

MATEMÁTICA A - 12º Ano

Funções - Assíntotas

Propostas de resolução

Exercícios de exames e testes intermédios

1. Como a função h é contínua (é contínua no intervalo $[-\frac{\pi}{3}, 0[$ porque resulta do quociente e do produto de funções contínuas, é contínua em $x = 0$, e é contínua no intervalo $[0, +\infty[$ porque é o quociente de funções contínuas), então o gráfico de h não admite qualquer assíntota vertical.

Como o domínio da função é $[-\frac{\pi}{3}, +\infty[$, só poderá existir uma assíntota oblíqua quando $x \rightarrow +\infty$. Desta forma, vamos averiguar a existência de uma assíntota de equação $y = mx + b$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = +\infty \times \frac{1}{1 + \frac{1}{+\infty}} = +\infty \times \frac{1}{1+0} = +\infty \times 1 = +\infty \end{aligned}$$

Assim, como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x}$ não é um valor finito, não existe qualquer assíntota oblíqua do gráfico de h .

Exame – 2018, Ép. especial

2. Para averiguar a existência de assíntotas horizontais vamos calcular o limite da função quando $x \rightarrow -\infty$ e quando $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{e^x}{1-x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1-x} = 3 + \frac{e^{-\infty}}{1 - (-\infty)} = \\ &= 3 + \frac{0^+}{1 + \infty} = 3 + \frac{0^+}{+\infty} = 3 + 0 = 3 \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$, a reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal do gráfico de f

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2) + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2}{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \times \frac{\ln x}{x}\right) + 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, a reta de equação $y = 0$ também é assíntota horizontal do gráfico de f

Exame – 2018, 2ª Fase



3. Como a função é contínua em \mathbb{R}^+ , a reta de equação $x = 0$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f . Para averiguar esta hipótese vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 0^+}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Assim, como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, podemos concluir a reta de equação $x = 0$ é a única assíntota vertical do gráfico de f , ou seja, paralela ao eixo das ordenadas.

Como o domínio da função é \mathbb{R}^+ , para averiguar a existência de assíntotas paralelas ao eixo das abcissas, vamos calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Lim. Notável

Logo, podemos concluir que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f , quando $x \rightarrow +\infty$, e que é a única assíntota do gráfico de f paralela ao eixo das abcissas.

Exame – 2017, 2ª Fase

4. Como o declive da assíntota do gráfico de f é -1 , e o domínio de f é \mathbb{R}^+ , temos que:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

Como $y = -x$ é assíntota do gráfico de g , e o domínio de g é \mathbb{R}^+ , temos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$

E assim, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \times g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \times g(x) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1 \times (-\infty) = +\infty$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2017, 1ª Fase

5. Calculando o valor do limite, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x + x) - x) = \ln(e^{+\infty} + \infty) - \infty = +\infty - \infty \quad (\text{Indeterminação}) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x \times (1 + \frac{x}{e^x})) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x) + \ln(1 + \frac{x}{e^x}) - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln(1 + \frac{x}{e^x}) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + \frac{x}{e^x}) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{e^x})\right) = \\ &= \ln\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}\right) = \ln\left(1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}}\right) = \ln\left(1 + \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}}\right) = \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{+\infty}\right) = \ln(1 + 0) = 0 \end{aligned}$$

Lim. Notável

Assim, como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$, podemos concluir que a reta de equação $y = x$ é uma assíntota do gráfico da função f , quando $x \rightarrow +\infty$

Exame – 2016, Ép. especial



6. Como o domínio da função é $]-\frac{\pi}{2}, +\infty[$, só poderá existir uma assíntota oblíqua quando $x \rightarrow +\infty$. Assim, vamos averiguar a existência de uma assíntota de equação $y = mx + b$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 1 - 0 = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x - x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = -(+\infty) = -\infty$$

Assim, como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$ não é um valor finito, não existe qualquer assíntota oblíqua do gráfico de f .

Exame – 2016, 2ª Fase

7. Simplificando a expressão dada, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + e^x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + \frac{e^x}{x} - \frac{x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} + \frac{0^+}{-\infty} - \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} + 0 - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} - 1$$

Pelo que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + e^x - x}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} - 1 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 + 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

Como o domínio da função é \mathbb{R}^- , então o declive da assíntota do gráfico de f , é: $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2016, 1ª Fase

8. Como f é uma função contínua em $]-\infty, -1[$ e em $]1, +\infty[$ (porque resulta de operações entre funções contínuas neste domínio), então as retas definidas pelas equações $x = -1$ e $x = 1$ são as únicas retas verticais que podem ser assíntotas do gráfico de f .

Para averiguar se estas retas são assíntotas do gráfico de f , de acordo com o domínio da função, vamos calcular:

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right) = \ln \left(\frac{-1^- - 1}{-1^- + 1} \right) = \ln \left(\frac{-2}{0^-} \right) = \ln(+\infty) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right) = \ln \left(\frac{1^+ - 1}{1^+ + 1} \right) = \ln \left(\frac{0^+}{2} \right) = \ln(0^+) = -\infty$

Como ambos os limites são infinitos, as duas retas são assíntotas do gráfico de f e não existem outras assíntotas verticais.

Exame – 2016, 1ª Fase

9. Como o domínio da função é \mathbb{R}_0^+ , a eventual existência de uma assíntota horizontal será quando $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{1-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \times \frac{e^1}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e \times \frac{x^2}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} =$$

$$= e \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = e \times \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{\underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}}_{\text{Lim. Notável}}} = e \times \frac{1}{+\infty} = e \times 0 = 0$$

Logo, como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, podemos concluir que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f .

Exame – 2015, Ép. especial



10. Averiguando a existência de uma assíntota horizontal quando $x \rightarrow -\infty$, vem

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + xe^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 1 + (-\infty \times e^{-\infty}) = 1 + \underbrace{(-\infty \times 0^+)}_{\text{Indeterminação}}$$

(fazendo $y = -x$, temos $x = -y$; e se $x \rightarrow -\infty$, então $y \rightarrow +\infty$)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} (-ye^{-y}) = 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(-y \times \frac{1}{e^y}\right) = 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{e^y}\right) = \\ &= 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^y}{y}}\right) = 1 - \frac{1}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

Logo, como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, podemos concluir que a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico de f

Averiguando agora a existência de uma assíntota horizontal quando $x \rightarrow +\infty$, vem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x-3) - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x-3}{x}\right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x}\right) = \\ &= \ln \left(\frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-3)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} x}\right) = \ln \left(\frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} x}\right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x}\right) = \ln(1) = 0 \end{aligned}$$

Logo, como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, podemos concluir que a reta de equação $y = 0$ também é assíntota horizontal do gráfico de f

Exame – 2015, 2ª Fase

11. Como f é uma função contínua em $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ (porque ambos os ramos resultam de operações entre funções nos respetivos domínios em que estão definidos), então $x = \frac{1}{2}$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f

Para averiguar se a reta de equação $x = \frac{1}{2}$ é assíntota do gráfico de f , vamos calcular $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$ e

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x)$:

- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} ((x+1) \ln x) = \left(\frac{1}{2} + 1\right) \ln \frac{1}{2} = \frac{3}{2} (\ln 1 - \ln 2) = -\frac{3 \ln 2}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1} = \frac{e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}}}{2\left(\frac{1}{2}\right) - 1} = \frac{0}{1 - 1} = \frac{0}{0}$ (indeterminação)

(fazendo $y = x - \frac{1}{2}$, temos $x = y + \frac{1}{2}$; e se $x \rightarrow \frac{1}{2}^-$, então $y \rightarrow 0^-$)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^{y+\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}}}{2(y)} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y \times e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}}}{2y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{2}}(e^y - 1)}{2y} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \times \frac{e^y - 1}{y}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{e}}{2} \end{aligned}$$

Assim, como $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x)$, são ambos números reais, concluímos que a reta de equação $x = \frac{1}{2}$ não é assíntota vertical do gráfico de f (e que não existe qualquer outra assíntota vertical).

