MATEMÁTICA A - 12º Ano
Funções - Teorema de Bolzano
Propostas de resolução

Exercícios de exames e testes intermédios

1. Determinando as coordenadas dos pontos P e Q, em função de a são, respetivamente $P\big(a,h(a)\big) = P\left(a,\frac{\ln a}{a}\right)$ e $Q\big(2a,h(2a)\big) = Q\left(2a,\frac{\ln(2a)}{2a}\right)$, temos que o declive da reta PQ é dado por:

$$m_{PQ} = \frac{\frac{\ln(2a)}{2a} - \frac{\ln a}{a}}{2a-a} = \frac{\frac{\ln(2a)}{2a} - \frac{2\ln a}{2a}}{a} = \frac{\frac{\ln(2a)-2\ln a}{2a}}{a} = \frac{\ln(2a) - \ln\left(a^2\right)}{2a^2} = \frac{\ln\left(\frac{2a}{a^2}\right)}{2a^2} = \frac{\ln\left(\frac{2}{a}\right)}{2a^2}$$

De acordo com a sugestão, o triângulo da figura é isósceles quando a reta PQ é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja, se tem declive igual a 1.

Assim, o triângulo é isósceles se: $m_{PQ} = 1 \Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{2}{a}\right)}{2a^2} = 1$

Desta forma, provar que existe pelo menos um valor de $a \in \left[\frac{1}{2},1\right]$ a que corresponde um triângulo isósceles, é equivalente a mostrar que, dada a função $f(x) = \frac{\ln\left(\frac{2}{x}\right)}{2x^2}$, definida em $\left[\frac{1}{2},1\right]$, existe $a \in \left[\frac{1}{2},1\right]$, tal que $f(a) = 1$

Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\left[\frac{1}{2},1\right]$, é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

Como $\frac{\ln 2}{2} < 1 < 2\ln 4$, ou seja, $f(1) < 1 < f\left(\frac{1}{2}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $a \in \left]\frac{1}{2},1\right[$ tal que $f(a) = 1$.

C.A.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln\left(\frac{2}{\frac{1}{2}}\right)}{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\ln 4}{2\times\frac{1}{4}} = \frac{\ln 4}{\frac{1}{2}} = 2\ \ln 4$$

Como $e < 4^2$, vem:
$e < 4^2 \Leftrightarrow \ln e < \ln(4^2) \Leftrightarrow \ln e < 2\ln(4) \Leftrightarrow 1 < 2\ln(4)$
Ou seja: $1 < f\left(\frac{1}{2}\right)$

$$f(1) = \frac{\ln\left(\frac{2}{1}\right)}{2\times 1^2} = \frac{\ln 2}{2}$$

Logo, como $2 < e^2$, vem:

$$2 < e^2 \Leftrightarrow \ln 2 < \ln(e^2) \Leftrightarrow \ln 2 < 2\ln e \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} < \frac{2\ln e}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} < \frac{2\times 1}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} < 1$$

Ou seja: $f(1) < 1$

Exame – 2018, 1ª Fase

2. Começamos por notar que: $g(x) = x + 1 \Leftrightarrow g(x) - x - 1 = 0$

   Assim, considerando $f(x) = g(x) - x - 1$, temos que:
   - provar que a equação $g(x) = x + 1$ é possível no intervalo $]a,g(a)[$, é equivalente a,
   - provar que a equação $f(x) = 0$ é possível no intervalo $]a,g(a)[$

   Como, a função g é contínua em $\mathbb{R}$, então a função f também é contínua $\mathbb{R}$, porque resulta de operações sucessivas de funções contínuas, e, em particular é contínua no intervalo $[a,g(a)]$.

   Cálculos auxiliares:

   - $f(a) = g(a) - a - 1 = g(a) - (a + 1)$
     Como $g(a) > a + 1$, então:

     $$g(a) > a + 1 \Leftrightarrow g(a) - (a + 1) > a + 1 - (a + 1) \Leftrightarrow g(a) - (a + 1) > 0 \Leftrightarrow f(a) > 0 \Leftrightarrow 0 < f(a)$$

   - Como $(g \circ g)(x) = x, \forall x \in \mathrm{R}$, então, $(g \circ g)(a) = a$, e assim:

     $$f\big(g(a)\big) = g\big(g(a)\big) - g(a) - 1 = (g \circ g)(a) - g(a) - 1 = a - g(a) - 1 = -g(a) + a - 1$$

     Como $g(a) > a + 1$, então:

     $$g(a) > a + 1 \Leftrightarrow -g(a) < -(a + 1) \Leftrightarrow -g(a) + (a + 1) < 0 \Leftrightarrow -g(a) + a + 1 - 2 < -2 \Leftrightarrow$$

     $$\Leftrightarrow -g(a) + a - 1 < -2 \Leftrightarrow f\big(g(a)\big) < -2 \Rightarrow f\big(g(a)\big) < 0$$

