MATEMÁTICA A - 12º Ano
Funções - Exponenciais e logaritmos

Exercícios de exames e testes intermédios

1. Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$$\log_2(x+1) \leq 3 - \log_2(8-x)$$

Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

Exame – 2018, 2ª Fase

2. Seja f a função, de domínio f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 + \dfrac{e^x}{1-x} & \text{se } x < 1 \\ \\ \dfrac{\ln(x^2)+2}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = x+1$

Qual é o valor de $\left(f \circ h^{-1}\right)(2)$?

(o símbolo $\circ$ designa a composição de funções)

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3

Exame – 2018, 2ª Fase

3. Sejam a e b números reais superiores a 1 tais que $\ln b = 4 \ln a$

Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $a^x \geq b^{\frac{1}{x}}$

Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

Exame – 2018, 1ª Fase

4. Seja a um número real superior a 1

Qual é o valor de $4 + \log_a\left(5^{\ln a}\right)$?

(A) $\ln(10e)$ **(B)** $\ln\left(5e^4\right)$ **(C)** $\ln\left(5e^2\right)$ **(D)** $\ln(20e)$

Exame – 2017, Ép. especial

5. Pretende-se eliminar um poluente diluído na água de um tanque de um viveiro. Para tal, é escoada água por um orifício na base do tanque e, em simultâneo, é vertida no tanque água não poluída, de tal modo que a quantidade total de água no tanque se mantém.

   Admita que a massa, p, de poluente, medida em gramas, t horas após o início do processo, é, para um certo número real positivo k, dada por

$$p(t) = 120\, e^{-kt},\ (t \geq 0)$$

   Resolva os dois itens seguintes recorrendo exclusivamente a métodos analíticos.
   Na resolução do segundo item, pode utilizar a calculadora para efetuar eventuais cálculos numéricos.

   5.1. Determine o valor de k, sabendo que, duas horas após o início do processo, a massa de poluente é metade da existente ao fim de uma hora. Apresente o resultado na forma $\ln a$, com $a > 1$

   5.2. Admita agora que $k = 0{,}7$
   Determine a taxa média de variação da função p no intervalo $[0{,}3]$ e interprete o resultado obtido no contexto da situação descrita.

   Apresente o valor da taxa média de variação arredondado às unidades.
   Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame – 2017, Ép. especial

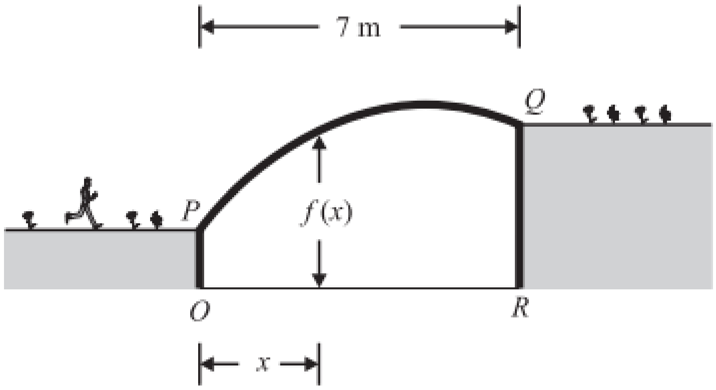
6. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

   Resolva a inequação $f(x) > 2\ln x$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.
   Apresente o conjunto solução usando a notação de intervalos de números reais.

Exame – 2017, 2ª Fase

7. Na figura ao lado, está representada uma secção de uma ponte pedonal que liga as duas margens de um rio. A ponte, representada pelo arco PQ, está suportada por duas paredes, representadas pelos segmentos de reta $[OP]$ e $[RQ]$. A distância entre as duas paredes é 7 metros.

   O segmento de reta $[OR]$ representa a superfície da água do rio.



Considere a reta OR como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto O e em que uma unidade corresponde a 1 metro.

Para cada ponto situado entre O e R, de abcissa x, a distância na vertical, medida em metros, desse ponto ao arco PQ é dada por

$$f(x) = 9 - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right), \text{ com } x \in [0{,}7]$$

Resolva o item seguinte recorrendo a métodos analíticos; utilize a calculadora apenas para efetuar eventuais cálculos numéricos.