Exame – 2015, 1ª Fase



12. Como $D_f =] - \infty, e[$, se existir uma assíntota horizontal, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ é constante.

Assim, calculando o limite temos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{x-2}) = -\infty \times xe^{-\infty-2} = -\infty \times 0 \text{ (indeterminação)}$$

(Seja $y = -x$, temos que se $x \rightarrow -\infty$, então $y \rightarrow +\infty$)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} (-ye^{-y-2}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} (-y \times e^{-y} \times e^{-2}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(-y \times \frac{1}{e^y} \times e^{-2} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(-\frac{y}{e^y} \right) \times \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-2} = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} \times e^{-2} = -e^{-2} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = -e^{-2} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^y}{y}} \right) = \\ &= -e^{-2} \times \frac{1}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = -e^{-2} \times \frac{1}{+\infty} = -e^{-2} \times 0 = 0 \end{aligned}$$

Logo, como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ e $D_f =] - \infty, e[$, podemos concluir que a única assíntota horizontal do gráfico de f é a reta de equação $y = 0$

Exame – 2014, Ép. especial

13. Como a reta de equação $y = 2x - 5$ é assíntota do gráfico de f e $D_f = \mathbb{R}^+$, sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x - 1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x - 1}{\frac{6x - 1}{\frac{f(x)}{x}}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x - 1}{x}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6x}{x} - \frac{1}{x} \right)}{2} = \frac{6 - 0}{2} = 3$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2014, Ép. especial



14. Como a função f resulta de operações entre funções contínuas, é contínua no seu domínio, e como o seu domínio é $] - \infty, 0[$, então a única reta que pode ser assíntota vertical do gráfico de f é a reta de equação $x = 0$

Para averiguar se a reta de equação $x = 0$ é assíntota do gráfico de f , vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x - \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(-x)}{x} = \\ &= 0 - 1 + \frac{\ln(-0^-)}{0^-} = -1 + \frac{\ln(0^+)}{0^-} = -1 + \frac{-\infty}{0^-} = -1 + \infty = +\infty \end{aligned}$$

Assim, como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$, concluímos que a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de f (e que não existe qualquer outra assíntota vertical).

Relativamente à existência de assíntotas não verticais, como o domínio de f é $] - \infty, 0[$, só poderão existir quando $x \rightarrow -\infty$. Assim, vamos averiguar a existência de uma assíntota de equação $y = mx + b$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x} - \frac{1}{x} + \frac{\ln(-x)}{x^2} \right) = \\ &= 1 + 0 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x^2} = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x^2} = 1 - 0 + \frac{+\infty}{+\infty} \quad (\text{Indeterminação}) \end{aligned}$$

(fazendo $y = -x$, temos $x = -y$ e se $x \rightarrow -\infty$, então $y \rightarrow +\infty$)

$$\begin{aligned} m &= 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x^2} = 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(-(-y))}{(-y)^2} = 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y^2} = 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} \times \frac{\ln(y)}{y} \right) = \\ &= 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 1 + \frac{1}{+\infty} \times 0 = 1 + 0 \times 0 = 1 \end{aligned}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 1 \times x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 + \frac{\ln(-x)}{x} \right) =$$

(fazendo $y = -x$, temos $x = -y$ e se $x \rightarrow -\infty$, então $y \rightarrow +\infty$)

$$b = -1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x} = -1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(-(-y))}{-y} = -1 - \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -1 - 0 = -1$$

Assim temos que a reta de equação $y = x - 1$ é uma assíntota do gráfico de f (e não existem outras assíntotas não verticais).

Exame - 2014, 2ª Fase

15. Como o gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua quando x tende para $+\infty$, de equação $y = x + b$, ou seja uma reta de declive 1, temos que

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

E assim, calculando o valor de b , vem que

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2e^x - e^4) - x) = +\infty - \infty \quad (\text{Indeterminação})$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2e^x - e^4) - x) = \lim_{x = \ln e^x} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2e^x - e^4) - \ln e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{2e^x - e^4}{e^x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\frac{2e^x}{e^x} - \frac{e^4}{e^x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(2 - \frac{e^4}{e^x} \right) \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{e^4}{e^x} \right) \right) = \\ &= \ln \left(2 - \frac{e^4}{e^{+\infty}} \right) = \ln(2 - 0) = \ln 2 \end{aligned}$$

Exame - 2014, 1ª Fase



16. Como a função, em ambos os ramos, resulta de operações e composições de funções contínuas em \mathbb{R}^- e em \mathbb{R}^+ , a função é contínua em \mathbb{R}^- e em \mathbb{R}^+ , pelo que a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f é a reta $x = 0$

Averiguando que $x = 0$ é assíntota do gráfico de f , temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x + 1 + e^{-x}) = 2 \times 0 + 1 + e^{-0} = 0 + 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3x + \ln x}{x} \right) = \frac{3 \times 0^+ + \ln 0^+}{0^+} = \frac{0 + (-\infty)}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Pelo que, apesar de $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ não ser infinito, como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ podemos afirmar que $x = 0$ é assíntota do gráfico de f

Para mostrar que existe uma assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{\ln x}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 3 + 0 = 3 \end{aligned}$$

Logo podemos afirmar que $y = 3$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$

Para mostrar não existe assíntota não vertical do gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$, ou seja uma reta de equação $y = mx + b$, vem

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1 + e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{x} + \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 2 + \frac{1}{-\infty} + \frac{e^{-(-\infty)}}{-\infty} = 2 + 0 + \frac{+\infty}{-\infty} \text{ (indeterminação)} \end{aligned}$$

Fazendo $y = -x$, vem que $x = -y$ e se $x \rightarrow -\infty$ então $y \rightarrow +\infty$

$$= 2 + 0 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 2 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{-y} = 2 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(-\frac{e^y}{y} \right) = 2 - \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 - (+\infty) = -\infty$$

E assim, como $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ podemos concluir que não existe assíntota não vertical do gráfico de f , quando $x \rightarrow -\infty$

Teste Intermédio 12º ano – 30.04.2014

17. Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 2x] = 2$, temos que $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-2x)] = 2$, o que significa que a reta de equação $y = -2x + 2$ é assíntota do gráfico de f , quando $x \rightarrow -\infty$

O único gráfico que admite a reta $y = -2x + 2$ como assíntota é o da opção (A).

Resposta: **Opção A**

Exame – 2013, Ép. especial

18. Como $y = 2x - 1$ é assíntota do gráfico de g , e o domínio da função g é \mathbb{R}^+ , temos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$

Como o domínio da função h é \mathbb{R}^+ , vamos calcular o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - [g(x)]^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{[g(x)]^2}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[g(x)]^2}{x^2} = \\ &= \frac{1}{+\infty} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{g(x)}{x} \right)^2 \right] = 0 - \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} \right)^2 = -2^2 = -4 \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -4$, o gráfico de h tem uma assíntota horizontal.