   Como $-1 < 0 < f(a)$, ou seja, $f\big(g(a)\big) < 0 < f(a)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]a,g(a)[$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, que a equação $f(x) = 0$ tem, pelo menos, uma solução em $]a,g(a)[$, ou, de forma equivalente, que a equação $g(x) = x + 1$ é possível no intervalo $]a,g(a)[$

Exame – 2016, 2ª Fase

3. Como, no intervalo $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas é uma função contínua neste intervalo, e, por isso, também é contínua em $[1, e]$, porque $[1, e] \subset \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

   Como $1 < 3 < e+1$, ou seja, $f(1) < 3 < f(e)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]1, e[$ tal que $f(c) = 3$, ou seja, que a equação $f(x) = 3$ tem, pelo menos, uma solução em $]1, e[$, ou seja, a equação $f(x) = 3$ é possível em $]1, e[$

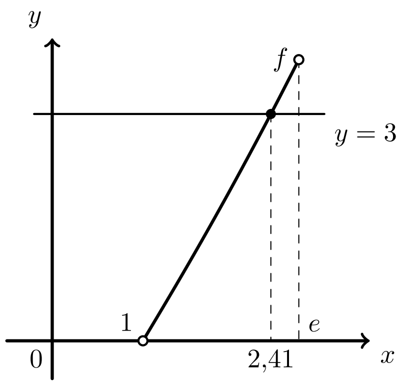
   C.A.

   $f(1) = (1 + 1)\ln 1 = 2 \times 0 = 0$

   $f(e) = (e + 1)\ln e = (e + 1) \times 1 = e + 1 \approx 3{,}72$

   Desta forma, visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função f, numa janela compatível com o intervalo $]1, e[$, e a reta $y = 3$ (reproduzidos na figura ao lado), podemos observar que a equação $f(x) = 3$ tem uma única solução no intervalo dado.

   Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos um valor aproximado da abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos, ou seja, a solução da equação $f(x) = 3$, cujo valor numérico, aproximado às centésimas, é 2,41



Exame – 2015, 1ª Fase

4.

Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $]-\infty,0[$, é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $[-e,-1]$.

Como $-4{,}09 < -e < -2$, ou seja, $f(-e) < -e < f(-1)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]-e,-1[$ tal que $f(c) = -e$, ou seja, que a equação $f(x) = -e$ tem, pelo menos, uma solução em $]-e,-1[$

C.A.

$$f(-e) = -e - 1 + \frac{\ln(-(-e))}{-e} = -e - 1 - \frac{\ln(e)}{e} \approx -4{,}09$$

$$f(-1) = -1 - 1 + \frac{\ln(-(-1))}{-1} = -2 - \ln(1) = -2 - 0 = -2$$

$$-e \approx -2{,}72$$

Exame – 2014, 2ª Fase

5. Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}$, é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $[0,1]$.

Como o teorema de Bolzano garante que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]0{,}1[$, então, pelo hipótese do teorema de Bolzano, sabemos que zero está compreendido entre $f(0)$ e $f(1)$, e pelo corolário do teorema de Bolzano temos que $f(0) \times f(1) < 0$

Assim, temos que $f(0) = ke^0 + 0 = k \times 1 = k$ e $f(1) = ke^1 + 1 = ke + 1$

Calculando os zeros de $f(0) \times f(1)$, temos

$$f(0) \times f(1) = 0 \Leftrightarrow k \times (ke+1) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \lor ke + 1 = 0 \Leftrightarrow k = 0 \lor k = -\frac{1}{e}$$

E, estudando o sinal de $f(0) \times f(1)$ vem que:

k	$-\infty$	$-\frac{1}{e}$		0	$+\infty$
k	-	-	-	0	+
$ke+1$	-	0	+	+	+
$f(0) \times f(1)$	+	0	-	0	+

Pelo que verificamos que $f(0) \times f(1) < 0$ se $k \in \left]-\frac{1}{e}, 0\right[$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2014, 1ª Fase

6. Como, a função f é contínua em $[-e,1]$, e como $1 < \frac{e}{2} < e$, ou seja, $f(-e) < \frac{e}{2} < f(1)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]-e,1[$ tal que $f(c) = \frac{e}{2}$, ou seja, que a equação $f(x) = \frac{e}{2}$ tem, pelo menos, uma solução em $]-e,1[$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2013, 2ª Fase

7. Como $f(x) = f(x+a) \Leftrightarrow f(x) - f(x+a) = 0$, mostrar que $f(x) = f(x+a)$ tem, pelo menos, uma solução em $]-a,0[$ é equivalente a mostrar que uma função g, de domínio $]-a,0[$, definida por $g(x) = f(x) - f(x+a)$ tem pelo menos um zero, visto que

$$f(x) = f(x+a) \Leftrightarrow f(x) - f(x+a) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

Como a função f é contínua em $[-a,a]$ (e também em $[-a,0]$), também é em $[-a,0]$, e $f(x+a)$ é contínua em $[-a,0]$, pelo que podemos garantir que a função g é contínua em $[-a,0]$, por resultar da diferença de duas funções contínuas neste intervalo.