Seja S o ponto pertencente ao segmento de reta $[OR]$ cuja abcissa x verifica a equação

$$\sqrt{f(0)^2 + x^2} = 2$$

Resolva esta equação, apresentando a solução arredondada às décimas, e interprete essa solução no contexto da situação descrita.
Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame – 2017, 1ª fase

8. Sejam a e b dois números reais superiores a 1, tais que $a = b^3$

   Qual dos valores seguintes é igual $\log_a b + \log_b a$?

   (A) $\frac{4}{3}$ **(B)** 1 **(C)** $\frac{10}{3}$ **(D)** 3

Exame – 2016, Ép. especial

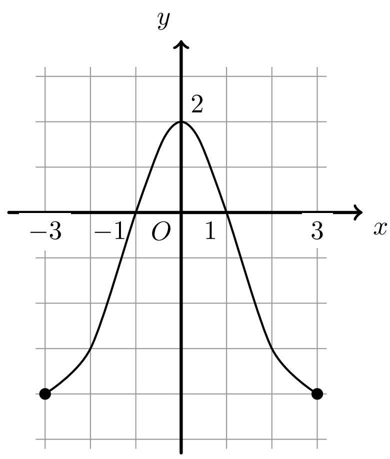
9. Seja f a função, de domínio $[-3{,}3]$, cujo gráfico está representado na figura ao lado.

   Tal como a figura sugere, todos os objetos inteiros têm imagens inteiras.
   Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \ln x$

   Quais são as soluções da equação $(f \circ g)(x) = 0$?

   (o símbolo $\circ$ designa a composição de funções)

   (A) $\frac{1}{e}$; e^2 **(B)** e; e^2 **(C)** 1; e **(D)** $\frac{1}{e}$; e



Exame – 2016, Ép. especial

10. O movimento de uma nave espacial é um movimento de propulsão provocado pela libertação de gases resultantes da queima e explosão de combustível.
Um certo tipo de nave tem por função o transporte de carga destinada ao abastecimento de uma estação espacial.
Designemos por x a massa, em milhares de toneladas, da carga transportada por uma nave desse tipo e por V a velocidade, em quilómetro por segundo, que essa mesma nave atinge no instante em que termina a queima do combustível.
Considere que V é dada, em função de x, por $V(x) = 3\ln\left(\dfrac{x+300}{x+60}\right) \quad (x \geq 0)$

Nos dois itens seguintes, a calculadora só pode ser utilizada em cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

10.1. Admita que uma nave do tipo referido transporta uma carga de 25 mil toneladas.
Determine quanto tempo demora essa nave a percorrer 200 quilómetros a partir do instante em que termina a queima do combustível, sabendo que a velocidade da nave se mantém constante a partir desse instante.
Apresente o resultado em segundos, arredondado às unidades.

10.2. Determine qual deve ser a massa da carga transportada por uma dessas naves, de modo que atinja, após a queima da totalidade do combustível, uma velocidade de 3 quilómetros por segundo.
Apresente o resultado em milhares de toneladas, arredondado às unidades.

Exame – 2016, Ép. especial

11. Seja k um número real positivo.
Considere a função g, de domínio $]-k,+\infty[$, definida por $g(x) = \ln(x+k)$ Mostre que: se $g(k) \times g(0) < 0$, então $k \in \left]\dfrac{1}{2},1\right[$ Na resolução deste item, não utilize a calculadora.

Exame – 2016, Ép. especial

12. Para certos valores de a e de b ($a > 1$ e $b > 1$), tem-se $\log_a(ab^3) = 5$

Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_b a$?

(A) $\dfrac{5}{3}$ **(B)** $\dfrac{3}{4}$ **(C)** $\dfrac{3}{5}$ **(D)** $\dfrac{1}{3}$

Exame – 2016, 2ª Fase

13. O José e o António são estudantes de Economia. O José pediu emprestados 600 euros ao António para comprar um computador, tendo-se comprometido a pagar o empréstimo em prestações mensais sujeitas a um certo juro.