Exame – 2013, Ép. especial



19. Para mostrar que o gráfico da função f admite uma assíntota oblíqua de equação $y = mx + b$, quando x tende para $-\infty$, temos:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^{3+x} + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{xe^{3+x}}{x} + \frac{2x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{3+x} + 2) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3+x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = e^{3+(-\infty)} + 2 = e^{-\infty} + 2 = 0^+ + 2 = 2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{3+x} + 2x - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{3+x}) = -\infty \times e^{3+(-\infty)} =$$

$$= -\infty \times e^{-\infty} + 2 = -\infty \times 0^+ (\text{indeterminação})$$

(fazendo $y = -x$, temos $x = -y$ e se $x \rightarrow -\infty$, então $y \rightarrow +\infty$)

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{3+x}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} (-ye^{3-y}) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} (ye^{3-y}) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(y \times \frac{e^3}{e^y} \right) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(e^3 \times \frac{y}{e^y} \right) =$$

$$= - \lim_{y \rightarrow +\infty} e^3 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = -e^3 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y}} = -e^3 \times \frac{\lim_{y \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}} = -e^3 \times \frac{1}{+\infty} = -e^3 \times 0 = 0$$

Lim. Notável

Assim temos que a reta de equação $y = 2x$ é uma assíntota do gráfico de f quando x tende para $-\infty$

Exame – 2013, 2ª Fase

20. Como sabemos que $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, em que m é o declive de uma assíntota do gráfico de f , vem que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + f(x)}{3x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{3x} + \frac{f(x)}{3x} \right) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{3x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{3x} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} + \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow 0 + \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$$

Logo uma assíntota do gráfico de f , se existir, é uma reta de declive 3, pelo que a única equação, de entre as hipóteses apresentadas, que pode definir uma assíntota do gráfico da função f é $y = 3x$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2013, 1ª Fase



21. Como a função, em ambos os ramos, resulta de operações e composições de funções contínuas em \mathbb{R}^- e em \mathbb{R}^+ , a função é contínua em \mathbb{R}^- e em \mathbb{R}^+ , pelo que a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f é a reta $x = 0$

Averiguando se $x = 0$ é assíntota do gráfico de f , temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0^+ \times \ln(0^+) = 0^+ \times (-\infty) \text{ (indeterminação)}$$

(fazendo $y = \frac{1}{x}$, temos $x = \frac{1}{y}$ e se $x \rightarrow 0^+$, então $y \rightarrow +\infty$)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} \times \ln \frac{1}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} \times (\ln 1 - \ln y) \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} \times (-\ln y) \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln y}{y} \right) = - \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 0 \end{aligned}$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{e^{4x} - 1} = \frac{e^0 - 1}{e^0 - 1} = \frac{0}{0} \text{ (indeterminação)} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{e^{4x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x - 1}{e^{4x} - 1} \times \frac{x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x - 1}{x} \times \frac{x}{e^{4x} - 1} \right) = \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^{4x} - 1} = 1 \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{4} \times \frac{4 \times x}{e^{4x} - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{4} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x}{e^{4x} - 1} = \\ &= \frac{1}{4} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{\frac{e^{4x} - 1}{4x}} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} 1}{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{4x} - 1}{4x}} = \frac{1}{4 \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{4x} - 1}{4x}} = \end{aligned}$$

(fazendo $y = 4x$, temos que se $x \rightarrow 0^-$, então também $y \rightarrow 0^-$)

$$= \frac{1}{4 \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{1}{4 \times 1} = \frac{1}{4}$$

E assim, como todos os limites calculados existem e têm um valor real (finito), podemos concluir que a função f não tem qualquer assíntota vertical.

Exame – 2013, 1ª Fase

22. Para mostrar que o gráfico da função f admite uma assíntota oblíqua de equação $y = mx + b$, quando x tende para $-\infty$, temos:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 1 - xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x}{x} + \frac{1}{x} - \frac{xe^x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{1}{x} - e^x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 3 + 0^- - 0^+ = 3 \end{aligned}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + 1 - xe^x - 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - xe^x) = 1 - \infty \times e^{-\infty} = \underbrace{-\infty \times 0^+}_{\text{Indeterminação}}$$

(fazendo $y = -x$, temos $x = -y$ e se $x \rightarrow -\infty$, então $y \rightarrow +\infty$)

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - xe^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} (-ye^{-y}) = 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(-y \times \frac{1}{e^y} \right) = \\ &= 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(-\frac{y}{e^y} \right) = 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{e^y} \right) = 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y}} = 1 + \frac{\lim_{y \rightarrow +\infty} 1}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Assim temos que a reta de equação $y = 3x + 1$ é uma assíntota do gráfico de f quando x tende para $-\infty$

Teste Intermédio 12º ano – 24.05.2013



23. Para mostrar que o gráfico da restrição da função f ao intervalo $] - \infty, 4]$ tem uma assíntota horizontal de equação $y = k$, quando x tende para $-\infty$, temos:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 3}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{3(-\infty) + 3}{\sqrt{(-\infty)^2 + 9}} = \frac{-\infty}{+\infty} \text{ (indeterminação)}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 3}{\sqrt{x^2 + 9}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 3}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{9}{x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(3 + \frac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2} \times \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{3}{x}}{\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} = -1 \times \frac{3 + \frac{3}{-\infty}}{\sqrt{1 + \frac{9}{+\infty}}} = -\frac{3 + 0^-}{\sqrt{1 + 0^+}} = -\frac{3}{1} = -3$$

Assim temos que a reta de equação $y = -3$ é a assíntota horizontal do gráfico da restrição da função f ao intervalo $] - \infty, 4]$

Teste Intermédio 12º ano – 28.02.2013

24. Como o domínio de g é $]0, +\infty[$, a reta definida por $x = k$ é assíntota do gráfico de g , se

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

Assim, como a reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal do gráfico de f , (e o domínio de f é $]0, +\infty[$), temos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.

Logo

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} - 3}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} - 3)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)} = \frac{e^{-\infty} - 3}{3} = \frac{0^+ - 3}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

Pelo que a reta de equação $y = -1$ é uma assíntota do gráfico de e quando x tende para $+\infty$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2012, Ép. especial

25. Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ podemos afirmar que a reta horizontal definida pela equação $y = 3$ é uma assíntota do gráfico de f

Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ podemos afirmar que a reta vertical definida pela equação $x = 1$ é uma assíntota do gráfico de f

Como $y = mx + b$ é uma assíntota não vertical do gráfico de f se $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = b$, então como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 1$, temos que a reta definida por $y = 2x + 1$ é uma assíntota não vertical do gráfico de f

Assim, a única opção em que são indicadas duas das três assíntotas identificadas é a opção (B).

Resposta: **Opção B**

Exame – 2012, 2ª Fase



26. Como o domínio da função f é \mathbb{R} , poderão existir assíntotas não verticais quando $x \rightarrow -\infty$ e quando $x \rightarrow +\infty$. Assim, vamos averiguar em primeiro lugar a existência de uma assíntota de equação $y = mx + b$, quando $x \rightarrow -\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{1-x}) = e^{1-(-\infty)} = e^{1+\infty} = +\infty$$

Pelo que, como $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ não é constante, podemos afirmar que não existe uma assíntota não vertical do gráfico de f , quando $x \rightarrow -\infty$

Averiguando a existência de uma assíntota de equação $y = mx + b$, quando $x \rightarrow +\infty$, vem:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x+1) - x \ln(x) + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1) - \ln(x) + 3) = +\infty - \infty \text{ (Indeterminação)}$$

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1) - \ln(x) + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1) - \ln(x)) + \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x+1}{x} \right) + 3 = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) + 3 = \ln \left(1 + \frac{1}{+\infty} \right) + 3 = \ln(1 + 0^+) + 3 = \ln(1) + 3 = 0 + 3 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln(x+1) - x \ln(x) + 3x - 3x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x(\ln(x+1) - \ln(x))) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \times \ln \frac{x+1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) = +\infty \times 0 \text{ (Indeterminação)} \\ &\text{(fazendo } y = \frac{1}{x}, \text{ temos } x = \frac{1}{y} \text{ e se } x \rightarrow +\infty, \text{ então } y \rightarrow 0^+) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{y} \ln \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{y}} \right) \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{y} \ln(1+y) \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1+y)}{y} \right) = \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(y+1)}{y} \right)}_{\text{Lim. Notável}} = 1 \end{aligned}$$

Assim temos que a reta de equação $y = 3x + 1$ é uma assíntota do gráfico de f (e não existem outras assíntotas não verticais).