Como $g(0) < 0 < g(-a)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]-a,0[$ tal que $g(c) = 0$, ou seja, que a equação $g(x) = 0$ tem, pelo menos, uma solução em $]-a,0[$, o que é equivalente a provar que a condição $f(x) = f(x+a)$ tem, pelo menos, uma solução em $]-a,0[$

C.A.

$g(-a) = f(-a) - f(-a+a) \underset{f(-a)=f(a)}{=} f(a) - f(0)$

Como $f(a) > f(0)$, então $g(-a) > 0$

$g(0) = f(0) - f(0+a) = f(0) - f(a)$

Como $f(a) > f(0)$, então $g(0) < 0$

Exame – 2013, 1ª Fase

8.

Como a função g resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}^+$, é contínua em $\mathbb{R}^+$, e também, em $\left[\frac{1}{a},\frac{1}{e}\right]$, porque $\left[\frac{1}{a},\frac{1}{e}\right] \subset \mathbb{R}^+$

Como $g\left(\frac{1}{a}\right) < 0 < g\left(\frac{1}{e}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in \left]\frac{1}{a},\frac{1}{e}\right[$ tal que $g(c) = 0$, ou seja, que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $\left]\frac{1}{a},\frac{1}{e}\right[$

C.A.

$g\left(\frac{1}{a}\right) = a \times \frac{1}{a} + \ln\frac{1}{a} = \frac{a}{a} + \ln 1 - \ln a =$

$= 1 + 0 - \ln a = 1 - \ln a$

Como $a > e$, então $\ln a > 1$, logo $g\left(\frac{1}{a}\right) < 0$

$g\left(\frac{1}{e}\right) = a \times \frac{1}{e} + \ln\frac{1}{e} = \frac{a}{e} + \ln 1 - \ln e =$

$= \frac{a}{e} + 0 - 1 = \frac{a}{e} - 1$

Como $a > e$, então $\frac{a}{e} > 1$, logo $g\left(\frac{1}{e}\right) > 0$

Teste Intermédio 12º ano – 24.05.2013

9.

Como a função C resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}_0^+$, é contínua em $\mathbb{R}_0^+$, e também, em $[0,15]$, porque $[0,15] \subset \mathbb{R}_0^+$

Como $0 < 13 < 25{,}102$, ou seja, como $C(0) < 13 < C(15)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $t_0 \in]0,15[$ tal que $C(t_0) = 13$, ou seja que, durante os primeiros 15 minutos após a colocação do produto químico na água, houve, pelo menos, um instante em que a concentração do produto foi 13 gramas por litro.

C.A.

$C(0) = 0{,}5(0)^2 \times e^{-0{,}1\times 0} =$

$= 0 \times e^0 = 0$

$C(15) = 0{,}5(15)^2 \times e^{-0{,}1\times 15} \approx$

$\approx 25{,}102$

Exame – 2012, Ép. especial

10. Como

$$f(x) = -x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^x - 3 = -x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^x - 3 + x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow e^x + x + \frac{3}{2} - \frac{6}{2} = 0 \Leftrightarrow e^x + x - \frac{3}{2} = 0$$

afirmar que a equação $f(x) = -x - \frac{3}{2}$ tem, pelo menos, uma solução, é equivalente a afirmar que a função g, também de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = e^x + x - \frac{3}{2}$ tem, pelo menos, um zero.

Desta forma, como a função g é contínua em $\mathbb{R}$, por ser resultar de operações entre funções contínuas em $\mathbb{R}$, e recorrendo ao corolário do Teorema de Bolzano, podemos analisar cada uma das hipóteses apresentadas:

- Como $g(0) = e^0 + 0 - \frac{3}{2} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$, ou seja $g(0) < 0$ e $g\left(\frac{1}{5}\right) = e^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5} - \frac{3}{2} \approx -0{,}08$, ou seja, $g\left(\frac{1}{5}\right) > 0$, temos que, $g(0) \times g\left(\frac{1}{5}\right) > 0$, e por isso, não é garantida a existência de um zero da função g no intervalo $\left]0, \frac{1}{5}\right[$
- Como $g\left(\frac{1}{5}\right) = e^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5} - \frac{3}{2} \approx -0{,}08$, ou seja, $g\left(\frac{1}{5}\right) < 0$ e $g\left(\frac{1}{4}\right) = e^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \approx 0{,}03$, ou seja, $g\left(\frac{1}{4}\right) > 0$, temos que, $g\left(\frac{1}{5}\right) \times g\left(\frac{1}{4}\right) < 0$, e por isso, é garantida a existência de um zero da função g no intervalo $\left]\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right[$
- Como $g\left(\frac{1}{4}\right) = e^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \approx 0{,}03$, ou seja, $g\left(\frac{1}{4}\right) > 0$ e $g\left(\frac{1}{3}\right) = e^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} \approx 0{,}23$, ou seja, $g\left(\frac{1}{3}\right) > 0$,temos que, $g\left(\frac{1}{4}\right) \times g\left(\frac{1}{4}\right) > 0$, e por isso, não é garantida a existência de um zero da função g no intervalo $\left]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right[$
- Como $g\left(\frac{1}{3}\right) = e^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} \approx 0{,}23$, ou seja, $g\left(\frac{1}{3}\right) > 0$ e $g(1) = e^1 + 1 - \frac{3}{2} \approx 2{,}22$, ou seja, $g(1) > 0$, temos que, $g\left(\frac{1}{3}\right) \times g1) > 0$, e por isso, não é garantida a existência de um zero da função g no intervalo $\left]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right[$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2012, 1ª Fase