Para encontrarem as condições de pagamento do empréstimo, os dois colegas adaptaram uma fórmula que tinham estudado e estabeleceram um contrato.
Nesse contrato, a prestação mensal p, em euros, que o José tem de pagar ao António é dada por

$$p = \frac{600x}{1-e^{-nx}}$$

em que n é o número de meses em que o empréstimo será pago e x é a taxa de juro mensal.

Resolva recorrendo a métodos analíticos.
Na resolução, pode utilizar a calculadora para efetuar eventuais cálculos numéricos.

O José e o António acordaram que a taxa de juro mensal seria 0,3% ($x = 0{,}003$)

Em quantos meses será pago o empréstimo, sabendo-se que o José irá pagar uma prestação mensal de 24 euros?
Apresente o resultado arredondado às unidades.
Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

Exame – 2016, 2ª Fase

14. Considere a função f, de domínio $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ definida por $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

Resolva o item seguinte recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Seja a um número real maior do que 1
Mostre que a reta secante ao gráfico de f nos pontos de abcissas a e $-a$ passa na origem do referencial.

Exame – 2016, 1ª Fase

15. Seja a um número real.
Seja a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = e^{a \ln x}$

Considere, num referencial o.n. xOy, o ponto $P(2,8)$
Sabe-se que o ponto P pertence ao gráfico de f

Qual é o valor de a?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

Exame – 2015, Ép. especial

16. Admita que, ao longo dos séculos XIX, XX e XXI, o número de habitantes, N, em milhões, de uma certa região do globo é dado aproximadamente por

$$N = \frac{200}{1+50e^{-0,25t}} \quad (t \geq 0)$$

em que t é o tempo medido em décadas e em que o instante $t=0$ corresponde ao **final** do ano 1800.

16.1. Determine a taxa média de variação da função N no intervalo $[10, 20]$
Apresente o resultado arredondado às unidades.
Interprete o resultado, no contexto da situação descrita.

16.2. Mostre que $t = \ln\left(\frac{50N}{200-N}\right)^4$

Exame – 2015, Ép. especial

17. Para certos valores de a e de b ($a > 1$ e $b > 1$), tem-se $\log_b a = \frac{1}{3}$

Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_a(a^2 b)$?

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{5}{3}$ **(C)** 2 **(D)** 5

Exame – 2015, 2ª Fase

18. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 + xe^x & \text{se } x \leq 3 \\ \ln(x-3) - \ln x & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Resolva, em $]-\infty,3]$, a condição $f(x) - 2x > 1$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

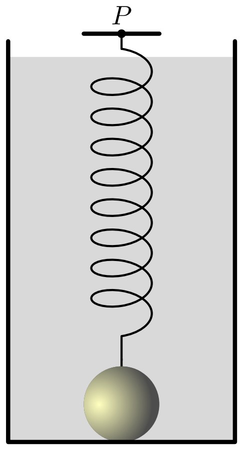
Apresente o conjunto solução, usando a notação de intervalos de números reais.

Exame – 2015, 2ª Fase

19. Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real k, igual a $\log_3\left(\frac{3^k}{9}\right)$?

(A) $\frac{k}{2}$ **(B)** $k-2$ **(C)** $\frac{k}{9}$ **(D)** $k-9$

Exame – 2015, 1ª Fase



20. Na figura ao lado, está representado um recipiente cheio de um líquido viscoso. Tal como a figura ilustra, dentro do recipiente, presa à sua base, encontra-se uma esfera. Essa esfera está ligada a um ponto P por uma mola esticada.
Num certo instante, a esfera é desprendida da base do recipiente e inicia um movimento vertical. Admita que, t segundos após esse instante, a distância, em centímetros, do centro da esfera ao ponto P é dada por

$$d(t) = 10 + (5-t)e^{-0,05t}, \ (t \geq 0)$$

Sabe-se que a distância do ponto P à base do recipiente é 16 cm
Determine o volume da esfera.
Apresente o resultado em cm^3, arredondado às centésimas.

Exame – 2015, 1ª Fase

21. Seja b um número real.
Sabe-se que $\log b = 2014$ (log designa logaritmo de base 10)

Qual é o valor de $\log(100b)$?