Exame – 2012, 1ª Fase

27. Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ então $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{f} \right) (x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} 1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$

Pelo que podemos rejeitar os gráficos das opções (B) e (C), que não verificam esta condição.

Como a bissetriz dos quadrantes ímpares é assíntota do gráfico de f , então $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e as-

sim, temos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{f} \right) (x) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

Pelo que podemos rejeitar o gráfico da opções (A), que não verifica esta condição.

Desta forma o gráfico da opção (D), de entre os apresentados, é o único compatível com as condições definidas.

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12º ano – 24.05.2012



28. A assíntota horizontal, quando $x \rightarrow -\infty$, é a reta de equação $y = a$, em que $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e a assíntota horizontal, quando $x \rightarrow +\infty$, é a reta de equação $y = b$, em que $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- Determinado a equação da assíntota do gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$, temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (k + xe^x) = k + \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = k + (-\infty) \times e^{-\infty} = k + (-\infty) \times 0 \quad (\text{Indeterminação})$$

(fazendo $y = -x$, temos $x = -y$ e se $x \rightarrow -\infty$, então $y \rightarrow +\infty$)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} (k + (-y)e^{-y}) = k + \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(-y \times \frac{1}{e^y} \right) = k - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{e^y} \right) = \\ &= k - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^y}{y}} \right) = k - \frac{\lim_{y \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}} = k - \frac{1}{+\infty} = k - 0 = k \end{aligned}$$

Lim. Notável

- Determinado a equação da assíntota do gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$, temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + \ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 2 + 0 = 2$$

Lim. Notável

Assim, para que as duas assíntotas sejam coincidentes, ficando assim o gráfico de f com uma única assíntota horizontal, temos que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, ou seja,

$$k = 2$$

Teste Intermédio 12º ano – 13.03.2012

29. Para averiguar a existência de assíntotas horizontais do gráfico de f temos que calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Assim temos que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{1 - e^{x-1}}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - e^{x-1}}{x-1} = 3 + \frac{1 - e^{-\infty-1}}{-\infty-1} = 3 + \frac{1-0}{-\infty} = 3-0 = 3$$

Pelo que podemos afirmar que a reta de equação $y = 3$ é assíntota do gráfico de f (quando $x \rightarrow -\infty$)

Temos ainda que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(-1 + \frac{\ln x}{x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{\ln x}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} (-1) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty \times (-1 + 0) = +\infty \times (-1) = -\infty \end{aligned}$$

Lim. Notável

Pelo que podemos afirmar que o gráfico de f não tem assíntotas horizontais quando $x \rightarrow +\infty$, ou seja, $y = 3$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f

Exame – 2011, Prova especial

- 30.
- Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ então a reta de equação $y = 1$ é assíntota do gráfico de f
 - Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-2x)) = 0$ então a reta de equação $y = -2x + 0$ é assíntota do gráfico de f

Logo as assíntotas do gráfico de f são definidas por $y = 1$ e $y = -2x$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2011, Ép. especial



31. Como a função f resulta de operações entre funções contínuas, em $[0,2[$ e em $[2, +\infty[$ é contínua em $[0,2[$ e em $[2, +\infty[$, e como o seu domínio é $[0, +\infty[$, então a única reta que pode ser assíntota vertical do gráfico de f é a reta de equação $x = 2$

Para averiguar se a reta de equação $x = 2$ é assíntota do gráfico de f , vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{2-x} - 1}{x - 2} = \frac{e^{2-2^-} - 1}{2^- - 2} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{0}{0} \quad (\text{Indeterminação})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{2-x} - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{2-x} - 1}{-(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(-\frac{e^{2-x} - 1}{2 - x} \right) = -\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{2-x} - 1}{2 - x}$$

(fazendo $y = 2 - x$, temos que se $x \rightarrow 2^-$, então $y \rightarrow 0^+$)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\lim_{y \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -1$$

Assim, como $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ é um valor finito, concluímos que a reta de equação $x = 2$ não é assíntota vertical do gráfico de f (e que não existe qualquer outra assíntota vertical).

Exame – 2011, 2ª Fase

32. Como a reta $y = 2x - 4$ é assíntota do gráfico de g , temos que

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x) = -4$

Da definição de assíntota temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - (2x - 4)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x + 4) = 0$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2011, 1ª Fase

33. Como o domínio da função é $f \in \mathbb{R}^+$, o comportamento assintótico do gráfico é verificado quando $x \rightarrow +\infty$

Assim, determinando a assíntota de equação $y = mx + b$, quando $x \rightarrow +\infty$, vem:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{-x} + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{xe^{-x}}{x} + \frac{2x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + 2) = e^{-\infty} + 2 = 0^+ + 2 = 2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x} + 2x - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x}) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \times \frac{1}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Lim. Notável

Assim, temos que a reta de equação $y = 2x + 0$, ou mais simplesmente, $y = 2x$ é a assíntota oblíqua do gráfico de f

Teste Intermédio 12º ano – 26.05.2011



34. Como a reta de equação $y = -4$ é assíntota do gráfico da função h , de domínio \mathbb{R}^+ , então temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -4$$

Logo, vem que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{2x}\right)}{h(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{2x}\right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{-4} = \frac{\ln(0^+)}{-4} = \frac{-\infty}{-4} = +\infty$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2010, Ép. especial

35. Como a reta de equação $y = 1$ é a única assíntota do gráfico da função f , de domínio \mathbb{R}^+ , então, como é uma reta de declive igual a zero, vem que

$$m_f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = 0$$

E assim, determinando o declive da assíntota oblíqua do gráfico da função g , quando $x \rightarrow +\infty$, (porque o domínio da função é \mathbb{R}^+), vem:

$$m_g = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + \frac{x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x} \right) = 0 + 1 = 1$$

E como a reta de equação $y = 1$ é assíntota do gráfico da função f , de domínio \mathbb{R}^+ , então, vem que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

E assim, determinando a ordenada na origem da assíntota oblíqua da função g , quando $x \rightarrow +\infty$, (porque o domínio da função é \mathbb{R}^+), vem:

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x - 1 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = 1$$

Logo, temos que a reta de equação $y = x + 1$ é a assíntota oblíqua gráfico de g , que como tem declive 1 é paralela à reta de equação $y = x$, ou seja a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exame – 2010, Ép. especial

36. Como o domínio da função f é $]0, +\infty[$, só pode existir uma assíntota não oblíqua quando $x \rightarrow +\infty$. Assim, averiguando a existência de uma assíntota de equação $y = mx + b$, quando $x \rightarrow +\infty$, vem:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{5}x - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{5}x}{x} - \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{5} \times x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}x - \ln x - \frac{1}{5}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln x) = -\infty$$

Logo, (como o b não é um número real) não existe qualquer assíntota oblíqua do gráfico de f

Exame – 2010, 2ª Fase

37. Como o domínio da função f é $] -\infty, 1[$, e a reta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico da função, então, de acordo com o gráfico, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

E assim

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} (3x)}{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)} = \frac{3 \times 1^-}{+\infty} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2010, 1ª Fase



38. Como o domínio da função é f é $] -\infty, 2\pi]$, o comportamento assintótico do gráfico é verificado quando $x \rightarrow -\infty$, pelo que, pela definição de assíntota, $y = ax + b$ é uma assíntota do gráfico de f se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

Calculando o valor do limite, temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + b + e^x - ax - b) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

Pelo que podemos concluir que a reta de equação $y = ax + b$ é uma assíntota oblíqua do gráfico de f

Exame – 2010, 1ª Fase

39. Como a função f é contínua em \mathbb{R} , porque resulta de operações entre funções contínuas em \mathbb{R} , o gráfico de f não tem qualquer assíntota vertical.

