



1. Como o gráfico de  $f$ , admite uma assíntota oblíqua quando  $x \rightarrow +\infty$ , podemos determinar o declive da assíntota:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 - e^{-x}) + x + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(2 - e^{-x})}{x} + \frac{x}{x} + \frac{2}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \times \ln(2 - e^{-x}) + 1 + \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2 - e^{-x})) + \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \\ &= \frac{1}{+\infty} \times \ln(2 - e^{-\infty}) + 1 + \frac{2}{+\infty} = 0 \times \ln(2 - 1) + 1 + 0 = 0 \times \ln 1 + 1 = 0 \times 0 + 1 = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Calculando o valor da ordenada na origem, temos que:

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2 - e^{-x}) + x + 2 - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2 - e^{-x}) + 2) = \ln(2 - e^{-\infty}) + 2 = \ln(2 - e^0) + 2 = \ln(2 + 0) + 2 = \ln 2 + 2 \end{aligned}$$

Desta forma a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de  $h$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , é:

$$y = 1 \times x + \ln 2 + 2 \Leftrightarrow y = x + \ln 2 + 2$$

Exame – 2023, Ép. especial

2. Como a função é contínua em  $]0, +\infty[$  (porque resulta de operações entre funções contínuas), a reta de equação  $x = 0$  é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de  $f$ , o que pode ser confirmado porque:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x + 2x}{x} = \frac{\ln(0^+) + 2(0^+)}{0^+} = \frac{-\infty + 0}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Para determinar a equação da assíntota horizontal, ou seja, como o domínio de  $f$  é  $]0, +\infty[$ , vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 2x}{x} = \frac{\ln(+\infty) + 2(+\infty)}{+\infty} = \frac{+\infty + \infty}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ (indeterminação)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x} + \frac{2x}{x} \right) = \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 0 + 2 = 2 \text{ Logo, podemos concluir que a}$$

reta de equação  $y = 2$  é a única assíntota horizontal do gráfico de  $f$ .

Exame – 2023, 2.ª Fase

3. Determinando a equação da assíntota horizontal do gráfico de  $g$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^x) - x) = \ln(1 + e^{+\infty}) - \infty = +\infty - \infty \text{ (Indeterminação)} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^x) - \ln e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1 + e^x}{e^x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{1}{e^x} + \frac{e^x}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{1}{e^x} + 1 \right) = \ln \left( \frac{1}{e^{+\infty}} + 1 \right) = \ln(0 + 1) = \ln 1 = 0\end{aligned}$$

Logo a reta definida por  $y = 0$  é uma assíntota do gráfico de  $g$ , quando  $x \rightarrow +\infty$

Determinando o declive da assíntota oblíqua do gráfico de  $g$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ , temos:

$$\begin{aligned}m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^x) - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\ln(1 + e^x)}{x} - \frac{x}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\ln(1 + e^x)}{x} - 1 \right) = \frac{\ln(1 + e^{-\infty})}{-\infty} - 1 = \frac{\ln(1 + 0^+)}{-\infty} - 1 = \frac{0^+}{-\infty} - 1 = 0^- - 1 = -1\end{aligned}$$

Calculando o valor da ordenada na origem, temos que:

$$\begin{aligned}b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(1 + e^x) - x - (-1)x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(1 + e^x) - x + x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^x) = \ln(1 + e^{-\infty}) = \ln(1 + 0) = \ln 1 = 0\end{aligned}$$

Desta forma a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de  $g$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ , é:

$$y = -1 \times x + 0 \Leftrightarrow y = -x$$

Exame – 2022, Ép. especial



4. Como a função é contínua em  $]0, +\infty[$  (porque é o quociente de funções contínuas), a reta de equação  $x = 0$  é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de  $h$ , paralela ao eixo  $Oy$ . Para averiguar esta hipótese vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + \ln x}{e^x - 1} = \frac{e^{0^+} + \ln 0^+}{e^{0^+} - 1} = \frac{1^+ - \infty}{1^+ - 1} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Logo a reta de equação  $x = 0$  é a única assíntota do gráfico de  $h$  paralela ao eixo das ordenadas.

Para averiguar a existência de assíntotas horizontais, ou seja, paralelas ao eixo  $Ox$ , como o domínio de  $h$  é  $]0, +\infty[$ , vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \ln x}{e^x - 1} = \frac{e^{+\infty} + \ln(+\infty)}{e^{+\infty} - 1} = \frac{+\infty + \infty}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ (indeterminação)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \ln x}{e^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x + \ln x}{e^x}}{\frac{e^x - 1}{e^x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{e^x} + \frac{\ln x}{e^x} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{\ln x}{e^x} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{e^x} \right)} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x}} = \frac{1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^{+\infty}}} = \frac{1 + \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x}}_{\text{Lim. Notável}}}{1 - \frac{1}{+\infty}} = \frac{1 + \frac{0}{+\infty}}{1 - 0} = \frac{1 + 0}{1} = 1 \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que a reta de equação  $y = 1$  é a única assíntota horizontal, ou seja, paralela ao eixo das abcissas, do gráfico de  $h$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ .

Exame – 2022, 2.<sup>a</sup> Fase



5. Como a função  $g$  é contínua (porque resulta da diferença e do produto de funções contínuas em  $]1, +\infty[$ ), então a reta de equação  $x = 1$  é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de  $g$ . Para averiguar esta hipótese vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (5x - 3 \ln(x - 1)) = 5 \times 1^+ - 3 \ln(1^+ - 1) = 5 + 3 \ln(0^+) = 5 - 3 \times (-\infty) = +\infty$$

Assim, como  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty$ , podemos concluir a reta de equação  $x = 1$  é a única assíntota vertical do gráfico de  $g$ .

Como o domínio da função é  $]1, +\infty[$ , só poderá existir uma assíntota oblíqua quando  $x \rightarrow +\infty$ . Desta forma, vamos averiguar a existência de uma assíntota de equação  $y = mx + b$ :

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 3 \ln(x - 1)}{x} = \underbrace{\frac{+\infty - \infty}{+\infty}}_{\text{Indeterminação}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5x}{x} - 3 \times \frac{\ln(x - 1)}{x} \times \frac{x - 1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 5 - 3 \times \frac{\ln(x - 1)}{(x - 1)} \times \frac{x - 1}{x} \right) =$$

(fazendo  $y = x - 1$ , temos  $x = y + 1$ ; e se  $x \rightarrow +\infty$ , então  $y \rightarrow +\infty$ )

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 - 3 \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{y + 1} = 5 - 3 \times 0 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{y} = 5 - 3 \times 0 \times 1 = 5$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 5x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - 3 \ln x - 5x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3 \ln x) = -3 \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = -3 \times (+\infty) = -\infty$$

Assim, como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - mx)$  não é um valor finito, não existe qualquer assíntota oblíqua do gráfico de  $g$ .

Exame – 2022, 1.ª Fase

6. Como o domínio da função é  $\mathbb{R}$ , podem existir assíntotas horizontais do gráfico de  $f$  quando  $x \rightarrow -\infty$  e quando  $x \rightarrow +\infty$ :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{e^{x-2}} = \frac{+\infty - 1}{e^{+\infty-2}} = \frac{+\infty}{e^{+\infty}} = \frac{+\infty}{+\infty}$  (Indeterminação)

(fazendo  $y = x - 2$ , temos  $x = y + 2$  e se  $x \rightarrow -\infty$ , então  $y \rightarrow +\infty$ )

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y + 2 - 1}{e^y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y + 1}{e^y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{y}{e^y} + \frac{1}{e^y} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y}} + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^y} = \frac{\lim_{y \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}} + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^y} = \frac{1}{+\infty} + \frac{1}{+\infty} = 0 + 0 = 0$$

Lim. Notável

Desta forma temos que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$  e que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , pelo que as retas de equações  $y = 1$  e  $y = 0$  são assíntotas horizontais do gráfico de  $f$ , para  $x \rightarrow -\infty$  e para  $x \rightarrow +\infty$ , respetivamente.

Exame – 2021, Ép. especial



7. Como o domínio da função é  $\mathbb{R}$ , podem existir assíntotas horizontais do gráfico de  $f$  quando  $x \rightarrow -\infty$  e quando  $x \rightarrow +\infty$ :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - e^{-x}}{x} = \frac{-\infty - e^{-(-\infty)}}{-\infty} = \frac{-\infty - e^{+\infty}}{-\infty} = \frac{-\infty - \infty}{-\infty} = \frac{-\infty - \infty}{-\infty} = \frac{-\infty}{-\infty} \text{ (Indeterminação)}$$

(fazendo  $y = -x$ , temos  $x = -y$  e se  $x \rightarrow -\infty$ , então  $y \rightarrow +\infty$ )

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-y - e^{-(-y)}}{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-y - e^y}{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y + e^y}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{y}{y} + \frac{e^y}{y} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{y} + \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 1 + (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} - 3 \right) = \frac{\sqrt{(+\infty)^2 + 1}}{+\infty + 1} - 3 = \frac{\sqrt{+\infty}}{+\infty} - 3 = \frac{+\infty}{+\infty} - 3 \text{ (Indeterminação)}$$

(Como  $x \rightarrow +\infty$  então  $x > 0$  e assim, temos que  $\sqrt{x^2} = x$ )

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} - 3 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} - 3 = -3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)}}{x \left( 1 + \frac{1}{x} \right)} = \\ &= -3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left( 1 + \frac{1}{x} \right)} = -3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left( 1 + \frac{1}{x} \right)} = -3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} = \\ &= -3 + \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{(+\infty)^2}}}{1 + \frac{1}{+\infty}} = -3 + \frac{\sqrt{1 + 0}}{1 + 0} = -3 + 1 = -2 \end{aligned}$$

Desta forma temos que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  e que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ , pelo que não existe assíntota horizontal do gráfico de  $f$  quando  $x \rightarrow -\infty$  e  $y = -2$  é a única assíntota horizontal do gráfico de  $f$ , observada quando  $x \rightarrow +\infty$

Exame – 2021, 2.ª Fase



8. Como o domínio da função é  $\mathbb{R}^+$ , começamos por determinar o declive da assíntota oblíqua do gráfico de  $h$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ :

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^2 - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^2)}{x(2x^2 - \ln x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2 - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{2x^2 - \ln x}{x^2}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \right)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 - \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x} \right)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = \frac{1}{2 - 0 \times 0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Calculando o valor da ordenada na origem, temos que:

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( h(x) - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( h(x) - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3}{2x^2 - \ln x} - \frac{x}{2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x(2x^2 - \ln x)}{2(2x^2 - \ln x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 2x^3 + x \ln x}{4x^2 - 2 \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{4x^2 - 2 \ln x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{4x^2 - 2 \ln x}{x \ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{4x^2}{x \ln x} - \frac{2 \ln x}{x \ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{4x}{\ln x} - \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x}}{4x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4} \times \frac{\ln x}{x}} - \frac{2}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4} \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4} \times 0} - \frac{2}{+\infty}} = \frac{1}{\frac{1}{0} - 0} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

Desta forma a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de  $h$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , é:

$$y = \frac{1}{2}x + 0 \Leftrightarrow y = \frac{x}{2}$$



9. Como o domínio da função é  $] - \infty, 4]$ , a assíntota horizontal do gráfico de  $h$  é determinada quando  $x \rightarrow -\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + xe^{x-1}) = 1 - \infty \times e^{-\infty-1} = 1 - \infty \times 0 \text{ (Indeterminação)}$$

(fazendo  $y = -x$ , temos  $x = -y$  e se  $x \rightarrow -\infty$ , então  $y \rightarrow +\infty$ )

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} (1 + (-y)e^{-y-1}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} (1 - ye^{-(y+1)}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{y}{e^{y+1}}\right) =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{y}{e^y \times e}\right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{e} \times \frac{y}{e^y}\right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{e} \times \frac{1}{\frac{e^y}{y}}\right) =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y}}}_{\text{Lim. Notável}} = 1 - \frac{1}{e} \times \frac{1}{+\infty} = 1 - \frac{1}{e} \times 0 = 1$$

Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 1$ , a reta de equação  $y = 1$  também é assíntota horizontal do gráfico de  $h$

Exame – 2020, 2.ª Fase

10. Como a função está definida em  $] - \infty, 2]$ , começamos por determinar o declive da assíntota oblíqua do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ :

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \ln(e^x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x}{x} + \frac{\ln(e^x + 1)}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{\ln(e^x + 1)}{x} \right) = 1 + \frac{\ln(e^{-\infty} + 1)}{-\infty} = 1 + \frac{\ln(0^+ + 1)}{-\infty} = 1 + \frac{0^+}{-\infty} = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

Calculando o valor da ordenada na origem, temos que:

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln(e^x + 1) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x + 1)) = \\ &= \ln(e^{-\infty} + 1) = \ln(0^+ + 1) = \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

Desta forma a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de  $f$  é:

$$y = x + 0 \Leftrightarrow y = x$$

Exame – 2020, 1.ª Fase



11. Começamos por determinar o declive da assíntota oblíqua do gráfico de  $g$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ :

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3x}{1-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3x}{x(1-e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1-3x}{x} \times \frac{1}{1-e^{-x}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3x}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} - \frac{3x}{x} \right) \times \frac{1}{1-e^{-(+\infty)}} = \\ &= \left( \frac{1}{+\infty} - 3 \right) \times \frac{1}{1-e^{-\infty}} = (0-3) \times \frac{1}{1-0} = -3 \times 1 = -3 \end{aligned}$$

Calculando o valor da ordenada na origem, temos que:

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - (-3)x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1-3x}{1-e^{-x}} + 3x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1-3x}{1-e^{-x}} + \frac{3x(1-e^{-x})}{1-e^{-x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3x+3x-3xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3x \times \frac{1}{e^x}}{1-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{3x}{e^x}}{1-e^{-x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{3x}{e^x} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-e^{-x})} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{e^x}}{1-e^{-(+\infty)}} = \\ &= \frac{1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\frac{e^x}{x}}}{1-e^{-\infty}} = \frac{1 - \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}}}{1-0} = \frac{1 - \frac{3}{+\infty}}{1} = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

Desta forma a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de  $g$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , é:

$$y = -3x + 1$$

Exame – 2019, Ép. especial





12. Como a função é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  (porque é o quociente de funções contínuas), a reta de equação  $x = 1$  é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de  $h$ . Para averiguar esta hipótese vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$ :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^{1^-}}{1^- - 1} = \frac{e}{0^-} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^{1^+}}{1^+ - 1} = \frac{e}{0^+} = +\infty$$

Logo a reta de equação  $x = 1$  é a única assíntota do gráfico de  $h$  paralela ao eixo das ordenadas.

Para averiguar a existência de assíntotas horizontais, vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^{-\infty}}{-\infty - 1} = \frac{0^+}{-\infty} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^{+\infty}}{+\infty - 1} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ (indeterminação)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{+\infty}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{+\infty}{1 - \frac{1}{+\infty}} = \frac{+\infty}{1 - 0} = +\infty$$

Logo, podemos concluir que a reta de equação  $y = 0$  é assíntota horizontal do gráfico de  $h$ , quando  $x \rightarrow -\infty$  e que não existe qualquer assíntota do gráfico de  $h$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , pelo que a reta  $y = 0$  é a única assíntota do gráfico de  $h$  paralela ao eixo das abcissas.

Exame – 2019, 2.ª Fase

13. Como a função  $h$  tem domínio  $\mathbb{R}^+$ , o e o respetivo gráfico tem uma assíntota oblíqua, o seu declive  $m$ , é o valor de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Assim, calculando o valor do declive, temos:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^{-x}}{x} + 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^{-x}}{x} + \frac{2x}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^{-x}}{x^2} + 2 - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) = \frac{e^{-(+\infty)}}{+\infty} + 2 - \frac{1}{+\infty \times +\infty} = \frac{0^+}{+\infty} + 2 - \frac{1}{+\infty} = 0 + 2 - 0 = 2$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2019, 1.ª Fase



14. Como a função  $h$  é contínua (é contínua no intervalo  $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right[$  porque resulta do quociente e do produto de funções contínuas, é contínua em  $x = 0$ , e é contínua no intervalo  $[0, +\infty[$  porque é o quociente de funções contínuas), então o gráfico de  $h$  não admite qualquer assíntota vertical.

Como o domínio da função é  $\left[-\frac{\pi}{3}, +\infty\right[$ , só poderá existir uma assíntota oblíqua quando  $x \rightarrow +\infty$ . Desta forma, vamos averiguar a existência de uma assíntota de equação  $y = mx + b$ :

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = +\infty \times \frac{1}{1 + \frac{1}{+\infty}} = +\infty \times \frac{1}{1+0} = +\infty \times 1 = +\infty \end{aligned}$$

Assim, como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x}$  não é um valor finito, não existe qualquer assíntota oblíqua do gráfico de  $h$ .

Exame – 2018, Ép. especial

15. Para averiguar a existência de assíntotas horizontais vamos calcular o limite da função quando  $x \rightarrow -\infty$  e quando  $x \rightarrow +\infty$ :

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{e^x}{1-x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1-x} = 3 + \frac{e^{-\infty}}{1 - (-\infty)} = \\ &= 3 + \frac{0^+}{1 + \infty} = 3 + \frac{0^+}{+\infty} = 3 + 0 = 3 \end{aligned}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ , a reta de equação  $y = 3$  é assíntota horizontal do gráfico de  $f$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2) + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2}{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \times \frac{\ln x}{x}\right) + 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , a reta de equação  $y = 0$  também é assíntota horizontal do gráfico de  $f$

Exame – 2018, 2.ª Fase

16. Como a função é contínua em  $\mathbb{R}^+$ , a reta de equação  $x = 0$  é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de  $f$ . Para averiguar esta hipótese vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 0^+}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Assim, como  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ , podemos concluir a reta de equação  $x = 0$  é a única assíntota vertical do gráfico de  $f$ , ou seja, paralela ao eixo das ordenadas.

Como o domínio da função é  $\mathbb{R}^+$ , para averiguar a existência de assíntotas paralelas ao eixo das abcissas, vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 0$$

Logo, podemos concluir que a reta de equação  $y = 0$  é assíntota horizontal do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , e que é a única assíntota do gráfico de  $f$  paralela ao eixo das abcissas.

Exame – 2017, 2.ª Fase



17. Como o declive da assíntota do gráfico de  $f$  é  $-1$ , e o domínio de  $f$  é  $\mathbb{R}^+$ , temos que:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

Como  $y = -x$  é assíntota do gráfico de  $g$ , e o domínio de  $g$  é  $\mathbb{R}^+$ , temos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$

E assim, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \times g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x} \times g(x) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1 \times (-\infty) = +\infty$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2017, 1.ª Fase

18. Calculando o valor do limite, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x + x) - x) = \ln(e^{+\infty} + \infty) - \infty = +\infty - \infty \quad (\text{Indeterminação}) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x \times (1 + \frac{x}{e^x})) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x) + \ln(1 + \frac{x}{e^x}) - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln(1 + \frac{x}{e^x}) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + \frac{x}{e^x}) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{e^x})\right) = \\ &= \ln\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}\right) = \ln\left(1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}}\right) = \ln\left(1 + \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}}}_{\text{Lim. Notável}}\right) = \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{+\infty}\right) = \ln(1 + 0) = 0 \end{aligned}$$

Assim, como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ , podemos concluir que a reta de equação  $y = x$  é uma assíntota do gráfico da função  $f$ , quando  $x \rightarrow +\infty$

Exame – 2016, Ép. especial

19. Como o domínio da função é  $]-\frac{\pi}{2}, +\infty[$ , só poderá existir uma assíntota oblíqua quando  $x \rightarrow +\infty$ . Assim, vamos averiguar a existência de uma assíntota de equação  $y = mx + b$ :

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{\ln x}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = -(+\infty) = -\infty \end{aligned}$$

Assim, como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$  não é um valor finito, não existe qualquer assíntota oblíqua do gráfico de  $f$ .