11. A continuidade das funções no intervalo $[2,3]$ não é suficiente para afirmar nada sobre a monotonia das funções f e g, pelo que não é possível afirmar nada sobre a monotonia da função $f-g$. Assim não é possível assegurar a veracidade das afirmações das opções (B) e (D).

Como f e g são ambas funções contínuas em [2,3], a função $f-g$ é contínua em [2,3]

Como $(f-g)(3) < 0 < (f-g)(2)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]2,3[$ tal que $(f-g)(c) = 0$

Assim, como

$$(f-g)(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = g(c)$$

Podemos garantir que os gráficos de f e g se intersectam em pelo menos um ponto.

C.A.

$f(2) - g(2) > 0 \Leftrightarrow (f-g)(2) > 0$

$f(3) - g(3) < 0 \Leftrightarrow (f-g)(3) < 0$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12º ano – 24.05.2012

12.

Como a função g resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}^+$, é contínua em $\mathbb{R}^+$, e também, em [1,3], porque $[1,3] \subset \mathbb{R}^+$

Como $3 < 5 < 6$, ou seja, $g(1) < 5 < g(3)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]1,3[$ tal que $g(c) = 5$, ou seja,

$$\exists c \in]1,3[: g(c) = 5$$

C.A.

$g(1) = 1 + f(1) = 1 + 2 + \log_3 1 =$

$= 1 + 2 + 0 = 3$

$g(3) = 3 + f(3) = 3 + 2 + \log_3 3 =$

$= 3 + 2 + 1 = 6$

Teste Intermédio 12º ano – 13.03.2012

13.

Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em [0,2[, é contínua em [0,2[, e também, em $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, porque $\left[0,\frac{1}{2}\right] \subset [0,2[$

Como $-3{,}19 < -3 < -2{,}32$, ou seja, $f(0) < -3 < f\left(\frac{1}{2}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$ tal que $f(c) = -3$, ou seja, que a equação $f(x) = -3$ tem, pelo menos, uma solução em $\left]0,\frac{1}{2}\right[$

C.A.

$$f(0) = \frac{e^{2-0}-1}{0-2} = \frac{e^2-1}{-2} \approx -3{,}19$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{2-\frac{1}{2}}-1}{\frac{1}{2}-2} = \frac{e^{\frac{3}{2}}-1}{-\frac{3}{2}} \approx -2{,}32$$

Exame – 2011, 2ª Fase

14. Analisando cada uma das opções, temos

   - Como $f(0) = 2^0 - 9 = 1 - 9 = -8$ e $f(1) = 2^1 - 9 = 2 - 9 = -7$, não se verifica a condição $f(0) < 0 < f(1)$, pelo que o teorema de Bolzano não permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f no intervalo $]0,1[$
   - Como $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} (2^x - 9) = 2^5 - 9 = 23$ e $f(5) = \dfrac{1-e^5}{5}$, temos que $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) \neq f(5)$, pelo que a função f não é contínua para $x = 5$, logo não é contínua no intervalo $]4,6[$, pelo que o teorema de Bolzano não permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f nesse intervalo
   - Como $f(6) = \dfrac{1-e^6}{6} \approx -67$ e $f(7) = \dfrac{1-e^7}{7} \approx -157$, não se verifica a condição $f(6) < 0 < f(7)$, pelo que o teorema de Bolzano não permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f no intervalo $]6,7[$

   Assim, de entre as opções apresentadas o intervalo]1,4[é o único em que o teorema de Bolzano permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f:

Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em [0,5[, é contínua em [0,5[, e também, em [1,4], porque $[1,4] \subset [0,5[$	C.A.
	$f(1) = 2^1 - 9 = 2 - 9 = -7$
Como $-7 < 0 < 7$, ou seja, $f(1) < 0 < f(4)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]1,4[$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, que existe, pelo menos, um zero da função f no intervalo]1,4[	$f(4) = 2^4 - 9 = 16 - 9 = 7$