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de f , de equação $y = mx + b$, quando $x \rightarrow -\infty$, vem que:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + 4x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} (4xe^{-x}) = \\ &= \frac{3}{-\infty} + 4 \times (-\infty) \times e^{-(-\infty)} = 0 + 4 \times (-\infty) \times e^{+\infty} = 4 \times (-\infty) \times (+\infty) = -\infty \end{aligned}$$

Pelo que não existe qualquer assíntota não vertical do gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de f , de equação $y = mx + b$, quando $x \rightarrow +\infty$, vem que:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + 4x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} (4xe^{-x}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} + 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} + 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} + 4 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{3}{+\infty} + 4 \times \frac{1}{+\infty} = 0 + 4 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + 4x^2 e^{-x} - 0 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + 4 \times \frac{x^2}{e^x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{e^x} \right) = 3 + 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} \right) = 3 + 4 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}}}_{\text{Lim. Notável}} = \\ &= 3 + 4 \times \frac{1}{+\infty} = 3 + 4 \times 0 = 3 \end{aligned}$$

Assim, verificámos que a reta de equação $y = 3$ é assíntota do gráfico de f , quando $x \rightarrow +\infty$, e de forma mais abrangente, que esta é a única assíntota do gráfico desta função.

Teste Intermédio 12º ano – 19.05.2010



40. Como o domínio da função é \mathbb{R}^+ e a reta de equação $y = 1$ é assíntota do gráfico de f , então temos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

E assim, vem que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - f(x) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(\frac{\ln x}{x} \right)}_{\text{Lim. Notável}} - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 - 1 = -1$$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12º ano – 15.03.2010
Teste Intermédio 12º ano – 11.03.2009

41. Como o domínio da função é \mathbb{R}^+ e o seu gráfico tem uma assíntota oblíqua, ou seja, uma reta de equação $y = mx + b$, então vem que:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{-x} + x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{xe^{-x}}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{-x} + 1 + \frac{1}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = e^{-\infty} + 1 + \frac{1}{+\infty} = 0 + 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x} + x + 1 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x} + 1) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x}} \right) + 1 = \frac{1}{\underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}} + 1 = \\ &= \frac{1}{+\infty} + 1 = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

E assim, vem que a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de f é $y = x + 1$

Teste Intermédio 12º ano – 15.03.2010



42. Como a função g é contínua em \mathbb{R} , porque resulta de operações entre funções contínuas em \mathbb{R} , o gráfico de g não tem qualquer assíntota vertical.

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de g , de equação $y = mx + b$, quando $x \rightarrow -\infty$, vem que:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 3}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{xe^x} + \frac{3}{xe^x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{3e^{-x}}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-3e^{-x}}{-x} \right) = \frac{1}{-\infty} - 3 \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{-x}}{-x} \right) = 0 - 3 \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{-x}}{-x} \right) = \end{aligned}$$

(fazendo $y = -x$, temos que se $x \rightarrow -\infty$, então $y \rightarrow +\infty$)

$$= -3 \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^y}{y} \right)}_{\text{Lim. Notável}} = -3 \times (+\infty) = -\infty$$

Logo, não o gráfico de g não tem assíntotas não verticais, quando $x \rightarrow -\infty$

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de g , de equação $y = mx + b$, quando $x \rightarrow +\infty$, vem que:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{xe^x} + \frac{3}{xe^x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{xe^x} \right) = \frac{1}{+\infty} + \frac{3}{+\infty \times (+\infty)} = 0 + \frac{3}{+\infty} = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 0 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x + 3}{e^x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{e^x} + \frac{3}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{e^x} \right) = 1 + \frac{3}{+\infty} = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

E assim, vem que o gráfico de g só tem uma assíntota e a sua equação é $y = 1$

Exame – 2009, Ép. especial

43. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ é o declive da assíntota do gráfico de f , ou seja o declive da reta r

Como os pontos de coordenadas $(0, -1)$ e $(1, 0)$, pertencem à assíntota, então o seu declive é

$$m_r = \frac{0 - (-1)}{1 - 0} = \frac{1}{1} = 1$$

E assim, vem que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m_r = 1$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2009, 2ª Fase



44. Como a função h resulta de operações entre funções contínuas, em \mathbb{R}^- e em \mathbb{R}^+ é contínua em \mathbb{R}^- e em \mathbb{R}^+ , pelo que a única reta que pode ser assíntota vertical do gráfico de h é a reta de equação $x = 0$

Para averiguar se a reta de equação $x = 0$ é assíntota do gráfico de h , vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x^2 + 4} - x) = \sqrt{0^2 + 4} - 0 = \sqrt{4} = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2(e^{2x} - 1)}{2 \times x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 2 \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{2x} =$$

(fazendo $y = 2x$, temos que se $x \rightarrow 0^-$, então $y \rightarrow 0^-$)

$$= 2 \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 \times 1 = 2$$

E assim, como $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = 2$, então a reta de equação $x = 0$ não é assíntota do gráfico de h

Para averiguar se existem assíntotas horizontais do gráfico de h , vamos calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - x) = \sqrt{+\infty + 4} - (+\infty) = +\infty - \infty$ (indeterminação)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - x)(\sqrt{x^2 + 4} + x)}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = \frac{4}{\sqrt{+\infty + 4} + \infty} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \frac{e^{2(-\infty)} - 1}{-\infty} = \frac{0 - 1}{-\infty} = 0$

Desta forma, como $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$, temos que a reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de h (quando $x \rightarrow +\infty$ e também quando $x \rightarrow -\infty$).

Exame - 2009, 2ª Fase

45. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 0$, pela definição assíntota, temos que a reta definida pela equação $y = 2x$ é assíntota do gráfico de f , quando $x \rightarrow +\infty$ e assim, como o declive da assíntota é 2, podemos afirmar que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

Desta forma, averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de g , de equação $y = mx + b$, quando $x \rightarrow +\infty$, vem que:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + \frac{x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} x = 2 + (+\infty) = +\infty$$

Logo, como o domínio de g é \mathbb{R}^+ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ não é um valor finito, então podemos concluir que o gráfico de g não tem assíntotas oblíquas.

Exame - 2009, 1ª Fase



46. Como $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ sabemos que para valores próximos de x arbitrariamente próximos de zero, o gráfico da função está arbitrariamente próximo do semieixo negativo das ordenadas, ou seja, apenas as opções (A) e (D) são compatíveis com esta informação.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) = 0$ então a reta de equação $y = x$ é assíntota do gráfico de g , quando $x \rightarrow +\infty$, pelo que, de entre as opções apresentadas, a única representação gráfica compatível com as informações conhecidas é a da opção (D).

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12º ano – 11.03.2009

47. Como a função é contínua no intervalo $] -\infty, 1[$ e também no intervalo $[1, +\infty[$, a reta de equação $x = 1$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f .