Exame – 2016, 2.ª Fase



20. Simplificando a expressão dada, temos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + e^x - x}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{f(x)}{x} + \frac{e^x}{x} - \frac{x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} + \frac{0^+}{-\infty} - \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} + 0 - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} - 1\end{aligned}$$

Pelo que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + e^x - x}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} - 1 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 + 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

Como o domínio da função é  $\mathbb{R}^-$ , então o declive da assíntota do gráfico de  $f$ , é:  $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2016, 1.ª Fase

21. Como  $f$  é uma função contínua em  $] - \infty, -1[$  e em  $]1, +\infty[$  (porque resulta de operações entre funções contínuas neste domínio), então as retas definidas pelas equações  $x = -1$  e  $x = 1$  são as únicas retas verticais que podem ser assíntotas do gráfico de  $f$ .

Para averiguar se estas retas são assíntotas do gráfico de  $f$ , de acordo com o domínio da função, vamos calcular:

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left( \ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right) \right) = \ln \left( \frac{-1^- - 1}{-1^- + 1} \right) = \ln \left( \frac{-2}{0^-} \right) = \ln(+\infty) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right) \right) = \ln \left( \frac{1^+ - 1}{1^+ + 1} \right) = \ln \left( \frac{0^+}{2} \right) = \ln(0^+) = -\infty$

Como ambos os limites são infinitos, as duas retas são assíntotas do gráfico de  $f$  e não existem outras assíntotas verticais.

Exame – 2016, 1.ª Fase

22. Como o domínio da função é  $\mathbb{R}_0^+$ , a eventual existência de uma assíntota horizontal será quando  $x \rightarrow +\infty$ :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{1-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^2 \times \frac{e^1}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( e \times \frac{x^2}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \\ &= e \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = e \times \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{\underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}}_{\text{Lim. Notável}}} = e \times \frac{1}{+\infty} = e \times 0 = 0\end{aligned}$$

Logo, como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , podemos concluir que a reta de equação  $y = 0$  é assíntota horizontal do gráfico de  $f$

Exame – 2015, Ép. especial



23. Averiguando a existência de uma assíntota horizontal quando  $x \rightarrow -\infty$ , vem

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + xe^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 1 + (-\infty \times e^{-\infty}) = 1 + \underbrace{(-\infty \times 0^+)}_{\text{Indeterminação}}$$

(fazendo  $y = -x$ , temos  $x = -y$ ; e se  $x \rightarrow -\infty$ , então  $y \rightarrow +\infty$ )

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} (-ye^{-y}) = 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(-y \times \frac{1}{e^y}\right) = 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{e^y}\right) = \\ &= 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{1}{e^y}}{\frac{1}{y}}\right) = 1 - \frac{1}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

Logo, como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ , podemos concluir que a reta de equação  $y = 1$  é assíntota horizontal do gráfico de  $f$

Averiguando agora a existência de uma assíntota horizontal quando  $x \rightarrow +\infty$ , vem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x-3) - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x-3}{x}\right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x}\right) = \\ &= \ln \left(\frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-3)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} x}\right) = \ln \left(\frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} x}\right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x}\right) = \ln(1) = 0 \end{aligned}$$

Logo, como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , podemos concluir que a reta de equação  $y = 0$  também é assíntota horizontal do gráfico de  $f$

Exame – 2015, 2.ª Fase

24. Como  $f$  é uma função contínua em  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$  (porque ambos os ramos resultam de operações entre funções nos respectivos domínios em que estão definidos), então  $x = \frac{1}{2}$  é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de  $f$

Para averiguar se a reta de equação  $x = \frac{1}{2}$  é assíntota do gráfico de  $f$ , vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$  e

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x):$$

- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} ((x+1) \ln x) = \left(\frac{1}{2} + 1\right) \ln \frac{1}{2} = \frac{3}{2} (\ln 1 - \ln 2) = -\frac{3 \ln 2}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1} = \frac{e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}}}{2\left(\frac{1}{2}\right) - 1} = \frac{0}{1 - 1} = \frac{0}{0}$  (indeterminação)

(fazendo  $y = x - \frac{1}{2}$ , temos  $x = y + \frac{1}{2}$ ; e se  $x \rightarrow \frac{1}{2}^-$ , então  $y \rightarrow 0^-$ )

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^{y+\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}}}{2(y)} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y \times e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}}}{2y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{2}}(e^y - 1)}{2y} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \times \frac{e^y - 1}{y}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{e}}{2} \end{aligned}$$

Assim, como  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x)$ , são ambos números reais, concluímos que a reta de equação  $x = \frac{1}{2}$  não é assíntota vertical do gráfico de  $f$  (e que não existe qualquer outra assíntota vertical).

25. Como  $D_f = ] - \infty, e[$ , se existir uma assíntota horizontal,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  é constante.

Assim, calculando o limite temos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{x-2}) = -\infty \times xe^{-\infty-2} = -\infty \times 0 \text{ (indeterminação)}$$

(Seja  $y = -x$ , temos que se  $x \rightarrow -\infty$ , então  $y \rightarrow +\infty$ )

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} (-ye^{-y-2}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} (-y \times e^{-y} \times e^{-2}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( -y \times \frac{1}{e^y} \times e^{-2} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( -\frac{y}{e^y} \right) \times \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-2} = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} \times e^{-2} = -e^{-2} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = -e^{-2} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\frac{e^y}{y}} \right) = \\ &= -e^{-2} \times \frac{1}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = -e^{-2} \times \frac{1}{+\infty} = -e^{-2} \times 0 = 0 \end{aligned}$$

Logo, como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  e  $D_f = ] - \infty, e[$ , podemos concluir que a única assíntota horizontal do gráfico de  $f$  é a reta de equação  $y = 0$

Exame – 2014, Ép. especial

26. Como a reta de equação  $y = 2x - 5$  é assíntota do gráfico de  $f$  e  $D_f = \mathbb{R}^+$ , sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x - 1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{6x - 1}{x}}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x - 1}{x}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{6x}{x} - \frac{1}{x} \right)}{2} = \frac{6 - 0}{2} = 3$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2014, Ép. especial



27. Como a função  $f$  resulta de operações entre funções contínuas, é contínua no seu domínio, e como o seu domínio é  $] -\infty, 0[$ , então a única reta que pode ser assíntota vertical do gráfico de  $f$  é a reta de equação  $x = 0$

Para averiguar se a reta de equação  $x = 0$  é assíntota do gráfico de  $f$ , vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x - \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(-x)}{x} = \\ &= 0 - 1 + \frac{\ln(-0^-)}{0^-} = -1 + \frac{\ln(0^+)}{0^-} = -1 + \frac{-\infty}{0^-} = -1 + \infty = +\infty\end{aligned}$$

Assim, como  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ , concluímos que a reta de equação  $x = 0$  é assíntota vertical do gráfico de  $f$  (e que não existe qualquer outra assíntota vertical).

Relativamente à existência de assíntotas não verticais, como o domínio de  $f$  é  $] -\infty, 0[$ , só poderão existir quando  $x \rightarrow -\infty$ . Assim, vamos averiguar a existência de uma assíntota de equação  $y = mx + b$ :

$$\begin{aligned}m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x}{x} - \frac{1}{x} + \frac{\ln(-x)}{x^2} \right) = \\ &= 1 + 0 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x^2} = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x^2} = 1 - 0 + \frac{+\infty}{+\infty} \quad (\text{Indeterminação})\end{aligned}$$

(fazendo  $y = -x$ , temos  $x = -y$  e se  $x \rightarrow -\infty$ , então  $y \rightarrow +\infty$ )

$$\begin{aligned}m &= 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x^2} = 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(-(-y))}{(-y)^2} = 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y^2} = 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{y} \times \frac{\ln(y)}{y} \right) = \\ &= 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 1 + \frac{1}{+\infty} \times 0 = 1 + 0 \times 0 = 1\end{aligned}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 1 \times x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -1 + \frac{\ln(-x)}{x} \right) =$$

(fazendo  $y = -x$ , temos  $x = -y$  e se  $x \rightarrow -\infty$ , então  $y \rightarrow +\infty$ )

$$b = -1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x} = -1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(-(-y))}{-y} = -1 - \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -1 - 0 = -1$$

Assim temos que a reta de equação  $y = x - 1$  é uma assíntota do gráfico de  $f$  (e não existem outras assíntotas não verticais).

Exame - 2014, 2.ª Fase

28. Como o gráfico da função  $f$  tem uma assíntota oblíqua quando  $x$  tende para  $+\infty$ , de equação  $y = x + b$ , ou seja uma reta de declive 1, temos que

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

E assim, calculando o valor de  $b$ , vem que:

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2e^x - e^4) - x) = +\infty - \infty \quad (\text{Indeterminação})$$

$$\begin{aligned}b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2e^x - e^4) - x) = \lim_{x = \ln e^x} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2e^x - e^4) - \ln e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln \frac{2e^x - e^4}{e^x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln \left( \frac{2e^x}{e^x} - \frac{e^4}{e^x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln \left( 2 - \frac{e^4}{e^x} \right) \right) = \ln \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 - \frac{e^4}{e^x} \right) \right) = \\ &= \ln \left( 2 - \frac{e^4}{e^{+\infty}} \right) = \ln(2 - 0) = \ln 2\end{aligned}$$

Exame - 2014, 1.ª Fase



29. Como a função, em ambos os ramos, resulta de operações e composições de funções contínuas em  $\mathbb{R}^-$  e em  $\mathbb{R}^+$ , a função é contínua em  $\mathbb{R}^-$  e em  $\mathbb{R}^+$ , pelo que a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de  $f$  é a reta  $x = 0$

Averiguando que  $x = 0$  é assíntota do gráfico de  $f$ , temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x + 1 + e^{-x}) = 2 \times 0 + 1 + e^{-0} = 0 + 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{3x + \ln x}{x} \right) = \frac{3 \times 0^+ + \ln 0^+}{0^+} = \frac{0 + (-\infty)}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Pelo que, apesar de  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  não ser infinito, como  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  podemos afirmar que  $x = 0$  é assíntota do gráfico de  $f$

Para mostrar que existe uma assíntota horizontal do gráfico de  $f$  quando  $x \rightarrow +\infty$ , temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3 + \frac{\ln x}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 3 + 0 = 3 \end{aligned}$$

Logo podemos afirmar que  $y = 3$  é uma assíntota horizontal do gráfico de  $f$  quando  $x \rightarrow +\infty$

Para mostrar não existe assíntota não vertical do gráfico de  $f$  quando  $x \rightarrow -\infty$ , ou seja uma reta de equação  $y = mx + b$ , vem

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1 + e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2 + \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 2 + \frac{1}{-\infty} + \frac{e^{-(-\infty)}}{-\infty} = 2 + 0 + \frac{+\infty}{-\infty} \text{ (indeterminação)} \end{aligned}$$

Fazendo  $y = -x$ , vem que  $x = -y$  e se  $x \rightarrow -\infty$  então  $y \rightarrow +\infty$

$$= 2 + 0 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 2 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{-y} = 2 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( -\frac{e^y}{y} \right) = 2 - \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 - (+\infty) = -\infty$$

E assim, como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$  podemos concluir que não existe assíntota não vertical do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow -\infty$

Teste Intermédio 12.º ano – 30.04.2014

30. Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 2x] = 2$ , temos que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-2x)] = 2$ , o que significa que a reta de equação  $y = -2x + 2$  é assíntota do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow -\infty$   
O único gráfico que admite a reta  $y = -2x + 2$  como assíntota é o da opção (A).