   Resposta: **Opção B**

Exame – 2011, 1.ª Fase

15. Como a função f é contínua no intervalo $[-1,4]$, e em todas as opções a função g resulta de somas (ou subtrações) entre a função f e outras contínuas no mesmo intervalo, então, em cada opção a função g é contínua no intervalo $[-1,4]$.
Assim, verificando se zero está compreendido entre $g(-1)$ e $g(2)$, temos

- Opção (A) $g(-1) = 2(-1) + f(-1) = -2 + 3 = 1$
  $g(4) = 2(4) + f(4) = 8 + 9 = 17$
  Logo, $0 \notin]g(-1),g(4)[$

- Opção (B) $g(-1) = 2(-1) - f(-1) = -2 - 3 = -5$
  $g(4) = 2(4) + f(4) = 8 - 9 = -1$
  Logo, $0 \notin]g(-1),g(4)[$

- Opção (C) $g(-1) = (-1)^2 + f(-1) = 1 + 3 = 4$
  $g(4) = (4)^2 + f(4) = 16 + 9 = 25$
  Logo, $0 \notin]g(-1),g(4)[$

Relativamente à opção (D), temos que

$$g(-1) = (-1)^2 - f(-1) = 1 - 3 = -2$$

$$g(4) = (4)^2 - f(4) = 16 - 9 = 7$$

Pelo que, como $-2 < 0 < 7$, ou seja, $g(-1) < 0 < g(4)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]-1,4[$ tal que $g(c) = 0$, ou seja, que existe, pelo menos, um zero da função g no intervalo $]-1,4[$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12º ano – 26.05.2011

16.

Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}$, é contínua em $\mathbb{R}$, e também, em $[-2,-1]$, porque $[-2,-1] \subset \mathbb{R}$

Como $1{,}050 < 1{,}5 < 2{,}000$, ou seja, $f(-1) < 1{,}5 < f(-2)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]-2,-1[$ tal que $f(c) = 1{,}5$, ou seja, que a equação $f(x) = 1{,}5$ tem, pelo menos, uma solução em $]-2,-1[$

C.A.

$$f(-2) = -(-2) + e^{2(-2)^3-1} = 2 + e^{2(-8)-1} =$$

$$= 2 + e^{-17} \approx 2{,}000$$

$$f(-1) = -(1) + e^{2(-1)^3-1} = 1 + e^{2(-1)-1} =$$

$$= 1 + e^{-3} \approx 1{,}050$$

Exame – 2010, 2ª Fase

17. Averiguando a continuidade da função g, no ponto de abcissa 2, temos:

$$g(2) = 2 - 5 + \log_2(2-1) = -3 + \log_2(1) = -2 + 0 = -2$$

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(3^x - \sqrt{x}\right) = 3^{2^-} - \sqrt{2^-} = 9 - \sqrt{2}$$

Pelo que $g(2) \neq \lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$, ou seja, a função g não é contínua em $x = 2$, logo não é contínua em [1,3], e assim não podemos usar o Teorema de Bolzano neste intervalo.

Verificando a existência de pelo menos um zero da função g, nos restantes três intervalos, temos:

- $g(0) = 3^0 - \sqrt{0} = 1$
- $g(1) = 3^1 - \sqrt{1} = 3 - 1 = 2$
- $0 \notin]1,2[$

- $g(3) = 3 - 5 + \log_2(3-1) = -2 + \log_2(2) = -2 + 1 = -1$
- $g(5) = 5 - 5 + \log_2(5-1) = \log_2(4) = 2$
- $0 \in]-1,2[$

- $g(5) = 5 - 5 + \log_2(5-1) = \log_2(4) = 2$
- $g(9) = 9 - 5 + \log_2(9-1) = 4 - \log_2(8) = 4 - 3 = 1$
- $0 \notin]1,2[$

E assim, como a função g resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $[2,+\infty[$, é contínua em $[2,+\infty[$, e também, em [3,5], porque $[3,5] \subset [2,+\infty[$
Como $-1 < 0 < 2$, ou seja, $g(3) < 1{,}5 < g(5)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]3,5[$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, que a função g tem, pelo menos um zero no intervalo]3,5[

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12º ano – 15.03.2010

18.

Como a função g resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}^+$, é contínua em $\mathbb{R}^+$, e também, em $[0{,}1;0{,}3]$, porque $[0{,}1;0{,}3] \subset \mathbb{R}^+$ Como $-1{,}08 < 0 < 0{,}62$, ou seja, $g(0{,}1) < 0 < g(0{,}3)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]0{,}1;0{,}3[$ tal que $g(c) = 0$, ou seja, que existe, pelo menos, um zero da função g no intervalo $]0{,}1;0{,}3[$	C.A. $g(0{,}1) = e^{2\times 0{,}1} + \ln(0{,}1) \approx -1{,}08$ $g(0{,}3) = e^{2\times 0{,}3} + \ln(0{,}3) \approx 0{,}62$

Exame – 2009, 1ª Fase

19. Como a função f é contínua em $[1,2]$, então a função g resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $[1,2]$, é contínua neste intervalo.