Podemos ainda observar que, como a função está definida para $x = 1$, temos que $f(1)$ é um valor finito, e assim, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, pelo que, se a reta $x = 1$ é uma assíntota do gráfico de f , então o comportamento assintótico só está presente quando $x \rightarrow 1^-$, pelo que, para averiguar esta hipótese vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 3}{x^2 - 2x + 1} = \frac{3 - 3}{1 - 2 + 1} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x^2 - 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x + 1)}{(x - 1)} = \frac{3(1^- + 1)}{(1^- - 1)} = \frac{3 \times 2}{0^-} = -\infty$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ concluímos que a reta $x = 1$ é assíntota do gráfico de f

Para averiguar à existência de assíntotas horizontais do gráfico de f , vamos calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 3}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 = 3$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x) - e^{1-x}) = \ln(+\infty) - e^{1-\infty} = +\infty - e^{-\infty} = +\infty - 0^+ = +\infty$

Pelo que podemos concluir que a reta de equação $y = 3$ é uma assíntota do gráfico de f (quando $x \rightarrow -\infty$) e que não existe assíntota horizontal do gráfico quando $x \rightarrow +\infty$

Teste Intermédio 12º ano – 11.03.2009

48. Como $y = -1$ é a única assíntota do gráfico da função f , e pela observação da figura, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

E assim, vem que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 3}{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)} = \frac{3}{-1} = -3$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2008, 2ª Fase

49. Como a reta de equação $y = -x - 1$, é assíntota do gráfico de f quando x tende para $-\infty$, pela definição de assíntota, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x - 1)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x + 1) = 0$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2008, 1ª Fase



50. Como a reta de equação $y = \frac{1}{3}x + 2$ é assíntota do gráfico de f , e o domínio de f é \mathbb{R}^+ , temos que o declive da assíntota é:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{3}$$

E assim, averiguando a existência de uma assíntota horizontal do gráfico de h , quando $x \rightarrow +\infty$, vem que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

Pelo que a reta de equação $y = 3$ é uma assíntota horizontal do gráfico de h

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12º ano – 29.04.2008

51. Como a reta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico da função g , e pela observação do gráfico, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty \text{ e que } \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty$$

Como a função h é definida por $h(x) = x - 1$, temos que $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$

Logo:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x)}{\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)} = \frac{0}{+\infty} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)}{\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)} = \frac{0}{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

E assim, como os limites laterais são iguais, temos que: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2007, 2ª fase

52. Por observação do gráfico, e como o eixo Ox é assíntota do gráfico de f , temos que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$

Pelo que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(0^+) = -\infty \quad (1)$$

Da mesma forma, como a reta de equação $y = 1$ é assíntota do gráfico de f , e pela observação do gráfico, podemos constatar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1^+$

E assim:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1^+) = 0^+ \quad (2)$$

Podemos ainda observar que $f(0) = k, k > 1$, pelo que:

$$g(0) = \ln(f(0)) = \ln k$$

E como $k > 1$, então $\ln(k) > 0 \Leftrightarrow g(0) > 0$ (3)

Assim, podemos observar que:

- A função representada pelo gráfico da opção (A) não satisfaz a condição (1)
- A função representada pelo gráfico da opção (B) não satisfaz a condição (3)
- A função representada pelo gráfico da opção (D) não satisfaz a condição (2) nem a condição (3)

Resposta: **Opção C**

Exame – 2007, 1ª Fase



53. Como a reta de equação $y = 2x + 3$ é assíntota do gráfico de g , e o domínio da função é \mathbb{R}^+ , temos que:

- $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$
- $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x) = 3$

E assim, vem que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{g(x)}{x} \times (g(x) - 2x) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x) = 2 \times 3 = 6$$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12º ano – 15.03.2007

54. Pela observação do gráfico, e como:

- o domínio da função é $] - \infty, 1[$ e a reta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico de f , temos que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$
- o domínio da função é $] - \infty, 1[$ e a reta de equação $y = 0$ é assíntota do gráfico de f , temos que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$
- a origem do referencial pertence ao gráfico da função, então $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0^+$

Assim, sobre a função $\frac{1}{f}$ podemos afirmar que:

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{f} \right) (x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} 1}{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$, pelo que podemos rejeitar a opção (A)
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{f} \right) (x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 1}{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$, pelo que podemos rejeitar a opção (C)
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{f} \right) (x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} 1}{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$, pelo que podemos rejeitar a opção (D)

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12º ano – 15.03.2007



55. Como a função é contínua no intervalo $]0,1[$ e também no intervalo $[1, +\infty[$, as retas de equação $x = 1$ e $x = 0$ são as únicas retas verticais que podem ser assíntotas do gráfico de f .

Podemos ainda observar que, como a função está definida para $x = 1$, temos que $f(1)$ é um valor finito, e assim, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, pelo que, se a reta $x = 1$ é uma assíntota do gráfico de f , então o comportamento assintótico só está presente quando $x \rightarrow 1^-$, pelo que, para averiguar estas hipóteses vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{0^+}{\ln(0^+)} = \frac{0^+}{-\infty} = 0^+$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{\ln(1^-)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

E assim concluímos que a reta de equação $x = 0$ não é assíntota do gráfico de f , mas a reta $x = 1$ é.

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de f , de equação $y = mx + b$, quando $x \rightarrow +\infty$, vem que:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{2-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2-x} = e^{2-(+\infty)} = e^{-\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{2-x} - 0 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{2-x}) = +\infty \times e^{2-\infty} = +\infty \times 0 = 0$$

Desta forma concluímos que a reta de equação $y = 0x + 0$, ou seja a reta definida por $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f e como o domínio de f é \mathbb{R}^+ podemos concluir que esta é a única assíntota não vertical do gráfico de f

Exame – 2006, Ép. especial

56. Como a função é contínua no intervalo $]1, +\infty[$, a reta de equação $x = 1$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f . Para averiguar esta hipótese vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + x \ln(x - 1)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x(1 + \ln(x - 1))) = 1(1 + \ln(1^+ - 1)) = \\ &= 1 + \ln(0^+) = 1 - \infty = -\infty \end{aligned}$$

Assim concluímos que a reta de equação $x = 1$ é a única assíntota vertical do gráfico de f

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de f , de equação $y = mx + b$, quando $x \rightarrow +\infty$, vem que:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x \ln(x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{x \ln(x - 1)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln(x - 1)) = \\ &= 1 + \ln(+\infty - 1) = 1 + \ln(+\infty) = 1 + \infty = +\infty \end{aligned}$$

Logo, como o domínio de f é $]1, +\infty[$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ não é um valor finito, então podemos concluir que o gráfico de f não tem assíntotas oblíquas.

Exame – 2006, 2ª fase



57. Como a função f é contínua, então a função $g(x) = xf(x)$ também é contínua, por se tratar de um produto de funções contínuas, pelo que o gráfico de g não admite qualquer assíntota vertical.

Como a reta de equação $y = x$ é assíntota do gráfico de f , quer quando $x \rightarrow +\infty$, quer quando $x \rightarrow -\infty$, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

E assim vem que:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xf(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Como nem $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x}$, nem $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ são valores finitos podemos concluir que também não existe qualquer assíntota não vertical do gráfico de g .