(A) 2016 **(B)** 2024 **(C)** 2114 **(D)** 4028

Teste Intermédio 12º ano – 30.04.2014

22. Seja a um número real positivo.
Considere o conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : \ln\left(e^{-x} - a\right) \leq 0\}$.
Qual dos conjuntos seguintes é o conjunto S?

(A) $]-\ln(1+a), -\ln a[$ **(B)** $[-\ln(1+a), -\ln a[$

(C) $]-\infty, -\ln(1+a)]$ **(D)** $[-\ln(1+a), +\infty[$

Exame – 2013, Ép. especial

23. Sejam a e b dois números reais tais que $1 < a < b$ e $\log_a b = 3$
Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_a\left(a^5 \times \sqrt[3]{b}\right) + a^{\log_a b}$?

(A) $6+b$ **(B)** $8+b$ **(C)** $6+a^b$ **(D)** $8+a^b$

Exame – 2013, 2ª Fase

24. Para certos valores de a e de b ($a > 1$ e $b > 1$), tem-se $log_a b = 2$
Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_b a + \log_a \sqrt{b}$?

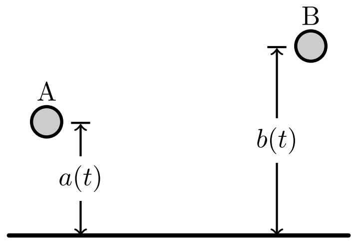
(A) $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ **(B)** $-2 + \sqrt{2}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{3}{2}$

Teste Intermédio 12º ano – 23.02.2013

25. Considere que dois balões esféricos, que designamos por balão A e por balão B, se deslocam na atmosfera, por cima de um solo plano e horizontal.

Num determinado instante, é iniciada a contagem do tempo. Admita que, durante o primeiro minuto imediatamente a seguir a esse instante, as distâncias, medidas em metros, do centro do balão A ao solo e do centro do balão B ao solo são dadas, respetivamente, por

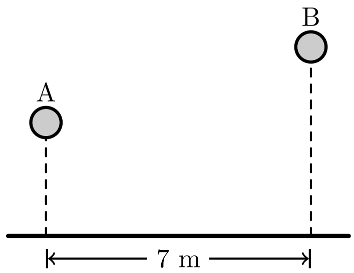
$$a(t) = e^{-0{,}03t} - 0{,}02t + 3 \quad \text{e} \quad b(t) = 6e^{-0{,}06t} - 0{,}02t + 2$$



A variável t designa o tempo, medido em segundos, que decorre desde o instante em que foi iniciada a contagem do tempo ($t \in [0{,}60]$).

Resolva os dois itens seguintes sem utilizar a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.
Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

25.1. Determine a distância entre o centro do balão A e o centro do balão B, cinco segundos após o início da contagem do tempo, sabendo que, nesse instante, a distância entre as projeções ortogonais dos centros dos balões no solo era 7 metros.
Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.



25.2. Sabe-se que, alguns segundos após o início da contagem do tempo, os centros dos dois balões estavam à mesma distância do solo.
Determine quanto tempo decorreu entre o instante inicial e o instante em que os centros dos dois balões estavam à mesma distância do solo.
Apresente o resultado em segundos, arredondado às unidades.

Teste Intermédio 12º ano – 28.02.2013

26. Sejam a, b e c três números tais que $a \in]-1, +\infty[$, $b \in \mathbb{R}^+$ e $c \in \mathbb{R}^+$
Sabe-se que $\log_a b = c$ e que $\log_a \sqrt{c} = 3$
Qual das expressões seguintes é equivalente a $\log_a \sqrt{b \times c}$?

(A) $c + 3$ **(B)** $c - 3$ **(C)** $\dfrac{c}{2} + 3$ **(D)** $\dfrac{c}{2} - 3$

Exame – 2012, Ép. especial

27. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, e a função g, de domínio $]0, +\infty[$, definidas por

$$f(x) = e^{x-2} - \frac{4e^{-x} + 4}{e^2} \quad \text{e} \quad g = -\ln(x) + 4$$

Mostre que $\ln\left(2 + 2\sqrt{2}\right)$ é o único zero da função f, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Exame – 2012, 1ª Fase

28. Seja a um número real maior do que 1 e seja $b = a^{\pi}$
Qual é o valor, arredondado às unidades, de $\log_a\left(a^{12} \times b^{100}\right)$?

