do gráfico, podemos constatar que a função  $h$  tem dois pontos de inflexão, pelo que nenhuma destas opções é correta.



O gráfico da função da opção (D), é uma reta com um zero igual a 1, e por isso coerente com o ponto de inflexão observado no gráfico de  $h$ , mas esta função é negativa quando o gráfico de  $h$  tem a concavidade voltada para cima, e é positiva quando o gráfico de  $h$  tem a concavidade voltada para baixo, pelo que, esta também não é a opção correta.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2004, 1ª Fase (cód. 435)

41. Determinando a expressão da primeira, e depois da segunda derivada, temos:

$$f'(x) = ((x-5)^3)' = 3(x-5)^2(x-5)' = 3(x-5)^2 \times 1 = 3(x-5)^2$$

Assim podemos observar que a primeira derivada de  $f$  é uma parábola cujo vértice está sobre o eixo das abcissas, ou seja, o zero da primeira derivada não está associado a uma mudança de sinal, pelo que a função  $f$  não tem extremos.

$$f''(x) = (f'(x))' = (3(x-5)^2)' = 2 \times 3(x-5)(x-5)' = 6(x-5)$$

Calculando o zero da segunda derivada, vem:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x-5) = 0 \Leftrightarrow x-5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Como o gráfico da segunda derivada é uma reta de declive não nulo, o zero da segunda derivada está associado a uma mudança de sinal, ou seja corresponde à abcissa de um ponto de inflexão de  $f$ .

Resposta: **Opção C**

Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)

42. Como as abcissas dos pontos de inflexão correspondem aos zeros da segunda derivada associados a uma mudança de sinal, começamos por determinar a segunda derivada da função  $f$ :

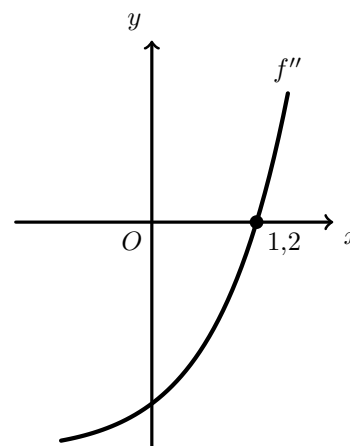
$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = ((x+1)e^x - 10x)' = ((x+1)e^x)' - (10x)' = (x+1)'e^x + (x+1)(e^x)' - 10 = \\ &= e^x + (x+1)(e^x) - 10 \end{aligned}$$

Representado graficamente a expressão da segunda derivada de  $f$  na calculadora, obtemos o gráfico que se reproduz na figura ao lado.

Verificamos que a segunda derivada tem um zero, com mudança de sinal associada, e recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados dos zeros da função, obtemos o valor, arredondado às décimas de 1,2.

Assim, concluímos que a abcissa do ponto A, ou seja do ponto de inflexão do gráfico de  $f$  é

$$x_A \approx 1,2$$



Exame – 2003, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 435)





43. Como a primeira derivada é negativa, a função é decrescente (podem ser validadas as opções (A) e (C)).

Como a segunda derivada é negativa, o gráfico da função tem a concavidade voltada para baixo (podem ser validadas as opções (A) e (D)).

Resposta: **Opção A**

Exame – 2003, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

44. Analisando cada uma das afirmações, podemos concluir que:

- $a$  é zero de  $f$  se  $f(a) = 0$ ; não existe qualquer relação entre os zeros da função e os zeros da derivada, pelo que não é possível garantir a veracidade da afirmação
- $f(a)$  é extremo relativo de  $f$  se  $a$  for um zero da derivada e estiver associado a uma mudança de sinal; como não dispomos de informação sobre a variação do sinal da derivada, a condição  $f'(a) = 0$  não é suficiente para garantir a veracidade da afirmação
- $(a, f(a))$  é ponto de inflexão do gráfico de  $f$  se  $a$  for um zero da segunda derivada, associado a uma mudança de sinal; como não dispomos de informação sobre a segunda derivada, não é possível garantir a veracidade da afirmação
- Como o valor da derivada num ponto é também o valor do declive da reta tangente ao gráfico, nesse ponto, podemos afirmar que a reta tangente ao gráfico de  $f$ , no ponto de abcissa  $a$  tem declive 0; ou seja, a reta tangente tem equação  $y = 0 \times x + b \Leftrightarrow y = b$ ; como a reta é tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, f(a))$ , substituindo as coordenadas deste ponto na reta tangente, temos:

$$f(a) = 0 \times a + b \Leftrightarrow f(a) = b$$

Ou seja a reta tangente tem de equação  $y = f(a)$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2002, Prova para militares (cód. 435)

45. Analisando cada uma das afirmações, podemos concluir que:

- Sendo  $a$  um zero da segunda derivada, não está associado a uma mudança de sinal da segunda derivada, pelo que o sentido da concavidade do gráfico da função não se altera, ou seja,  $a$  não é a abcissa de um ponto de inflexão
- Como  $c$  é um zero da segunda derivada, associado a uma mudança de sinal da segunda derivada, sabemos que o sentido da concavidade do gráfico da função varia, ou seja,  $c$  é a abcissa de um ponto de inflexão do gráfico de  $f$
- No intervalo  $[0, b]$  a concavidade do gráfico da segunda derivada está virada para baixo, mas é positiva, ou seja a concavidade do gráfico de  $f$  está voltada para cima.
- No intervalo  $]b, c[$  a segunda derivada é negativa, o que significa que, a concavidade do gráfico de  $f$  está voltada para baixo neste intervalo.