Exame – 2006, 1ª fase

58. Como a função é contínua no intervalo $]0, +\infty[$, a reta de equação $x = 0$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f . Para averiguar esta hipótese vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln x}{x} = \frac{1 - \ln(0^+)}{0^+} = \frac{1 - (-\infty)}{0^+} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

E assim concluímos que a reta de equação $x = 0$ é a única assíntota vertical do gráfico de f

Averiguando a existência de uma assíntota horizontal do gráfico de f , quando $x \rightarrow +\infty$ (porque o domínio de f é $]0, +\infty[$), vem que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{x} = \frac{1 - (+\infty)}{+\infty} = \frac{-\infty}{+\infty} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{1}{+\infty} - 0 = 0 - 0 = 0$$

Pelo que se concluí que a reta de equação $y = 0$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f

Teste Intermédio 12º ano – 17.03.2006

59. Como a reta de equação $y = x + 2$ é assíntota do gráfico de g , então temos que:

- $m_g = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$
- $b_g = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - mx) = 2$

Assim, relativamente à assíntota não vertical da função h , vem que:

$$m_h = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{g(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{xg(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{g(x)}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$b_h = \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{g(x)} - 1 \times x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{g(x)} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{g(x)} - \frac{xg(x)}{g(x)} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - xg(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x(x - g(x))}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{g(x)} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - g(x)) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{g(x)}{x}} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (-(g(x) - x)) = \frac{1}{1} \times \left(- \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) \right) = 1 \times (-2) = -2$$

Desta forma concluímos que a reta de equação $y = x - 2$ é uma assíntota horizontal do gráfico de h .

Teste Intermédio 12º ano – 17.03.2006



60. Averiguando a existência de assíntotas verticais do gráfico de f , temos que, como a função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f é a reta de $x = 3$.

Como

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-2}{x-3} = \frac{3^+ - 2}{3^+ - 3} = \frac{1}{0^+} = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-2}{x-3} = \frac{3^- - 2}{3^- - 3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

vem que a reta de equação $x = 3$ é a única assíntota vertical do gráfico de f .

Relativamente à existência de assíntotas horizontais do gráfico de f , temos que, como

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

então a reta de equação $y = 1$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f .

Resposta: **Opção C**

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)

61. Como a função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ e $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 3$, então não existem assíntotas verticais do gráfico de f .

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ então a reta de equação $y = 2$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f .

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$ então a reta de equação $y = x$ também é uma assíntota do gráfico de f .

Resposta: **Opção A**

Exame – 2005, 1ª fase (cód. 435)

62. Temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + x}{x} = 4 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{g(x)}{x} + \frac{x}{x} \right) = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{g(x)}{x} + 1 \right) = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} + 1 = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 4 - 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 3 \end{aligned}$$

Como o gráfico de g tem uma assíntota oblíqua, e o domínio de g é \mathbb{R}^+ , então, o declive da assíntota é 3. Desta forma, de entre as opções apresentadas, apenas a reta de equação $y = 3x$ pode ser assíntota do gráfico de g .

Resposta: **Opção B**

Exame – 2004, Ép. especial (cód. 435)



63. Como a função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, a reta de equação $x = 0$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f . Para averiguar esta hipótese vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 1$$

Assim, como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ é um valor finito, podemos concluir que não existem assíntotas verticais do gráfico de f , ou seja, paralelas ao eixo das ordenadas.

Para averiguar a existência de assíntotas paralelas ao eixo das abcissas, vamos calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^{-\infty} - 1}{-\infty} = \frac{0^+ - 1}{-\infty} = \frac{-1}{-\infty} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} \right) = \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \\ &= +\infty - \frac{1}{+\infty} = +\infty - 0 = +\infty \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f , quando $x \rightarrow -\infty$ e que não existe qualquer assíntota do gráfico de f , quando $x \rightarrow +\infty$, pelo que a reta $y = 0$ é a única assíntota do gráfico de f paralela a um dos eixos coordenados, nomeadamente o eixo das abcissas.

Exame – 2004, 2ª Fase (cód. 435)

64. Como o gráfico de h é simétrico relativamente ao eixo Oy , e tem uma única assíntota vertical, então essa assíntota é a reta de equação $x = 0$

Assim, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$$

Ou, mais simplesmente $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \infty$

Logo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{g} \right) = \infty$$

Pelo que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, e, como a função g é contínua, então $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$, pelo que,

$$g(0) = 0$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)



65. Por observação do gráfico de f , temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = k, k \in \mathbb{R}^+$$

Desta forma, relativamente à função g , temos que:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 0^-} x} = \frac{k}{0^-} \underset{k > 0}{=} -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 0^+} x} = \frac{k}{0^+} \underset{k > 0}{=} +\infty$

Temos ainda que:

- Como a bissetriz dos quadrantes pares (reta de declive -1) é assíntota do gráfico de f , quando $x \rightarrow -\infty$, então $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$
- Como a bissetriz dos quadrantes ímpares (reta de declive 1) é assíntota do gráfico de f , quando $x \rightarrow +\infty$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

Desta forma, podemos verificar que o gráfico da opção (A) é o único que satisfaz cumulativamente as quatro condições estabelecidas.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2003, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 435)

66. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2}$ então a única assíntota do gráfico de g é uma reta não vertical de declive $\frac{1}{2}$

Desta forma verificamos que o gráfico da opção (D) é a único que satisfaz esta condição, porque o gráfico da opção (A) tem uma assíntota cujo declive é zero, o gráfico da opção (B) tem pelo menos uma assíntota vertical e o gráfico da opção (C) tem uma assíntota de declive negativo.

Resposta: **Opção D**

Exame – 2003, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

67. Como o domínio de h é $[0,5[\cup]5, +\infty[$ e a reta de equação $y = 3$ é assíntota do gráfico de h , então:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 3$$

Assim, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{3 + e^{-x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + e^{-x})} = \frac{3}{3 + e^{-\infty}} = \frac{3}{3 + 0^+} = \frac{3}{3} = 1$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2003, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)



68. Averiguado a veracidade das afirmações apresentadas, temos:

- Como a reta de equação $x = 2$ é uma assíntota do gráfico de f , e o domínio de f é $[0, +\infty[$, então temos que f não é contínua em $x = 2$, ou seja não é contínua em todo o seu domínio.
- Como a reta de equação $x = 2$ é uma assíntota do gráfico de f , então $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$, pelo que $\lim_{x \rightarrow 2} |f(x)| = +\infty$, o que significa que a função $|f|$ não tem um máximo absoluto.
- Como a reta de equação $x = 2$ é uma assíntota do gráfico de f , então $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$, pelo que $\lim_{x \rightarrow 2} (-f(x)) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow 2} (-f(x)) = +\infty$, o que significa que a reta de equação $x = 2$ também é uma assíntota vertical do gráfico de $-f$.
- Como a reta de equação $y = 1$ é uma assíntota do gráfico de f , e o domínio de f é $[0, +\infty[$, então temos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, o que significa que não existem assíntotas oblíquas do gráfico de f .

Resposta: **Opção C**

Exame – 2002, Prova para militares (cód. 435)

69. Como a função é contínua em \mathbb{R} , não existem assíntotas paralelas ao eixo das ordenadas, ou seja não existe qualquer assíntota vertical do gráfico de f .