Resposta: **Opção A**

Exame – 2013, Ép. especial





31. Como  $y = 2x - 1$  é assíntota do gráfico de  $g$ , e o domínio da função  $g$  é  $\mathbb{R}^+$ , temos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$ .  
Como o domínio da função  $h$  é  $\mathbb{R}^+$ , vamos calcular o valor de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - [g(x)]^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{[g(x)]^2}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[g(x)]^2}{x^2} = \\ &= \frac{1}{+\infty} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( \frac{g(x)}{x} \right)^2 \right] = 0 - \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} \right)^2 = -2^2 = -4 \end{aligned}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -4$ , o gráfico de  $h$  tem uma assíntota horizontal.

Exame – 2013, Ép. especial

32. Para mostrar que o gráfico da função  $f$  admite uma assíntota oblíqua de equação  $y = mx + b$ , quando  $x$  tende para  $-\infty$ , temos:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^{3+x} + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{xe^{3+x}}{x} + \frac{2x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{3+x} + 2) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3+x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = e^{3+(-\infty)} + 2 = e^{-\infty} + 2 = 0^+ + 2 = 2 \\ b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{3+x} + 2x - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{3+x}) = -\infty \times e^{3+(-\infty)} = \\ &= -\infty \times e^{-\infty} + 2 = -\infty \times 0^+ (\text{indeterminação}) \end{aligned}$$

(fazendo  $y = -x$ , temos  $x = -y$  e se  $x \rightarrow -\infty$ , então  $y \rightarrow +\infty$ )

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{3+x}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} (-ye^{3-y}) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} (ye^{3-y}) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( y \times \frac{e^3}{e^y} \right) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( e^3 \times \frac{y}{e^y} \right) = \\ &= - \lim_{y \rightarrow +\infty} e^3 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = -e^3 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y}} = -e^3 \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y}}}_{\text{Lim. Notável}} = -e^3 \times \frac{1}{+\infty} = -e^3 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

Assim temos que a reta de equação  $y = 2x$  é uma assíntota do gráfico de  $f$  quando  $x$  tende para  $-\infty$

Exame – 2013, 2.ª Fase

33. Como sabemos que  $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ , em que  $m$  é o declive de uma assíntota do gráfico de  $f$ , vem que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + f(x)}{3x} = 1 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{3x} + \frac{f(x)}{3x} \right) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{3x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{3x} = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3} \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} + \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow 0 + \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \end{aligned}$$

Logo uma assíntota do gráfico de  $f$ , se existir, é uma reta de declive 3, pelo que a única equação, de entre as hipóteses apresentadas, que pode definir uma assíntota do gráfico da função  $f$  é  $y = 3x$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2013, 1.ª Fase



34. Como a função, em ambos os ramos, resulta de operações e composições de funções contínuas em  $\mathbb{R}^-$  e em  $\mathbb{R}^+$ , a função é contínua em  $\mathbb{R}^-$  e em  $\mathbb{R}^+$ , pelo que a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de  $f$  é a reta  $x = 0$

Averiguando se  $x = 0$  é assíntota do gráfico de  $f$ , temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0^+ \times \ln(0^+) = 0^+ \times (-\infty) \text{ (indeterminação)}$$

(fazendo  $y = \frac{1}{x}$ , temos  $x = \frac{1}{y}$  e se  $x \rightarrow 0^+$ , então  $y \rightarrow +\infty$ )

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{y} \times \ln \frac{1}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{y} \times (\ln 1 - \ln y) \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{y} \times (-\ln y) \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( -\frac{\ln y}{y} \right) = - \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 0 \end{aligned}$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{e^{4x} - 1} = \frac{e^0 - 1}{e^0 - 1} = \frac{0}{0} \text{ (indeterminação)} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{e^{4x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{e^x - 1}{e^{4x} - 1} \times \frac{x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{x}{e^{4x} - 1} \right) = \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^{4x} - 1} = 1 \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{4} \times \frac{4 \times x}{e^{4x} - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{4} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x}{e^{4x} - 1} = \\ &= \frac{1}{4} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{\frac{e^{4x} - 1}{4x}} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} 1}{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{4x} - 1}{4x}} = \frac{1}{4 \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{4x} - 1}{4x}} = \end{aligned}$$

(fazendo  $y = 4x$ , temos que se  $x \rightarrow 0^-$ , então também  $y \rightarrow 0^-$ )

$$= \frac{1}{4 \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{1}{4 \times 1} = \frac{1}{4}$$

E assim, como todos os limites calculados existem e têm um valor real (finito), podemos concluir que a função  $f$  não tem qualquer assíntota vertical.

Exame – 2013, 1.ª Fase



35. Para mostrar que o gráfico da função  $f$  admite uma assíntota oblíqua de equação  $y = mx + b$ , quando  $x$  tende para  $-\infty$ , temos:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 1 - xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x}{x} + \frac{1}{x} - \frac{xe^x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 3 + \frac{1}{x} - e^x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 3 + 0^- - 0^+ = 3$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + 1 - xe^x - 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - xe^x) = 1 - \infty \times e^{-\infty} = \underbrace{-\infty \times 0^+}_{\text{Indeterminação}}$$

(fazendo  $y = -x$ , temos  $x = -y$  e se  $x \rightarrow -\infty$ , então  $y \rightarrow +\infty$ )

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - xe^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} (-ye^{-y}) = 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( -y \times \frac{1}{e^y} \right) =$$

$$= 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( -\frac{y}{e^y} \right) = 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{y}{e^y} \right) = 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y}} = 1 + \frac{\lim_{y \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}} = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1 + 0 = 1$$

Lim. Notável

Assim temos que a reta de equação  $y = 3x + 1$  é uma assíntota do gráfico de  $f$  quando  $x$  tende para  $-\infty$

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2013

36. Para mostrar que o gráfico da restrição da função  $f$  ao intervalo  $] -\infty, 4]$  tem uma assíntota horizontal de equação  $y = k$ , quando  $x$  tende para  $-\infty$ , temos:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 3}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{3(-\infty) + 3}{\sqrt{(-\infty)^2 + 9}} = \frac{-\infty}{+\infty} \text{ (indeterminação)}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 3}{\sqrt{x^2 + 9}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 3}{\sqrt{x^2 \left( 1 + \frac{9}{x^2} \right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left( 3 + \frac{3}{x} \right)}{\sqrt{x^2} \times \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{3}{x}}{\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} = -1 \times \frac{3 + \frac{3}{-\infty}}{\sqrt{1 + \frac{9}{+\infty}}} = -\frac{3 + 0^-}{\sqrt{1 + 0^+}} = -\frac{3}{1} = -3$$

Assim temos que a reta de equação  $y = -3$  é a assíntota horizontal do gráfico da restrição da função  $f$  ao intervalo  $] -\infty, 4]$

Teste Intermédio 12.º ano – 28.02.2013

37. Como o domínio de  $g$  é  $]0, +\infty[$ , a reta definida por  $x = k$  é assíntota do gráfico de  $g$ , se

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

Assim, como a reta de equação  $y = 3$  é assíntota horizontal do gráfico de  $f$ , (e o domínio de  $f$  é  $]0, +\infty[$ ), temos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ .

Logo

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} - 3}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} - 3)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)} = \frac{e^{-\infty} - 3}{3} = \frac{0^+ - 3}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

Pelo que a reta de equação  $y = -1$  é uma assíntota do gráfico de  $e$  quando  $x$  tende para  $+\infty$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2012, Ép. especial



38. Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$  podemos afirmar que a reta horizontal definida pela equação  $y = 3$  é uma assíntota do gráfico de  $f$

Como  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$  podemos afirmar que a reta vertical definida pela equação  $x = 1$  é uma assíntota do gráfico de  $f$

Como  $y = mx + b$  é uma assíntota não vertical do gráfico de  $f$  se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = b$ , então como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 1$ , temos que a reta definida por  $y = 2x + 1$  é uma assíntota não vertical do gráfico de  $f$

Assim, a única opção em que são indicadas duas das três assíntotas identificadas é a opção (B).