(A) 138 **(B)** 326 **(C)** 1238 **(D)** 3770

Teste Intermédio 12º ano – 24.05.2012

29. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = 2 + \log_3 x$
Resolva os dois itens seguintes **sem recorrer à calculadora**.

29.1. Determine o conjunto dos números reais para os quais se tem

$$f(x) \geq 4 + \log_3(x - 8)$$

Apresente a sua resposta na forma de intervalo de números reais.

29.2. Determine o valor de $f(36^{1000}) - f(4^{1000})$

Teste Intermédio 12º ano – 13.03.2012

30. Um vírus atacou os frangos de um aviário.
Admita que x dias após o instante em que o vírus foi detetado, o número de frangos infetados é dado aproximadamente por

$$f(x) = \frac{200}{1 + 3 \times 2^{3-0,1x}}$$

(considere que $x = 0$ corresponde ao instante em que o vírus foi detetado).
Resolva o item seguinte **sem recorrer à calculadora**, a não ser para efetuar cálculos numéricos.
No instante em que o vírus foi detetado, já existiam frangos infetados.
Passados alguns dias, o número de frangos infetados era dez vezes maior.
Quantos dias tinham passado?

Teste Intermédio 12º ano – 13.03.2012

31. O momento sísmico, M_0, é uma medida da quantidade total de energia que se transforma durante um sismo. Só uma pequena fração do momento sísmico é convertida em energia sísmica irradiada, E, que é a que os sismógrafos registam.
A energia sísmica irradiada é estimada, em Joules, por $E = M_0 \times 1{,}6 \times 10^{-5}$
A magnitude, M, de um sismo é estimada por $M = \dfrac{2}{3}\log_{10}(E) - 2{,}9$
Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

31.1. Admita que um sismo que ocorreu no Haiti, em 2010, teve magnitude 7,1 Determine o momento sísmico, M_0, para esse sismo.
Escreva o resultado na forma $a \times 10^n$, com n inteiro relativo e com a entre 1 e 10

31.2. Sejam M_1 e M_2 as magnitudes de dois sismos.
Mostre que, se a diferença entre a magnitude M_1 e a magnitude M_2 é igual a $\dfrac{2}{3}$, então a energia sísmica irradiada por um dos sismos é dez vezes superior à energia sísmica irradiada pelo outro sismo.

Exame – 2011, Prova especial

32. Para um certo valor real de k, admita que a quantidade de combustível, em litros, existente no depósito de uma certa máquina agrícola, t minutos após ter começado a funcionar, é dada aproximadamente por

$$Q(t) = 12 + \log_3(81 - kt^2), \text{ com} t \in [0{,}20]$$

Considere que essa máquina agrícola funcionou durante 20 minutos e que, nesse período de tempo, consumiu 2 litros de combustível.

Determine o valor de k recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Exame – 2011, Ép. especial

33. Na estufa de um certo jardim botânico, existem dois lagos aquecidos, o lago A e o lago B.
Às zero horas do dia 1 de Março de 2010, cada lago recebeu uma espécie diferente de nenúfares, a saber *Victoria amazonica* e *Victoria cruziana*.
$N_A(t)$ é o número de nenúfares existentes no lago A, t dias após as zero horas do dia 1 de Março de 2010.
Esses nenúfares são da espécie *Victoria amazonica* e desenvolvem-se segundo o modelo

$$N_A(t) = \frac{120}{1 + 7 \times e^{-0,2t}} \text{ com } t \geq 0$$

$N_B(t)$ é o número de nenúfares existentes no lago B, t dias após as zero horas do dia 1 de Março de 2010.
Esses nenúfares são da espécie *Victoria cruziana* e desenvolvem-se segundo o modelo

$$N_B(t) = \frac{150}{1 + 50 \times e^{-0,4t}} \text{ com } t \geq 0$$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

33.1. Como referido, às zero horas do dia 1 de Março de 2010, o lago A recebeu um certo número de nenúfares da espécie *Victoria amazonica*. Decorridos 7 dias, esse número aumentou.
Determine de quanto foi esse aumento.
Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