Averiguando a existência de assíntotas paralelas ao eixo das abcissas, temos que:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3} + 2e^{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3} + \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^{1-x}) = \frac{1}{3} + 2e^{1-(-\infty)} = \frac{1}{3} + 2e^{1+\infty} = \frac{1}{3} + \infty = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} + 2e^{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} + \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^{1-x}) = \frac{1}{3} + 2e^{1-(+\infty)} = \frac{1}{3} + 2e^{-\infty} = \frac{1}{3} + 0^+ = \frac{1}{3}$

Assim temos que não existe qualquer assíntota horizontal quando $x \rightarrow -\infty$, e a reta de equação $y = \frac{1}{3}$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f , quando $x \rightarrow +\infty$

Exame – 2002, 2ª Fase (cód. 435)

70. Como a reta de equação $y = 2$ é assíntota do gráfico de h , e o domínio da função é domínio \mathbb{R}^- , então:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 2$$

E assim, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{e^x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2002, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 435)

71. Averiguado a existência de uma assíntota horizontal do gráfico de f , quando $x \rightarrow -\infty$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (0,1 + 0,2e^{0,3x}) = 0,1 + 0,2e^{0,3(-\infty)} = 0,1 + 0,2e^{-\infty} = 0,1 + 0,2 \times 0 = 0,1$$

Pelo que a reta de equação $y = 0,1$ é uma assíntota do gráfico de f

Resposta: **Opção B**

Exame – 2002, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)



72. Como as funções f e g estão ambas definidas e são contínuas em \mathbb{R} , então (como a soma de funções contínuas também é uma função contínua) a função $f + g$ também está definida no mesmo domínio e também é contínua em \mathbb{R} , pelo que não existe qualquer assíntota vertical do gráfico da função $f + g$.

Averiguando a existência de uma assíntota do gráfico de $f + g$, de equação $y = mx + b$, quando $x \rightarrow -\infty$, vem que:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(f+g)(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{x} + \frac{x}{x} - \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{x} + 1 - \frac{2}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = \frac{e^{-\infty}}{-\infty} + 1 - \frac{2}{-\infty} = \frac{0^+}{-\infty} + 1 - 0^- = 0 + 1 - 0 = 1 \\ b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} ((f+g)(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x - 2 - 1 \times x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 2) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = e^{-\infty} - 2 = 0^+ - 2 = -2 \end{aligned}$$

Desta forma, concluímos que a reta de equação $y = 1 \times x - 2$, ou seja a reta r é assíntota do gráfico da função $f + g$, quando $x \rightarrow -\infty$

Averiguando a existência de outra assíntota do gráfico de $f + g$, de equação $y = mx + b$, quando $x \rightarrow +\infty$, vem que:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f+g)(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} + \frac{x}{x} - \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} + 1 - \frac{2}{x} \right) = \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = +\infty + 1 - \frac{2}{+\infty} = +\infty + 1 - 0^+ = +\infty \end{aligned}$$

Logo, como $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((f+g)(x) - mx)$ não é um valor finito, então podemos concluir que o gráfico de $f + g$ não tem outra assíntota quando $x \rightarrow +\infty$, ou seja, que a única assíntota do gráfico de $f + g$ é a reta r .

Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)

73. Como a bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja uma reta de declive 1, é uma assíntota do gráfico de g , temos que:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$$

Assim, calculando $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$, vem que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{g(x)}{x} \times \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 1 \times \frac{1}{+\infty} = 1 \times 0^+ = 0$$

Ou seja, a reta de equação $y = 0$, ou seja, o eixo Ox é uma assíntota do gráfico de h .

Exame – 2001, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 435)



74. Como a função está definida em \mathbb{R}^+ e é contínua no domínio, $x = 0$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f .

Como

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x - 2 \ln x) = 3 \times 0^+ - 2 \ln(0^+) = 0 - 2 \times (-\infty) = +\infty$$

vem que a reta de equação $x = 0$ é a única assíntota vertical do gráfico de f .

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de f , de equação $y = mx + b$, quando $x \rightarrow +\infty$, vem que:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x}{x} - \frac{2 \ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - 2 \frac{\ln x}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \frac{\ln x}{x} \right) = 3 - 2 \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 3 - 2 \times 0 = 3 \end{aligned}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 2 \ln x - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 \ln x) = -2 \times \ln(+\infty) = -2 \times +\infty = -\infty$$

Logo, como o domínio de f é \mathbb{R}^+ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$ não é um valor finito, então podemos concluir que o gráfico de f não tem assíntotas oblíquas.

Exame – 2001, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

75. Como a função está definida para $t \geq 0$ e é contínua para estes valores, $t = 0$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f .

Como

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{5}{1 + 124e^{-0,3t}} = \frac{5}{1 + 124e^{-0,3 \times 0}} = \frac{5}{1 + 124e^0} = \frac{5}{1 + 124 \times 1} = \frac{5}{125} = \frac{1}{25}$$

vem que a reta de equação $t = 0$ não é assíntota vertical do gráfico de f .

Averiguando a existência de assíntotas quando $t \rightarrow +\infty$, temos:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5}{1 + 124e^{-0,3t}} = \frac{5}{1 + 124e^{-0,3 \times (+\infty)}} = \frac{5}{1 + 124e^{-\infty}} = \frac{5}{1 + 124 \times 0} = \frac{5}{1} = 5$$

E assim podemos concluir que a única assíntota do gráfico de f é a reta de equação $y = 5$

No contexto do problema, esta conclusão significa que para valores arbitrariamente grandes de t , a função toma valores arbitrariamente próximos de 5, ou seja, com o passar do tempo o número de habitantes de Malmequeres de Baixo que sabiam do acidente aproxima-se muito de 5 milhares.

Exame – 2001, Prova modelo (cód. 435)

76. Sendo $y = mx + b$ a equação da reta s , como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$, então temos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$$

Ou seja, temos que a reta s é uma assíntota do gráfico de f

Resposta: **Opção D**

Exame – 2000, 2ª Fase (cód. 435)



77. Como a função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, a reta de equação $x = 1$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f . Averiguando se esta reta, é, de facto, uma assíntota, temos que:

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^1}{1^+ - 1} = \frac{e}{0^+} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^1}{1^- - 1} = \frac{e}{0^-} = -\infty$

Logo, temos que a reta de equação $x = 1$ é a única assíntota vertical do gráfico de f

Averiguando a existência de assíntotas horizontais, temos que:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^{-\infty}}{-\infty - 1} = \frac{0^+}{-\infty} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^{+\infty}}{+\infty - 1} = \frac{+\infty}{+\infty}$ (Indeterminação)

(fazendo $y = x - 1$, temos $x = y + 1$ e se $x \rightarrow +\infty$, então $y \rightarrow +\infty$)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x-1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^{y+1}}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^y}{y} + \frac{1}{y} \right) = \\ &= \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} = +\infty + \frac{1}{+\infty} = +\infty + 0 = +\infty \end{aligned}$$

E assim temos que a função só tem uma assíntota horizontal (quando $x \rightarrow -\infty$) que é a reta de equação $y = 0$

Exame – 2000, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 435)

78. Como o domínio de f é \mathbb{R}^+ e o eixo Ox é assíntota do gráfico de f , temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$$

Assim, averiguando a existência de uma assíntota horizontal do gráfico de $\frac{1}{f}$, vem:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{f} \right) (x) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{f} \right) (x)$ não é um valor finito e o domínio de f é \mathbb{R}^+ , então não existe qualquer assíntota horizontal do gráfico de $\frac{1}{f}$

Exame – 2000, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

79. Como $f(0) = 1$ e f é estritamente crescente, então, para que a bissetriz dos quadrantes ímpares seja assíntota do gráfico de f , temos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Como $f(0) = 1$ e f é estritamente crescente, então, para que a o eixo Ox seja assíntota do gráfico de f , temos que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$$

Assim, como f é estritamente crescente, temos que o contradomínio de f é $]0, +\infty[$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2000, Prova modelo (cód. 435)



80. Como $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = +\infty$, então a reta de equação $x = 3$ é uma assíntota vertical do gráfico da função g

Resposta: **Opção B**

Exame – 2000, Prova para militares (cód. 135)