Resposta: **Opção B**

Exame – 2012, 2.ª Fase

39. Como o domínio da função  $f$  é  $\mathbb{R}$ , poderão existir assíntotas não verticais quando  $x \rightarrow -\infty$  e quando  $x \rightarrow +\infty$ . Assim, vamos averiguar em primeiro lugar a existência de uma assíntota de equação  $y = mx + b$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ :

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{1-x}) = e^{1-(-\infty)} = e^{1+\infty} = +\infty$$

Pelo que, como  $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  não é constante, podemos afirmar que não existe uma assíntota não vertical do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow -\infty$

Averiguando a existência de uma assíntota de equação  $y = mx + b$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , vem:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x+1) - x \ln(x) + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1) - \ln(x) + 3) = +\infty - \infty \text{ (Indeterminação)}$$

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1) - \ln(x) + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1) - \ln(x)) + \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln \frac{x+1}{x} \right) + 3 = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right) + 3 = \ln \left( 1 + \frac{1}{+\infty} \right) + 3 = \ln(1 + 0^+) + 3 = \ln(1) + 3 = 0 + 3 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln(x+1) - x \ln(x) + 3x - 3x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x (\ln(x+1) - \ln(x))) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \times \ln \frac{x+1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right) = +\infty \times 0 \text{ (Indeterminação)} \end{aligned}$$

(fazendo  $y = \frac{1}{x}$ , temos  $x = \frac{1}{y}$  e se  $x \rightarrow +\infty$ , então  $y \rightarrow 0^+$ )

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{y} \ln \left( 1 + \frac{1}{\frac{1}{y}} \right) \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{y} \ln(1+y) \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln(1+y)}{y} \right) = \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln(y+1)}{y} \right)}_{\text{Lim. Notável}} = 1 \end{aligned}$$

Assim temos que a reta de equação  $y = 3x + 1$  é uma assíntota do gráfico de  $f$  (e não existem outras assíntotas não verticais).

Exame – 2012, 1.ª Fase



40. Como  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  então  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} 1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$

Pelo que podemos rejeitar os gráficos das opções (B) e (C), que não verificam esta condição.

Como a bissetriz dos quadrantes ímpares é assíntota do gráfico de  $f$ , então  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  e as-

sim, temos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

Pelo que podemos rejeitar o gráfico da opções (A), que não verifica esta condição.

Desta forma o gráfico da opção (D), de entre os apresentados, é o único compatível com as condições definas.

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2012

41. A assíntota horizontal, quando  $x \rightarrow -\infty$ , é a reta de equação  $y = a$ , em que  $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  e a assíntota horizontal, quando  $x \rightarrow +\infty$ , é a reta de equação  $y = b$ , em que  $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- Determinado a equação da assíntota do gráfico de  $f$  quando  $x \rightarrow -\infty$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (k + xe^x) = k + \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = k + (-\infty) \times e^{-\infty} = k + (-\infty) \times 0 \quad (\text{Indeterminação})$$

(fazendo  $y = -x$ , temos  $x = -y$  e se  $x \rightarrow -\infty$ , então  $y \rightarrow +\infty$ )

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} (k + (-y)e^{-y}) = k + \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(-y \times \frac{1}{e^y}\right) = k - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{e^y}\right) = \\ &= k - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^y}{y}}\right) = k - \frac{\lim_{y \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}} = k - \frac{1}{+\infty} = k - 0 = k \end{aligned}$$

Lim. Notável

- Determinado a equação da assíntota do gráfico de  $f$  quando  $x \rightarrow +\infty$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + \ln x}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 2 + 0 = 2$$

Lim. Notável

Assim, para que as duas assíntotas sejam coincidentes, ficando assim o gráfico de  $f$  com uma única assíntota horizontal, temos que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , ou seja,

$$k = 2$$

Teste Intermédio 12.º ano – 13.03.2012



42. Para averiguar a existência de assíntotas horizontais do gráfico de  $f$  temos que calcular  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Assim temos que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 3 + \frac{1 - e^{x-1}}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - e^{x-1}}{x-1} = 3 + \frac{1 - e^{-\infty-1}}{-\infty-1} = 3 + \frac{1-0}{-\infty} = 3-0 = 3$$

Pelo que podemos afirmar que a reta de equação  $y = 3$  é assíntota do gráfico de  $f$  (quando  $x \rightarrow -\infty$ )

Temos ainda que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \left( -1 + \frac{\ln x}{x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -1 + \frac{\ln x}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1) + \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \right) = +\infty \times (-1 + 0) = +\infty \times (-1) = -\infty \end{aligned}$$

Pelo que podemos afirmar que o gráfico de  $f$  não tem assíntotas horizontais quando  $x \rightarrow +\infty$ , ou seja,  $y = 3$  é a única assíntota horizontal do gráfico de  $f$

Exame – 2011, Prova especial

43. • Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  então a reta de equação  $y = 1$  é assíntota do gráfico de  $f$   
 • Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-2x)) = 0$  então a reta de equação  $y = -2x + 0$  é assíntota do gráfico de  $f$

Logo as assíntotas do gráfico de  $f$  são definidas por  $y = 1$  e  $y = -2x$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2011, Ép. especial

44. Como a função  $f$  resulta de operações entre funções contínuas, em  $[0, 2[$  e em  $[2, +\infty[$  é contínua em  $[0, 2[$  e em  $[2, +\infty[$ , e como o seu domínio é  $[0, +\infty[$ , então a única reta que pode ser assíntota vertical do gráfico de  $f$  é a reta de equação  $x = 2$

Para averiguar se a reta de equação  $x = 2$  é assíntota do gráfico de  $f$ , vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{2-x} - 1}{x - 2} = \frac{e^{2-2^-} - 1}{2^- - 2} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{0}{0} \quad (\text{Indeterminação}) \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{2-x} - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{2-x} - 1}{-(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left( -\frac{e^{2-x} - 1}{2 - x} \right) = - \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{2-x} - 1}{2 - x} \end{aligned}$$

(fazendo  $y = 2 - x$ , temos que se  $x \rightarrow 2^-$ , então  $y \rightarrow 0^+$ )

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = - \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -1$$

Assim, como  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$  é um valor finito, concluímos que a reta de equação  $x = 2$  não é assíntota vertical do gráfico de  $f$  (e que não existe qualquer outra assíntota vertical).

Exame – 2011, 2.ª Fase



45. Como a reta  $y = 2x - 4$  é assíntota do gráfico de  $g$ , temos que

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x) = -4$

Da definição de assíntota temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - (2x - 4)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x + 4) = 0$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2011, 1.ª Fase

46. Como o domínio da função é  $f \in \mathbb{R}^+$ , o comportamento assintótico do gráfico é verificado quando  $x \rightarrow +\infty$

Assim, determinando a assíntota de equação  $y = mx + b$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , vem:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{-x} + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{xe^{-x}}{x} + \frac{2x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + 2) = e^{-\infty} + 2 = 0^+ + 2 = 2$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x} + 2x - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \times \frac{1}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{\underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

Assim, temos que a reta de equação  $y = 2x + 0$ , ou mais simplesmente,  $y = 2x$  é a assíntota oblíqua gráfico de  $f$

Teste Intermédio 12.º ano – 26.05.2011

47. Como a reta de equação  $y = -4$  é assíntota do gráfico da função  $h$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , então temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -4$$

Logo, vem que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{2x}\right)}{h(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{2x}\right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{-4} = \frac{\ln(0^+)}{-4} = \frac{-\infty}{-4} = +\infty$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2010, Ép. especial



48. Como a reta de equação  $y = 1$  é a única assíntota do gráfico da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , então, como é uma reta de declive igual a zero, vem que

$$m_f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right) = 0$$

E assim, determinando o declive da assíntota oblíqua do gráfico da função  $g$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , (porque o domínio da função é  $\mathbb{R}^+$ ), vem:

$$m_g = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x} + \frac{x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{x} \right) = 0 + 1 = 1$$

E como a reta de equação  $y = 1$  é assíntota do gráfico da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , então, vem que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

E assim, determinando a ordenada na origem da assíntota oblíqua da função  $g$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , (porque o domínio da função é  $\mathbb{R}^+$ ), vem:

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x - 1 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = 1$$

Logo, temos que a reta de equação  $y = x + 1$  é a assíntota oblíqua gráfico de  $g$ , que como tem declive 1 é paralela à reta de equação  $y = x$ , ou seja a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exame – 2010, Ép. especial

49. Como o domínio da função  $f$  é  $]0, +\infty[$ , só pode existir uma assíntota não oblíqua quando  $x \rightarrow +\infty$ . Assim, averiguando a existência de uma assíntota de equação  $y = mx + b$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , vem:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{5}x - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{5}x}{x} - \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( f(x) - \frac{1}{5} \times x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{5}x - \ln x - \frac{1}{5}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln x) = -\infty$$

Logo, (como o  $b$  não é um número real) não existe qualquer assíntota oblíqua do gráfico de  $f$

Exame – 2010, 2.ª Fase

50. Como o domínio da função  $f$  é  $] -\infty, 1[$ , e a reta de equação  $x = 1$  é assíntota do gráfico da função, então, de acordo com o gráfico, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

E assim

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} (3x)}{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)} = \frac{3 \times 1^-}{+\infty} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2010, 1.ª Fase

51. Como o domínio da função  $f$  é  $] -\infty, 2\pi[$ , o comportamento assintótico do gráfico é verificado quando  $x \rightarrow -\infty$ , pelo que, pela definição de assíntota,  $y = ax + b$  é uma assíntota do gráfico de  $f$  se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

Calculando o valor do limite, temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + b + e^x - ax - b) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

Pelo que podemos concluir que a reta de equação  $y = ax + b$  é uma assíntota oblíqua do gráfico de  $f$

Exame – 2010, 1.ª Fase





52. Como a função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , porque resulta de operações entre funções contínuas em  $\mathbb{R}$ , o gráfico de  $f$  não tem qualquer assíntota vertical.

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de  $f$ , de equação  $y = mx + b$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ , vem que:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + 4x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} (4xe^{-x}) = \\ &= \frac{3}{-\infty} + 4 \times (-\infty) \times e^{-(-\infty)} = 0 + 4 \times (-\infty) \times e^{+\infty} = 4 \times (-\infty) \times (+\infty) = -\infty \end{aligned}$$

Pelo que não existe qualquer assíntota não vertical do gráfico de  $f$  quando  $x \rightarrow -\infty$

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de  $f$ , de equação  $y = mx + b$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , vem que:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + 4x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} (4xe^{-x}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} + 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} + 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} + 4 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{3}{+\infty} + 4 \times \frac{1}{+\infty} = 0 + 4 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + 4x^2 e^{-x} - 0 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3 + 4 \times \frac{x^2}{e^x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{e^x} \right) = 3 + 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} \right) = 3 + 4 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}}}_{\text{Lim. Notável}} = \\ &= 3 + 4 \times \frac{1}{+\infty} = 3 + 4 \times 0 = 3 \end{aligned}$$

Assim, verificámos que a reta de equação  $y = 3$  é assíntota do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , e de forma mais abrangente, que esta é a única assíntota do gráfico desta função.