33.2. Determine quantos dias foram necessários, após as zero horas do dia 1 de Março de 2010, para que o número de nenúfares existentes no lago A fosse igual ao número de nenúfares existentes no lago B.
Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

Exame – 2011, 2ª Fase

34. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

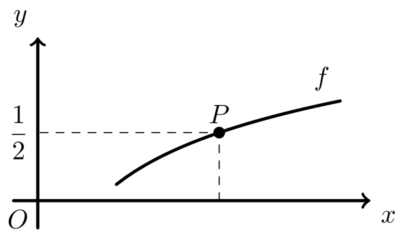
$$f(x) = \begin{cases} 2 + \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{ex - e} & \text{se } 0 < x < 1 \\ xe^{-x} + 2x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Resolva, sem recorrer à calculadora, no intervalo $[1, +\infty[$, a equação $\dfrac{f(x)}{x} = e^x - \dfrac{2}{3}$

Teste Intermédio 12º ano – 26.05.2011

35. Na figura ao lado, está parte da representação gráfica da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_9(x)$
P é o ponto do gráfico de f que tem ordenada $\dfrac{1}{2}$
Qual é a abcissa do ponto P?

(A) $\dfrac{3}{2}$ **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** $\dfrac{9}{2}$



Teste Intermédio 12º ano – 19.01.2011

36. Determine, **sem recorrer à calculadora**, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$$\log_3(7x+6) \geq 2 + \log_3(x)$$

Apresente a sua resposta usando a notação de intervalos de números reais.

Teste Intermédio 12º ano – 19.01.2011

37. Na década de sessenta do século passado, uma doença infecciosa atacou a população de algumas regiões do planeta.
Admita que, ao longo dessa década, e em qualquer uma das regiões afetadas, o número, em milhares, de pessoas que estavam infetadas com a doença, t anos após o início de 1960, é dado, aproximadamente, por

$$I(t) = \frac{3e^{kt}}{1 + pe^{kt}}$$

em que k e p são parâmetros reais.
Resolva os dois itens seguintes **sem recorrer à calculadora**, a não ser para efetuar cálculos numéricos.

37.1. Admita que, para uma certa região, $k = \frac{1}{2}$ e $p = 1$
Determine o ano em que o número de pessoas que estavam infetadas, nessa região, atingiu 2500.
Nota – Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

37.2. Numa outra região, constatou-se que havia um milhar de pessoas que estavam infetadas no início de 1961.
Qual é, para este caso, a relação entre k e p?
Apresente a sua resposta na forma $k = -\ln(A + pB)$, em que A e B são números reais.

Teste Intermédio 12º ano – 19.01.2011

38. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}^-$, definida por $f(x) = \ln(-3x)$
Qual é a solução da equação $f(x) = 2$?

(A) $\frac{1}{2}e^3$ **(B)** $-\frac{1}{2}e^3$ **(C)** $-\frac{1}{3}e^2$ **(D)** $\frac{1}{3}e^2$

Exame – 2010, Ép. especial

39. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} - e^x}{x} & \text{se } x > 0 \\ \ln(x^2 + 1) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, resolva, no intervalo $]-\infty, 0]$, a inequação, $h(x) > h(-4)$

Exame – 2010, Ép. especial

40. Seja g a função, de domínio $]-2, +\infty[$, definida por $g(x) = \ln(x + 2)$
Considere, num referencial o.n. xOy, um triângulo $[OAB]$ tal que:

- O é a origem do referencial;
- A é um ponto de ordenada 5;
- B é o ponto de intersecção do gráfico da função g com o eixo das abcissas.

Qual é a área do triângulo $[OAB]$?