Calculando $g(1)$ e $g(2)$, temos

$$g(1) = 2f(1) - f(1) = f(1) = 3f(2)$$

$$g(2) = 2f(2) - f(1) = 2f(2) - 3f(2) = -f(2)$$

Como $\forall x \in [1,2], f(x) < 0$, então temos que $f(2) < 0$, pelo que

- $3f(2) < 0$, ou seja $g(1) < 0$
- $-f(2) > 0$, ou seja $g(2) > 0$

Como $g(1) < 0 < g(2)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]1,2[$ tal que $g(c) = 0$, ou seja, que existe, pelo menos, um zero da função g no intervalo $]1,2[$

Teste Intermédio 12º ano – 11.03.2009

20.

Como a função M resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}^+$, é contínua em $\mathbb{R}^+$, e também, em $[2{,}5; 4]$, porque $[2{,}5; 4] \subset \mathbb{R}^+$

Como $13{,}847 < 14 < 14{,}268$, ou seja, como $M(4) < 14 < M(2{,}5)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $t_0 \in]2{,}5; 4[$ tal que $M(t_0) = 14$, ou seja, que houve, pelo menos, um instante, entre as 2 horas e 30 minutos e as 4 horas após o início da observação, em que a massa da amostra da substância radioativa atingiu os 14 gramas.

C.A.

Observando que 2 horas e 30 minutos corresponde a 2,5 horas, vem que

$M(2{,}5) = 15 \times e^{-0{,}02 \times 2{,}5} \approx 14{,}268$

$M(4) = 15 \times e^{-0{,}02 \times 4} \approx 13{,}847$

Exame – 2008, 2ª Fase

21.

Como a função h resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $]-1, +\infty[$, é contínua em $]-1, +\infty[$, e também em $[5,6]$, porque $[5,6] \subset]-1, +\infty[$

Como $-0{,}05 < 0 < 0{,}79$, ou seja, $h(6) < 0 < h(5)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]5,6[$ tal que $h(c) = 0$, ou seja, que existe, pelo menos, um zero da função h no intervalo $]5,6[$

C.A.

$h(5) = 4 - 5 + \ln(5+1) =$

$= -1 + \ln 6 \approx 0{,}79$

$h(6) = 4 - 6 + \ln(6+1) =$

$= -2 + \ln 7 \approx -0{,}05$

Exame – 2008, 1ª fase

22. Como a função f é contínua no intervalo $[-2,2]$, e em todas as opções a função g resulta de somas (ou subtrações) entre a função f e outras contínuas no mesmo intervalo, então, em cada opção a função g é contínua no intervalo $[-2,2]$.
Assim, verificando se zero está compreendido entre $g(-2)$ e $g(2)$, temos

- Opção (B) $\quad g(-2) = -2 - f(-2) = -2 - 1 = -3$
  $g(2) = 2 - f(2) = 2 - 3 = -1$
  Logo, $0 \notin]g(-2),g(2)[$

- Opção (C) $\quad g(-2) = (-2)^2 + f(-2) = 4 + 1 = 5$
  $g(2) = 2^2 + f(2) = 4 + 3 = 7$
  Logo, $0 \notin]g(-2),g(2)[$

- Opção (D) $\quad g(-2) = (-2)^2 - f(-2) = 4 - 1 = 3$
  $g(2) = 2^2 - f(2) = 4 - 3 = 1$
  Logo, $0 \notin]g(2),g(-2)[$

Relativamente à opção (A), temos que

$$g(-2) = -2 + f(-2) = -2 + 1 = -1$$

$$g(2) = 2 + f(2) = 2 + 3 = 5$$

Pelo que, como $-1 < 0 < 5$, ou seja, $g(-2) < 0 < g(2)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]-2,2[$ tal que $g(c) = 0$, ou seja, que existe, pelo menos, um zero da função g no intervalo $]-2,2[$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12º ano – 29.05.2008

23. As abcissas dos pontos de interseção da reta r com a curva C são soluções da equação

$$f(x) = 5$$

Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $[0,1]$, é contínua neste intervalo, ou seja, no seu domínio.	C.A.
Como $1 < 5 < e + 3$, ou seja, $f(0) < 0 < f(1)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]1,0[$ tal que $f(c) = 5$, ou seja, que existe, pelo menos, uma solução da equação $f(x) = 5$ no intervalo $]0,1[$, ou seja, que a reta r intersecta a curva C em pelo menos um ponto.	$f(0) = e^0 + 3(0) = 1 + 0 = 1$ $f(1) = e^1 + 3(1) = e + 3$

Teste Intermédio 12º ano – 15.03.2007

24. Calculando o valor de $f(e^{-1})$, como $e^{-1} < 1$, vem:

$$f(e^{-1}) = \frac{e^{-1}}{\ln(e^{-1})} = \frac{e^{-1}}{-1 \times \ln e} = \frac{e^{-1}}{-1 \times 1} = \frac{e^{-1}}{-1} = -e^{-1}$$