Teste Intermédio 12.º ano – 19.05.2010

53. Como o domínio da função é  $\mathbb{R}^+$  e a reta de equação  $y = 1$  é assíntota do gráfico de  $f$ , então temos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

E assim, vem que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x} - f(x) \right) = \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x} \right)}_{\text{Lim. Notável}} - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 - 1 = -1$$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2010  
Teste Intermédio 12.º ano – 11.03.2009



54. Como o domínio da função é  $\mathbb{R}^+$  e o seu gráfico tem uma assíntota oblíqua, ou seja, uma reta de equação  $y = mx + b$ , então vem que:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{-x} + x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{xe^{-x}}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( e^{-x} + 1 + \frac{1}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = e^{-\infty} + 1 + \frac{1}{+\infty} = 0 + 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x} + x + 1 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x} + 1) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{e^x} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\frac{e^x}{x}} \right) + 1 = \frac{1}{\underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}} + 1 = \\ &= \frac{1}{+\infty} + 1 = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

E assim, vem que a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de  $f$  é  $y = x + 1$

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2010

55. Como a função  $g$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , porque resulta de operações entre funções contínuas em  $\mathbb{R}$ , o gráfico de  $g$  não tem qualquer assíntota vertical.

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de  $g$ , de equação  $y = mx + b$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ , vem que:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 3}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^x}{xe^x} + \frac{3}{xe^x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x} + \frac{3e^{-x}}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{-3e^{-x}}{-x} \right) = \frac{1}{-\infty} - 3 \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^{-x}}{-x} \right) = 0 - 3 \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^{-x}}{-x} \right) = \\ &\text{(fazendo } y = -x, \text{ temos que se } x \rightarrow -\infty, \text{ então } y \rightarrow +\infty) \\ &= -3 \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^y}{y} \right)}_{\text{Lim. Notável}} = -3 \times (+\infty) = -\infty \end{aligned}$$

Logo, não o gráfico de  $g$  não tem assíntotas não verticais, quando  $x \rightarrow -\infty$

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de  $g$ , de equação  $y = mx + b$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , vem que:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{xe^x} + \frac{3}{xe^x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{xe^x} \right) = \frac{1}{+\infty} + \frac{3}{+\infty \times (+\infty)} = 0 + \frac{3}{+\infty} = 0 + 0 = 0 \\ \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 0 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x + 3}{e^x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{e^x} + \frac{3}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{3}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{e^x} \right) = 1 + \frac{3}{+\infty} = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

E assim, vem que o gráfico de  $g$  só tem uma assíntota e a sua equação é  $y = 1$

Exame – 2009, Ép. especial



56.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  é o declive da assíntota do gráfico de  $f$ , ou seja o declive da reta  $r$

Como os pontos de coordenadas  $(0, -1)$  e  $(1, 0)$ , pertencem à assíntota, então o seu declive é

$$m_r = \frac{0 - (-1)}{1 - 0} = \frac{1}{1} = 1$$

E assim, vem que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m_r = 1$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2009, 2.<sup>a</sup> Fase

57. Como a função  $h$  resulta de operações entre funções contínuas, em  $\mathbb{R}^-$  e em  $\mathbb{R}^+$  é contínua em  $\mathbb{R}^-$  e em  $\mathbb{R}^+$ , pelo que a única reta que pode ser assíntota vertical do gráfico de  $h$  é a reta de equação  $x = 0$

Para averiguar se a reta de equação  $x = 0$  é assíntota do gráfico de  $h$ , vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$  e

$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$ :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x^2 + 4} - x) = \sqrt{0^2 + 4} - 0 = \sqrt{4} = 2$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{0}{0}$  (Indeterminação)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2(e^{2x} - 1)}{2 \times x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 2 \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{2x} =$$

(fazendo  $y = 2x$ , temos que se  $x \rightarrow 0^-$ , então  $y \rightarrow 0^-$ )

$$= 2 \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 \times 1 = 2$$

E assim, como  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = 2$ , então a reta de equação  $x = 0$  não é assíntota do gráfico de  $h$

Para averiguar se existem assíntotas horizontais do gráfico de  $h$ , vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - x) = \sqrt{+\infty + 4} - (+\infty) = +\infty - \infty$  (indeterminação)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - x)(\sqrt{x^2 + 4} + x)}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = \frac{4}{\sqrt{+\infty + 4} + \infty} = \frac{4}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \frac{e^{2(-\infty)} - 1}{-\infty} = \frac{0 - 1}{-\infty} = 0$

Desta forma, como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$ , temos que a reta de equação  $y = 0$  é uma assíntota horizontal do gráfico de  $h$  (quando  $x \rightarrow +\infty$  e também quando  $x \rightarrow -\infty$ ).

Exame – 2009, 2.<sup>a</sup> Fase



58. Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 0$ , pela definição assintota, temos que a reta definida pela equação  $y = 2x$  é assintota do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow +\infty$  e assim, como o declive da assintota é 2, podemos afirmar que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

Desta forma, averiguando a existência de uma assintota não vertical do gráfico de  $g$ , de equação  $y = mx + b$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , vem que:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x} + \frac{x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x} + x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} x = 2 + (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

Logo, como o domínio de  $g$  é  $\mathbb{R}^+$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$  não é um valor finito, então podemos concluir que o gráfico de  $g$  não tem assíntotas oblíquas.

Exame – 2009, 1.ª Fase

59. Como  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$  sabemos que para valores próximos de  $x$  arbitrariamente próximos de zero, o gráfico da função está arbitrariamente próximo do semieixo negativo das ordenadas, ou seja, apenas as opções (A) e (D) são compatíveis com esta informação.

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) = 0$  então a reta de equação  $y = x$  é assintota do gráfico de  $g$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , pelo que, de entre as opções apresentadas, a única representação gráfica compatível com as informações conhecidas é a da opção (D).

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 11.03.2009

60. Como a função é contínua no intervalo  $] -\infty, 1[$  e também no intervalo  $[1, +\infty[$ , a reta de equação  $x = 1$  é a única reta vertical que pode ser assintota do gráfico de  $f$ .

Podemos ainda observar que, como a função está definida para  $x = 1$ , temos que  $f(1)$  é um valor finito, e assim,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ , pelo que, se a reta  $x = 1$  é uma assintota do gráfico de  $f$ , então o comportamento assintótico só está presente quando  $x \rightarrow 1^-$ , pelo que, para averiguar esta hipótese vamos calcular

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 3}{x^2 - 2x + 1} = \frac{3 - 3}{1 - 2 + 1} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x^2 - 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x + 1)}{(x - 1)} = \frac{3(1^- + 1)}{(1^- - 1)} = \frac{3 \times 2}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$  concluímos que a reta  $x = 1$  é assintota do gráfico de  $f$

Para averiguar à existência de assíntotas horizontais do gráfico de  $f$ , vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 3}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 = 3$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x) - e^{1-x}) = \ln(+\infty) - e^{1-\infty} = +\infty - e^{-\infty} = +\infty - 0^+ = +\infty$

Pelo que podemos concluir que a reta de equação  $y = 3$  é uma assintota do gráfico de  $f$  (quando  $x \rightarrow -\infty$ ) e que não existe assintota horizontal do gráfico quando  $x \rightarrow +\infty$

Teste Intermédio 12.º ano – 11.03.2009



61. Como  $y = -1$  é a única assíntota do gráfico da função  $f$ , e pela observação da figura, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

E assim, vem que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 3}{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)} = \frac{3}{-1} = -3$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2008, 2.ª Fase

62. Como a reta de equação  $y = -x - 1$ , é assíntota do gráfico de  $f$  quando  $x$  tende para  $-\infty$ , pela definição de assíntota, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x - 1)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x + 1) = 0$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2008, 1.ª Fase

63. Como a reta de equação  $y = \frac{1}{3}x + 2$  é assíntota do gráfico de  $f$ , e o domínio de  $f$  é  $\mathbb{R}^+$ , temos que o declive da assíntota é:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{3}$$

E assim, averiguando a existência de uma assíntota horizontal do gráfico de  $h$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , vem que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

Pelo que a reta de equação  $y = 3$  é uma assíntota horizontal do gráfico de  $h$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 29.04.2008

64. Como a reta de equação  $x = 1$  é assíntota do gráfico da função  $g$ , e pela observação do gráfico, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty \text{ e que } \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty$$

Como a função  $h$  é definida por  $h(x) = x - 1$ , temos que  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$

Logo:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x)}{\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)} = \frac{0}{+\infty} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)}{\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)} = \frac{0}{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

E assim, como os limites laterais são iguais, temos que:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2007, 2.ª fase



65. Por observação do gráfico, e como o eixo  $Ox$  é assíntota do gráfico de  $f$ , temos que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$

Pelo que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(0^+) = -\infty \quad (1)$$

Da mesma forma, como a reta de equação  $y = 1$  é assíntota do gráfico de  $f$ , e pela observação do gráfico, podemos constatar que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1^+$

E assim:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1^+) = 0^+ \quad (2)$$

Podemos ainda observar que  $f(0) = k, k > 1$ , pelo que:

$$g(0) = \ln(f(0)) = \ln k$$

E como  $k > 1$ , então  $\ln(k) > 0 \Leftrightarrow g(0) > 1 \quad (3)$

Assim, podemos observar que:

- A função representada pelo gráfico da opção (A) não satisfaz a condição (1)
- A função representada pelo gráfico da opção (B) não satisfaz a condição (3)
- A função representada pelo gráfico da opção (D) não satisfaz a condição (2) nem a condição (3)

Resposta: **Opção C**

Exame – 2007, 1.ª Fase

66. Como a reta de equação  $y = 2x + 3$  é assíntota do gráfico de  $g$ , e o domínio da função é  $\mathbb{R}^+$ , temos que:

- $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$
- $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x) = 3$

E assim, vem que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{g(x)}{x} \times (g(x) - 2x) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x) = 2 \times 3 = 6$$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2007

67. Pela observação do gráfico, e como:

- o domínio da função é  $] - \infty, 1[$  e a reta de equação  $x = 1$  é assíntota do gráfico de  $f$ , temos que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$
- o domínio da função é  $] - \infty, 1[$  e a reta de equação  $y = 0$  é assíntota do gráfico de  $f$ , temos que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$
- a origem do referencial pertence ao gráfico da função, então  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0^+$

Assim, sobre a função  $\frac{1}{f}$  podemos afirmar que:

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{1}{f} \right) (x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} 1}{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$ , pelo que podemos rejeitar a opção (A)
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{f} \right) (x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 1}{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ , pelo que podemos rejeitar a opção (C)
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{f} \right) (x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} 1}{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ , pelo que podemos rejeitar a opção (D)

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2007



68. Como a função é contínua no intervalo  $]0,1[$  e também no intervalo  $[1, +\infty[$ , as retas de equação  $x = 1$  e  $x = 0$  são as únicas retas verticais que podem ser assíntotas do gráfico de  $f$ .