(A) $\frac{5}{2}$ **(B)** $-\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{5\ln 2}{2}$ **(D)** $-\frac{\ln 2}{2}$

Exame – 2010, 1ª Fase

41. Na *Internet*, no dia 14 de Outubro de 2009, pelas 14 horas, colocaram-se à venda todos os bilhetes de um espetáculo. O último bilhete foi vendido cinco horas após o início da venda.
Admita que, t horas após o início da venda, o número de bilhetes vendidos, em centenas, é dado, aproximadamente, por

$$N(t) = 8\log_4(3t+1)^3 - 8\log_4(3t+1), \text{ com } t \in [0{,}5]$$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

41.1. Mostre que $N(t) = 16\log_4(3t+1)$, para qualquer $t \in [0{,}5]$

41.2. Determine quanto tempo foi necessário para vender 2400 bilhetes.
Apresente o resultado em horas e minutos.
Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais, apresentando os minutos arredondados às unidades.

Exame – 2010, 1ª Fase

42. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3 + 4x^2e^{-x}$
Seja g a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por

$$g(x) = x + \ln\left[f(x) - 3\right] \qquad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Determine, usando exclusivamente métodos analíticos, os zeros da função g

Teste Intermédio 12º ano – 19.05.2010

43. Qual é o valor de $\log_5\left(\dfrac{5^{1000}}{25}\right)$?

(A) 40 **(B)** 500 **(C)** 975 **(D)** 998

Teste Intermédio 12º ano – 15.03.2010

44. Numa certa região, uma doença está a afetar gravemente os coelhos que lá vivem. Em consequência dessa doença, o número de coelhos existentes nessa região está a diminuir.
Admita que o número, em **milhares**, de coelhos que existem nessa região, t **semanas** após a doença ter sido detetada, é dado aproximadamente por

$$f(t) = \frac{k}{3 - 2e^{-0{,}13t}} \quad (k \text{ designa um número real positivo})$$

Resolva, **usando exclusivamente métodos analíticos**, os dois itens seguintes.
Nota: a calculadora pode ser utilizada em cálculos numéricos; sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

44.1. Suponha que $k = 10$
Ao fim de quantos **dias**, após a doença ter sido detetada, é que o número de coelhos existentes na referida região é igual a 9000?

44.2. Admita agora que o valor de k é desconhecido.
Sabe-se que, durante a primeira semana após a deteção da doença, morreram dois mil coelhos e não nasceu nenhum.
Determine o valor k de arredondado às décimas.

Teste Intermédio 12º ano – 15.03.2010

45. Sejam a e b dois números reais superiores a 1 e tais que $b = a^2$.

Qual dos valores seguintes é igual a $1 + \log_b a$?

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** $\frac{4}{3}$ **(D)** $\frac{3}{2}$

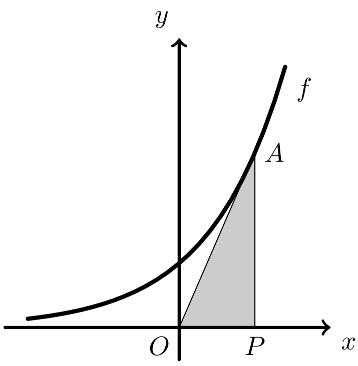
Exame – 2009, Ép. especial

46. Na figura seguinte, está representada parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$.

Considere um ponto, P, a deslocar-se sobre o semieixo positivo das abcissas.

Seja A o ponto pertencente ao gráfico da função que tem a mesma abcissa que o ponto P.

Para cada posição do ponto P, define-se um triângulo $[OAP]$. Qual das expressões seguintes representa, em função de x (abcissa do ponto P), a área do triângulo $[OAP]$?



(A) $x.e^x$ **(B)** $\frac{x.e^x}{2}$ **(C)** $\frac{x + e^x}{2}$ **(D)** e^x

Exame – 2009, Ép. especial

47. Admita que a magnitude, M, de um sismo é dada, na escala de Richter, por

$$M = 0{,}67 \log E - 3{,}25$$

sendo E a energia, em joules, libertada por esse sismo.
(log designa logaritmo de base 10.)

Resolva, **recorrendo exclusivamente a métodos analíticos**, os dois itens seguintes.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

47.1. Sejam E_1 e E_2 as energias libertadas por dois sismos de magnitudes M_1 e M_2 , respetivamente.

Determine $\frac{E_1}{E_2}$, com aproximação às unidades, sabendo que $M_1 - M_2 = 1$

Interprete o valor obtido no contexto da situação apresentada.