E assim, vem que

$$f(x) + f(e^{-1}) = 0 \Leftrightarrow f(x) + \left(-e^{-1}\right) = 0 \Leftrightarrow f(x) = e^{-1}$$

Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $[1,+\infty[$, é contínua neste intervalo, e também em $[4,5]$, porque $[4,5] \subset [1,+\infty[$

Como $e^{-1} \approx 0{,}37$, $\frac{4}{e^2} \approx$, então, $\frac{5}{e^3} < e^{-1} < \frac{4}{e^2}$, ou seja, $f(5) < 0 < f(4)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]4,5[$ tal que $f(c) = e^{-1}$, ou seja, que existe, pelo menos, uma solução da equação $f(x) = e^{-1}$ no intervalo $]4,5[$, ou seja,

$$\exists x \in]4,5[: \; f(x) + f(e^{-1}) = 0$$

C.A.

$f(4) = 4e^{2-4} = 4e^{-2} =$

$= \frac{4}{e^2} \approx 0{,}54$

$f(5) = 5e^{2-5} = 5e^{-3} =$

$= \frac{5}{e^3} \approx 0{,}25$

Exame – 2006, Ép. especial

25. Como f é uma função contínua em $[0,2]$, então a função g (definida nos termos da sugestão) também é contínua em $[0,1]$ porque resulta de operações entre funções contínuas, neste intervalo.

Calculando $g(0)$, vem

$$g(0) = f(0) - f(0+1) = f(0) - f(1) = 0 - f(1) = -f(1)$$

e como $f(1) > 0$, então $-f(1) < 0$, ou seja, $g(0) < 0$

Calculando $g(1)$, vem

$$g(1) = f(1) - f(1+1) = f(1) - f(2) = f(1) - 0 = f(1)$$

e como $f(1) > 0$, então $g(1) > 0$

Logo, como $g(0) < 0 < g(1)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]0,1[$ tal que $g(c) = 0$, e assim vem que,

$$g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - f(c+1) = 0 \Leftrightarrow f(c) = f(c+1)$$

Exame – 2006, 2ª fase

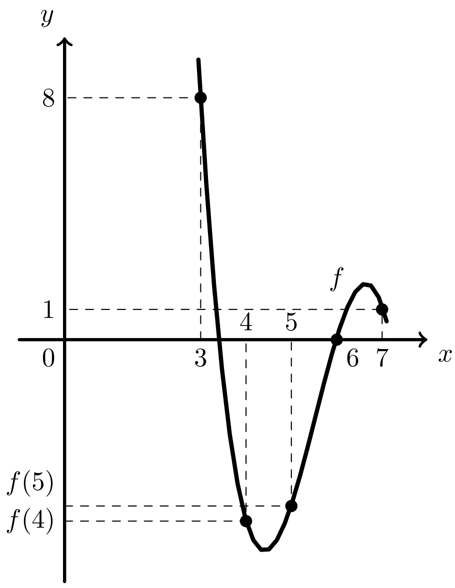
26. Como não é conhecida a expressão algébrica da função f, ou outra informação, sobre a monotonia, por exemplo, é possível considerar uma função f, contínua em $\mathbb{R}$, por exemplo como a representada graficamente na figura ao lado, em que verifica $f(3) = 8$ e $f(7) = 1$, e que

- $f(6) \notin [1{,}8]$
- Existe pelo menos um valor $c \in [3{,}7]$ tal que $f(c) = 0$
- $f(4) < f(5)$

Podemos ainda verificar que omo a função f é contínua em $\mathbb{R}$, também é contínua em $[3{,}7]$, porque $[3{,}7] \subset \mathbb{R}$

Como $1 < 2 < 8$, ou seja, $f(7) < 2 < f(3)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]3{,}7[$ tal que $f(c) = 2$, ou seja, que existe, pelo menos um objeto em $]3{,}7[$ cuja imagem pr f é 2, logo $2 \in D'_f$

Resposta: **Opção D**



Exame – 2005, 2ª fase

27.

Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}$, é contínua em $\mathbb{R}$, e também, em $[-1{,}0]$, porque $[-1{,}0] \subset \mathbb{R}$

Como $1 < 4 < 1 + 3e$, ou seja, $f(0) < 4 < f(-1)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]-1{,}0[$ tal que $f(c) = 4$, ou seja, no intervalo $]-1{,}0[$, existe pelo menos um objeto cuja imagem, por meio de f, é 4

C.A.

$$f(-1) = 1 + 3 \times (-1)^2 \times e^{-(-1)} =$$

$$= 1 + 3 \times 1 \times e^1 =$$

$$= 1 + 3e \approx 9{,}15$$

$$f(0) = 1 + 3 \times 0^2 \times e^{-0} = 1 + 0 = 1$$

Exame – 2004, 1ª Fase

28. Como f é uma função contínua em $[0{,}5]$, então a função g também é contínua em $[0{,}5]$ porque resulta da diferença entre funções contínuas, neste intervalo.