Podemos ainda observar que, como a função está definida para  $x = 1$ , temos que  $f(1)$  é um valor finito, e assim,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ , pelo que, se a reta  $x = 1$  é uma assíntota do gráfico de  $f$ , então o comportamento assintótico só está presente quando  $x \rightarrow 1^-$ , pelo que, para averiguar estas hipóteses vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ :

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{0^+}{\ln(0^+)} = \frac{0^+}{-\infty} = 0^+ \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{\ln(1^-)} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

E assim concluímos que a reta de equação  $x = 0$  não é assíntota do gráfico de  $f$ , mas a reta  $x = 1$  é.

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de  $f$ , de equação  $y = mx + b$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , vem que:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{2-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2-x} = e^{2-(+\infty)} = e^{-\infty} = 0$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{2-x} - 0 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{2-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \times e^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^2 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \\ &= e^2 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = e^2 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}}}_{\text{Lim. Notável}} = e^2 \times \frac{1}{+\infty} = e^2 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

Desta forma concluímos que a reta de equação  $y = 0x + 0$ , ou seja a reta definida por  $y = 0$  é uma assíntota horizontal do gráfico de  $f$  e como o domínio de  $f$  é  $\mathbb{R}^+$  podemos concluir que esta é a única assíntota não vertical do gráfico de  $f$

Exame – 2006, Ép. especial

69. Como a função é contínua no intervalo  $]1, +\infty[$ , a reta de equação  $x = 1$  é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de  $f$ . Para averiguar esta hipótese vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + x \ln(x-1)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x(1 + \ln(x-1))) = 1(1 + \ln(1^+ - 1)) = \\ &= 1 + \ln(0^+) = 1 - \infty = -\infty \end{aligned}$$

Assim concluímos que a reta de equação  $x = 1$  é a única assíntota vertical do gráfico de  $f$

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de  $f$ , de equação  $y = mx + b$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , vem que:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x \ln(x-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{x} + \frac{x \ln(x-1)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln(x-1)) = \\ &= 1 + \ln(+\infty - 1) = 1 + \ln(+\infty) = 1 + \infty = +\infty \end{aligned}$$

Logo, como o domínio de  $f$  é  $]1, +\infty[$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  não é um valor finito, então podemos concluir que o gráfico de  $f$  não tem assíntotas oblíquas.

Exame – 2006, 2.ª fase



70. Como a função  $f$  é contínua, então a função  $g(x) = xf(x)$  também é contínua, por se tratar de um produto de funções contínuas, pelo que o gráfico de  $g$  não admite qualquer assíntota vertical.

Como a reta de equação  $y = x$  é assíntota do gráfico de  $f$ , quer quando  $x \rightarrow +\infty$ , quer quando  $x \rightarrow -\infty$ , temos que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

E assim vem que:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xf(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Como nem  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x}$ , nem  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$  são valores finitos podemos concluir que também não existe qualquer assíntota não vertical do gráfico de  $g$ .

Exame – 2006, 1.ª fase

71. Como a função é contínua no intervalo  $]0, +\infty[$ , a reta de equação  $x = 0$  é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de  $f$ . Para averiguar esta hipótese vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln x}{x} = \frac{1 - \ln(0^+)}{0^+} = \frac{1 - (-\infty)}{0^+} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

E assim concluímos que a reta de equação  $x = 0$  é a única assíntota vertical do gráfico de  $f$

Averiguando a existência de uma assíntota horizontal do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow +\infty$  (porque o domínio de  $f$  é  $]0, +\infty[$ ), vem que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{x} = \frac{1 - (+\infty)}{+\infty} = \frac{-\infty}{+\infty} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{1}{+\infty} - 0 = 0 - 0 = 0$$

Pelo que se concluí que a reta de equação  $y = 0$  é a única assíntota horizontal do gráfico de  $f$

Teste Intermédio 12.º ano – 17.03.2006





72. Como a reta de equação  $y = x + 2$  é assíntota do gráfico de  $g$ , então temos que:

- $m_g = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$
- $b_g = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - mx) = 2$

Assim, relativamente à assíntota não vertical da função  $h$ , vem que:

$$m_h = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{g(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{xg(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{g(x)}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$b_h = \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{g(x)} - 1 \times x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{g(x)} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{g(x)} - \frac{xg(x)}{g(x)} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - xg(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x(x - g(x))}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{g(x)} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - g(x)) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{g(x)}{x}} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (-(g(x) - x)) = \frac{1}{1} \times \left( - \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) \right) = 1 \times (-2) = -2$$

Desta forma concluímos que a reta de equação  $y = x - 2$  é uma assíntota oblíqua do gráfico de  $h$ .

Teste Intermédio 12.º ano – 17.03.2006

73. Averiguando a existência de assíntotas verticais do gráfico de  $f$ , temos que, como a função é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ , a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de  $f$  é a reta de  $x = 3$ .

Como

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-2}{x-3} = \frac{3^+ - 2}{3^+ - 3} = \frac{1}{0^+} = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-2}{x-3} = \frac{3^- - 2}{3^- - 3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

vem que a reta de equação  $x = 3$  é a única assíntota vertical do gráfico de  $f$ .

Relativamente à existência de assíntotas horizontais do gráfico de  $f$ , temos que, como

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

então a reta de equação  $y = 1$  é a única assíntota horizontal do gráfico de  $f$ .

Resposta: **Opção C**

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)

74. Como a função é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{5\}$  e  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 3$ , então não existem assíntotas verticais do gráfico de  $f$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$  então a reta de equação  $y = 2$  é uma assíntota horizontal do gráfico de  $f$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$  então a reta de equação  $y = x$  também é uma assíntota do gráfico de  $f$ .

Resposta: **Opção A**

Exame – 2005, 1.ª fase (cód. 435)



75. Temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + x}{x} = 4 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{g(x)}{x} + \frac{x}{x} \right) = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{g(x)}{x} + 1 \right) = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} + 1 = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 4 - 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 3 \end{aligned}$$

Como o gráfico de  $g$  tem uma assíntota oblíqua, e o domínio de  $g$  é  $\mathbb{R}^+$ , então, o declive da assíntota é 3. Desta forma, de entre as opções apresentadas, apenas a reta de equação  $y = 3x$  pode ser assíntota do gráfico de  $g$ .

Resposta: **Opção B**

Exame – 2004, Ép. especial (cód. 435)

76. Como a função é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , a reta de equação  $x = 0$  é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de  $f$ . Para averiguar esta hipótese vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 1$$

Assim, como  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  é um valor finito, podemos concluir que não existem assíntotas verticais do gráfico de  $f$ , ou seja, paralelas ao eixo das ordenadas.

Para averiguar a existência de assíntotas paralelas ao eixo das abcissas, vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ :

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^{-\infty} - 1}{-\infty} = \frac{0^+ - 1}{-\infty} = \frac{-1}{-\infty} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} \right) = \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \\ &= +\infty - \frac{1}{+\infty} = +\infty - 0 = +\infty \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que a reta de equação  $y = 0$  é assíntota horizontal do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow -\infty$  e que não existe qualquer assíntota do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , pelo que a reta  $y = 0$  é a única assíntota do gráfico de  $f$  paralela a um dos eixos coordenados, nomeadamente o eixo das abcissas.

Exame – 2004, 2.ª Fase (cód. 435)

77. Como o gráfico de  $h$  é simétrico relativamente ao eixo  $Oy$ , e tem uma única assíntota vertical, então essa assíntota é a reta de equação  $x = 0$

Assim, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$$

Ou, seja  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \infty$ , pelo que,  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{g} \right) (x) = \infty$ , e assim,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ , e, como a função  $g$  é contínua, então  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$ , pelo que,

$$g(0) = 0$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)



78. Por observação do gráfico de  $f$ , temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = k, k \in \mathbb{R}^+$$

Desta forma, relativamente à função  $g$ , temos que:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 0^-} x} = \frac{k}{0^-} \underset{k > 0}{=} -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 0^+} x} = \frac{k}{0^+} \underset{k > 0}{=} +\infty \end{aligned}$$

Temos ainda que:

- Como a bissetriz dos quadrantes pares (reta de declive  $-1$ ) é assíntota do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ , então  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$
- Como a bissetriz dos quadrantes ímpares (reta de declive  $1$ ) é assíntota do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , então  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

Desta forma, podemos verificar que o gráfico da opção (A) é o único que satisfaz cumulativamente as quatro condições estabelecidas.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2003, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

79. Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2}$  então a única assíntota do gráfico de  $g$  é uma reta não vertical de declive  $\frac{1}{2}$

Desta forma verificamos que o gráfico da opção (D) é a único que satisfaz esta condição, porque o gráfico da opção (A) tem uma assíntota cujo declive é zero, o gráfico da opção (B) tem pelo menos uma assíntota vertical e o gráfico da opção (C) tem uma assíntota de declive negativo.