Resposta: **Opção B**

Exame – 2002, 2ª fase (cód. 435)

46. Por observação do gráfico, podemos constatar que a função é crescente no intervalo  $]a, c[$  e também no intervalo  $]e, +\infty[$ , e decrescente para os restantes valores de  $x$ ; assim podemos afirmar que a primeira derivada é positiva nos intervalos indicados e negativa para os restantes valores de  $x$  (pelo que podemos validar as opções (C) e (D)).

Relativamente ao sentido das concavidades, a observação do gráfico permite verificar que a concavidade está voltada para baixo no intervalo  $]b, d[$ , e voltada para cima, para os restantes valores de  $x$ , ou seja, a segunda derivada é negativa neste intervalo e positiva para os restantes valores de  $x$  (com este argumento podemos validar as opções (A) e (C)).

Resposta: **Opção C**

Exame – 2002, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)



47. Resposta: **Opção B**

O gráfico representado na opção (B), é o único que tem apenas um ponto de inflexão, e a concavidade voltada para baixo, para valores de  $x$  inferiores à abscissa do ponto de inflexão e a concavidade voltada para cima, para valores de  $x$  superiores à abscissa do ponto de inflexão.




A monotonia da função representada neste gráfico é igualmente compatível com a variação do sinal da primeira derivada.

Exame – 2001, Prova para militares (cód. 435)

48. Calculando os zeros da segunda derivada, temos:

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow 1 = x^2 \Leftrightarrow \pm\sqrt{1} = x \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

Assim, estudando a variação de sinal de  $g''$  e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de  $g$ , vem:

$x$		-1		1	
$g''(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$		Pt. I.		Pt. I.	

Logo, analisando as várias opções, podemos verificar que as funções representadas nas opções (A) e (B) têm um único ponto de inflexão e o gráfico representado na opção (D) tem o sentido das concavidades incompatíveis com a variação do sinal da segunda derivada.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2001, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

49. Como o gráfico da função  $g$  tem um ponto de inflexão de abscissa 1, a segunda derivada tem um zero em  $x = 1$  e uma mudança de sinal associada.

Analisando os gráficos das opções apresentadas, temos que nas opções (C) e (D)  $x = 1$  não é um zero; e na opção (A)  $x = 1$  é um zero, mas não está associado a uma mudança de sinal.

Resposta: **Opção B**

Exame – 2000, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 435)




50. Determinando a expressão da segunda derivada, vem:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = (e^x(x^2+3x+1))' = (e^x)'(x^2+3x+1) + e^x(x^2+3x+1)' = e^x(x^2+3x+1) + e^x(2x+3+0) = \\ &= x^2e^x + 3xe^x + e^x + 2xe^x + 3e^x = x^2e^x + 5xe^x + 4e^x = e^x(x^2 + 5x + 4) \end{aligned}$$

Determinando os zeros da segunda derivada, temos:

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow e^x(x^2 + 5x + 4) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{Eq. Imp., } e^x > 0} \vee x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(4)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = -1 \end{aligned}$$

Assim, estudando a variação de sinal de  $f''$  e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de  $f$ , vem:

$x$	$-\infty$	-4		-1	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		Pt. I.		Pt. I.	

Logo, podemos concluir que o gráfico de  $f$ :

- tem dois pontos de inflexão (de abscissas  $x = -4$  e  $x = -1$ )
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo  $]-\infty, -4[$  e no intervalo  $]-1, +\infty[$
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo  $]-4, -1[$

Exame – 2000, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)



51. Como  $g''(x) > 0$ , a concavidade do gráfico de  $g$  está voltada para cima, ou seja o gráfico da opção (C) é o único que não tem a concavidade voltada para baixo em nenhum intervalo.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2000, Prova modelo (cód. 435)



52. Determinando a expressão da segunda derivada, vem:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = \left(\frac{1 + \ln x}{x}\right)' = \frac{(1 + \ln x)'x - (1 + \ln x)(x)'}{x^2} = \frac{\left(0 + \frac{1}{x}\right)x - (1 + \ln x) \times 1}{x^2} = \\ &= \frac{\frac{x}{x} - 1 - \ln x}{x^2} \underset{x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x \neq 0}{=} \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2} \end{aligned}$$

Determinando os zeros da segunda derivada, temos:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow -\ln x = 0 \wedge \underbrace{x^2 \neq 0}_{\text{PV}, x \in \mathbb{R}^+} \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 \Leftrightarrow x = 1$$

Assim, estudando a variação de sinal de  $f''$  e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de  $f$ , vem:

$x$	0		1	$+\infty$
$f''(x)$	n.d.	+	0	-
$f(x)$	n.d.		Pt. I.	

Logo, podemos concluir que o gráfico de  $f$ :

- tem um único ponto de inflexão (de abscissa  $x = 1$ )
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo  $]0,1[$
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo  $]1, +\infty[$

Exame – 1998, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 135)