Calculando $g(0)$, vem

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0)$$

e como $D'_f = [3{,}4]$, então $3 \leq f(0) \leq 4$, ou seja, $3 \leq g(0) \leq 4$, em particular, temos que $g(0) \geq 3$

Calculando $g(5)$, vem

$$g(5) = f(5) - 5$$

e como $D'_f = [3{,}4]$, então

$$3 \leq f(5) \leq 4 \Leftrightarrow 3 - 5 \leq f(5) - 5 \leq 4 - 5 \Leftrightarrow -2 \leq f(5) - 5 \leq -1$$

Ou seja, $-3 \leq g(0) \leq -2$, em particular, temos que $g(5) \leq -1$

Logo, como $g(5) < 0 < g(0)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]0{,}5[$ tal que $g(c) = 0$, ou seja, que existe, pelo menos, um zero da função g no intervalo $]0{,}5[$

Exame – 2002, 1ª fase - 2ª chamada

29. Como a função g é contínua em $\mathbb{R}$, também é contínua, em $[1,3]$, porque $[1,3] \subset \mathbb{R}$

Como 1 é zero de g, temos que $g(1) = 0$

Como $g(3) > 3$, vem que $g(3) > 0$ pelo que $g(3) > \frac{g(3)}{2}$ e também $\frac{g(3)}{2} > 0$

Logo, como $g(1) < \frac{g(3)}{2} < g(3)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]1,3[$ tal que $g(c) = \frac{g(3)}{2}$, ou seja, que a equação $g(x) = \frac{g(3)}{2}$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1,3[$

Exame – 2001, 2ª fase

30. Como não é conhecida a expressão algébrica da função f, ou outra informação, sobre a monotonia, por exemplo, é possível considerar funções contínuas em $[1,3]$, em que verifica $f(3) = 8$ e $f(7) = 1$, e que pode ter zeros, se por exemplo $f(5) = 0$ ou outras em que não existem zeros no intervalo $[1,3]$, por exemplo se a função for estritamente decrescente neste intervalo.

Por outro lado, como a função f é contínua em $[1,3]$ e como $4 < 5 < 7$, ou seja, $f(3) < 0 < f(1)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]1,3[$ tal que $f(c) = 5$, ou seja, que existe, pelo menos, uma solução da equação $f(x) = 5$ no intervalo $]1,3[$, e como $]1,3[\subset [1,3]$ então existe pelo menos uma solução no intervalo $[1,3]$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2001, 1ª fase - 1ª chamada

31.

Como a função C resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}$, é contínua em $\mathbb{R}$, e também, em $[0,5;1]$, porque $[0,5;1] \subset \mathbb{R}$

Como $0,86 < 1 < 1,48$, ou seja, como $C(0,5) < 14 < C(1)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $t_0 \in]0,5;1[$ tal que $C(t_0) = 1$, ou seja, que houve, pelo menos, um instante, entre as 9 horas e 30 minutos e as 10 horas em que a concentração do medicamento foi de 1 mg/ml.

C.A.

Observando que 9 horas e 30 minutos corresponde a meia hora, ou seja 0,5 horas depois da toma do medicamento, e que 10 horas corresponde a 1 hora depois da toma do medicamento, vem que

$C(0,5) = 2 \times 0,5 \times e^{-0,3\times 0,5} \approx 0,86$

$C(1) = 2 \times 1 \times e^{-0,3\times 1} \approx 1,48$

Exame – 1999, Prova modelo (prog. antigo)

32. Como a função g é uma função polinomial, é contínua em $\mathbb{R}$, e também, em qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$, nomeadamente nos intervalos $[-1,0]$, $[0,1]$, $[1,2]$ e $[2,3]$
Assim, verificando se 8 está compreendido entre as imagens dos extremos de cada um dos intervalos, temos

- $g(-1) = (-1)^5 - (-1) + 1 = -1 + 1 + 1 = 1$
- $g(0) = 0^5 - 0 + 1 = 1$
- $g(1) = 1^5 - 1 + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$
- $g(2) = 2^5 - 2 + 1 = 32 - 2 + 1 = 31$
- $g(3) = 3^5 - 3 + 1 = 243 - 2 + 1 = 239$

Logo, não é possível garantir que $g(-1) < 8 < g(0)$, nem que $g(0) < 8 < g(1)$, ou que $g(2) < 8 < g(3)$.

E como $1 < 8 < 31$, ou seja, $g(1) < 8 < g(2)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]1,2[$ tal que $g(c) = 8$, ou seja, que a equação $g(x) = 8$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]1,2[$

Resposta: **Opção C**

Exame – 1997, 1ª fase - 1ª chamada (prog. antigo)