Resposta: **Opção D**

Exame – 2003, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

80. Como o domínio de  $h$  é  $[0,5[ \cup ]5, +\infty[$  e a reta de equação  $y = 3$  é assíntota do gráfico de  $h$ , então:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 3$$

Assim, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{3 + e^{-x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + e^{-x})} = \frac{3}{3 + e^{-\infty}} = \frac{3}{3 + 0^+} = \frac{3}{3} = 1$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2003, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)



81. Averiguado a veracidade das afirmações apresentadas, temos:

- Como a reta de equação  $x = 2$  é uma assíntota do gráfico de  $f$ , e o domínio de  $f$  é  $[0, +\infty[$ , então temos que  $f$  não é contínua em  $x = 2$ , ou seja não é contínua em todo o seu domínio.
- Como a reta de equação  $x = 2$  é uma assíntota do gráfico de  $f$ , então  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$ , pelo que  $\lim_{x \rightarrow 2} |f(x)| = +\infty$ , o que significa que a função  $|f|$  não tem um máximo absoluto.
- Como a reta de equação  $x = 2$  é uma assíntota do gráfico de  $f$ , então  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$ , pelo que  $\lim_{x \rightarrow 2} (-f(x)) = -\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow 2} (-f(x)) = +\infty$ , o que significa que a reta de equação  $x = 2$  também é uma assíntota vertical do gráfico de  $-f$ .
- Como a reta de equação  $y = 1$  é uma assíntota do gráfico de  $f$ , e o domínio de  $f$  é  $[0, +\infty[$ , então temos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ , o que significa que não existem assíntotas oblíquas do gráfico de  $f$ .

Resposta: **Opção C**

Exame – 2002, Prova para militares (cód. 435)

82. Como a função é contínua em  $\mathbb{R}$ , não existem assíntotas paralelas ao eixo das ordenadas, ou seja não existe qualquer assíntota vertical do gráfico de  $f$ .

Averiguando a existência de assíntotas paralelas ao eixo das abcissas, temos que:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{3} + 2e^{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3} + \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^{1-x}) = \frac{1}{3} + 2e^{1-(-\infty)} = \frac{1}{3} + 2e^{1+\infty} = \frac{1}{3} + \infty = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{3} + 2e^{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} + \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^{1-x}) = \frac{1}{3} + 2e^{1-(+\infty)} = \frac{1}{3} + 2e^{-\infty} = \frac{1}{3} + 0^+ = \frac{1}{3}$

Assim temos que não existe qualquer assíntota horizontal quando  $x \rightarrow -\infty$ , e a reta de equação  $y = \frac{1}{3}$  é uma assíntota horizontal do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow +\infty$

Exame – 2002, 2.ª Fase (cód. 435)

83. Como a reta de equação  $y = 2$  é assíntota do gráfico de  $h$ , e o domínio da função é domínio  $\mathbb{R}^-$ , então:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 2$$

E assim, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{e^x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2002, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

84. Averiguado a existência de uma assíntota horizontal do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ , temos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (0,1 + 0,2e^{0,3x}) = 0,1 + 0,2e^{0,3(-\infty)} = 0,1 + 0,2e^{-\infty} = 0,1 + 0,2 \times 0 = 0,1$$

Pelo que a reta de equação  $y = 0,1$  é uma assíntota do gráfico de  $f$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2002, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)



85. Como as funções  $f$  e  $g$  estão ambas definidas e são contínuas em  $\mathbb{R}$ , então (como a soma de funções contínuas também é uma função contínua) a função  $f + g$  também está definida no mesmo domínio e também é contínua em  $\mathbb{R}$ , pelo que não existe qualquer assíntota vertical do gráfico da função  $f + g$ .

Averiguando a existência de uma assíntota do gráfico de  $f + g$ , de equação  $y = mx + b$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ , vem que:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(f+g)(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^x}{x} + \frac{x}{x} - \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^x}{x} + 1 - \frac{2}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = \frac{e^{-\infty}}{-\infty} + 1 - \frac{2}{-\infty} = \frac{0^+}{-\infty} + 1 - 0^- = 0 + 1 - 0 = 1 \\ b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} ((f+g)(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x - 2 - 1 \times x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 2) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = e^{-\infty} - 2 = 0^+ - 2 = -2 \end{aligned}$$

Desta forma, concluímos que a reta de equação  $y = 1 \times x - 2$ , ou seja a reta  $r$  é assíntota do gráfico da função  $f + g$ , quando  $x \rightarrow -\infty$

Averiguando a existência de outra assíntota do gráfico de  $f + g$ , de equação  $y = mx + b$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , vem que:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f+g)(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{x} + \frac{x}{x} - \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{x} + 1 - \frac{2}{x} \right) = \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = +\infty + 1 - \frac{2}{+\infty} = +\infty + 1 - 0^+ = +\infty \end{aligned}$$

Logo, como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((f+g)(x) - mx)$  não é um valor finito, então podemos concluir que o gráfico de  $f + g$  não tem outra assíntota quando  $x \rightarrow +\infty$ , ou seja, que a única assíntota do gráfico de  $f + g$  é a reta  $r$ .

Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)



86. Como a bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja uma reta de declive 1, é uma assíntota do gráfico de  $g$ , temos que:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$$

Assim, calculando  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ , vem que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{g(x)}{x} \times \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 1 \times \frac{1}{+\infty} = 1 \times 0^+ = 0$$

Ou seja, a reta de equação  $y = 0$ , ou seja, o eixo  $Ox$  é uma assíntota do gráfico de  $h$ .

Exame – 2001, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

87. Como a função está definida em  $\mathbb{R}^+$  e é contínua no domínio,  $x = 0$  é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de  $f$ .

Como

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x - 2 \ln x) = 3 \times 0^+ - 2 \ln(0^+) = 0 - 2 \times (-\infty) = +\infty$$

vem que a reta de equação  $x = 0$  é a única assíntota vertical do gráfico de  $f$ .

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de  $f$ , de equação  $y = mx + b$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , vem que:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x}{x} - \frac{2 \ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3 - 2 \frac{\ln x}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 \frac{\ln x}{x} \right) = 3 - 2 \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 3 - 2 \times 0 = 3 \end{aligned}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 2 \ln x - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 \ln x) = -2 \times \ln(+\infty) = -2 \times +\infty = -\infty$$

Logo, como o domínio de  $f$  é  $\mathbb{R}^+$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$  não é um valor finito, então podemos concluir que o gráfico de  $f$  não tem assíntotas oblíquas.

Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

88. Como a função está definida para  $t \geq 0$  e é contínua para estes valores,  $t = 0$  é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de  $f$ .

Como

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{5}{1 + 124e^{-0,3t}} = \frac{5}{1 + 124e^{-0,3 \times 0}} = \frac{5}{1 + 124e^0} = \frac{5}{1 + 124 \times 1} = \frac{5}{125} = \frac{1}{25}$$

vem que a reta de equação  $t = 0$  não é assíntota vertical do gráfico de  $f$ .

Averiguando a existência de assíntotas quando  $t \rightarrow +\infty$ , temos:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5}{1 + 124e^{-0,3t}} = \frac{5}{1 + 124e^{-0,3 \times (+\infty)}} = \frac{5}{1 + 124e^{-\infty}} = \frac{5}{1 + 124 \times 0} = \frac{5}{1} = 5$$

E assim podemos concluir que a única assíntota do gráfico de  $f$  é a reta de equação  $y = 5$

No contexto do problema, esta conclusão significa que para valores arbitrariamente grandes de  $t$ , a função toma valores arbitrariamente próximos de 5, ou seja, com o passar do tempo o número de habitantes de Malmequeres de Baixo que sabiam do acidente aproxima-se muito de 5 milhares.

Exame – 2001, Prova modelo (cód. 435)



89. Sendo  $y = mx + b$  a equação da reta  $s$ , como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$ , então temos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$$

Ou seja, temos que a reta  $s$  é uma assíntota do gráfico de  $f$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2000, 2.ª Fase (cód. 435)

90. Como a função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , a reta de equação  $x = 1$  é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de  $f$ . Averiguando se esta reta, é, de facto, uma assíntota, temos que:

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^1}{1^+ - 1} = \frac{e}{0^+} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^1}{1^- - 1} = \frac{e}{0^-} = -\infty$

Logo, temos que a reta de equação  $x = 1$  é a única assíntota vertical do gráfico de  $f$

Averiguando a existência de assíntotas horizontais, temos que:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^{-\infty}}{-\infty - 1} = \frac{0^+}{-\infty} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^{+\infty}}{+\infty - 1} = \frac{+\infty}{+\infty}$  (Indeterminação)

(fazendo  $y = x - 1$ , temos  $x = y + 1$  e se  $x \rightarrow +\infty$ , então  $y \rightarrow +\infty$ )

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x-1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^{y+1}}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y \times e}{y} = \\ &= \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} e = +\infty \times e = +\infty \end{aligned}$$

E assim temos que a função só tem uma assíntota horizontal (quando  $x \rightarrow -\infty$ ) que é a reta de equação  $y = 0$

Exame – 2000, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

91. Como o domínio de  $f$  é  $\mathbb{R}^+$  e o eixo  $Ox$  é assíntota do gráfico de  $f$ , temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$$

Assim, averiguando a existência de uma assíntota horizontal do gráfico de  $\frac{1}{f}$ , vem:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{f} \right) (x) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{f} \right) (x)$  não é um valor finito e o domínio de  $f$  é  $\mathbb{R}^+$ , então não existe qualquer assíntota horizontal do gráfico de  $\frac{1}{f}$

Exame – 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)



92. Como  $f(0) = 1$  e  $f$  é estritamente crescente, então, para que a bissetriz dos quadrantes ímpares seja assíntota do gráfico de  $f$ , temos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Como  $f(0) = 1$  e  $f$  é estritamente crescente, então, para que a o eixo  $Ox$  seja assíntota do gráfico de  $f$ , temos que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$$

Assim, como  $f$  é estritamente crescente, temos que o contradomínio de  $f$  é  $]0, +\infty[$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2000, Prova modelo (cód. 435)

93. Como  $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = +\infty$ , então a reta de equação  $x = 3$  é uma assíntota vertical do gráfico da função  $g$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2000, Prova para militares (cód. 135)