47.2. O sismo que ocorreu nos Açores, no dia 1 de Abril de 2009, teve magnitude 4,7, na escala de Richter.

Qual foi a energia libertada nesse sismo?

Escreva o resultado em notação científica, isto é, na forma $a \times 10^b$, sendo b um número inteiro, e a um número entre 1 e 10.
Apresente o valor de a arredondado às unidades.

Exame – 2009, Ép. especial

48. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{x+1}$
Qual dos pontos seguintes pertence ao gráfico de f ?
(ln designa logaritmo de base e.)

(A) $(-1, 0)$ **(B)** $(\ln 2, 2e)$ **(C)** $(\ln 5, 6)$ **(D)** $(-2, e)$

Exame – 2009, 2ª Fase

49. Numa certa zona de cultivo, foi detetada uma doença que atinge as culturas. A área afetada pela doença começou por alastrar durante algum tempo, tendo depois começado a diminuir.
Admita que a área, em hectares, afetada pela doença, é dada, em função de t, por

$$A(t) = 2 - t + 5\ln(t+1)$$

sendo t $(0 \leq t < 16)$ o tempo, em semanas, decorrido após ter sido detetada essa doença.
Quando a doença foi detetada, já uma parte da área de cultivo estava afetada. Passada uma semana, a área de cultivo afetada pela doença aumentou.
De quanto foi esse aumento?
Resolva, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos e apresente o resultado em hectares, arredondado às centésimas.

Exame – 2009, 2ª Fase

50. Seja x um número real positivo.
Qual das expressões seguintes é igual a $e^{4\ln x} - 10^{2\log x}$?
(ln designa logaritmo de base e; log designa logaritmo de base 10.)

(A) $\ln x^4 - \log x^2$ **(B)** $x^4 + x^2$ **(C)** $x^4 - x^2$ **(D)** $\dfrac{\ln x^4}{\log x^2}$

Exame – 2009, 1ª Fase

51. Sejam as funções f e h, de domínios $]1, +\infty[$ e $]-\infty, 2[$, respetivamente, definidas por $f(x) = \log_2(x-1)$ e por $h(x) = \log_2(2-x)$
Determine, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, o conjunto solução da condição $f(x) \geq 1 + h(x)$
Apresente o resultado sob a forma de intervalo real.

Exame – 2009, 1ª Fase

52. Sejam a, x e y três números reais tais que $\log_a x = 1 + 5\log_a y$
Qual das igualdades seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) $x = ay^5$ **(B)** $x = 5ay$ **(C)** $x = 5y$ **(D)** $x = y^5$

Teste Intermédio 12º ano – 27.05.2009

53. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$$\log_2(x-1) + \log_2(13-x) \leq 5$$

Apresente a sua resposta na forma de união de intervalos de números reais.

Teste Intermédio 12º ano – 11.03.2009

54. Quando uma substância radioativa se desintegra, a sua **massa**, medida em **gramas**, varia de acordo com uma função do tipo

$$m(t) = ae^{bt}\ ,\ t \geq 0\,,$$

em que a variável t designa o **tempo**, medido em **milénios** decorrido desde um certo instante inicial. A constante real b depende da substância e a constante real a é a massa da substância no referido instante inicial.
Resolva as alíneas seguintes sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar cálculos numéricos.

54.1. O *carbono-14* é uma substância radioativa utilizada na datação de fósseis em que esteja presente.
Relativamente a um certo fóssil, sabe-se que:

- a massa de *carbono-14* nele presente, mil anos depois de um certo instante inicial, era de 2,91 g
- a massa de *carbono-14* nele presente, dois mil anos depois do mesmo instante inicial, era de 2,58 g

Tendo em conta estes dados, determine:

- o valor da constante b para o *carbono-14*;
- a massa de *carbono-14* que existia no fóssil, no referido instante inicial.

Apresente os dois valores arredondados às centésimas.
Nota: se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

54.2. O *rádio-226* é outra substância radioativa.
Em relação ao *rádio-226*, sabe-se que $b = -0{,}43$
Verifique que, quaisquer que sejam os valores de a e de t, $\dfrac{m(t+1{,}6)}{m(t)}$ é constante.
Determine o valor dessa constante, arredondado às décimas, e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

Teste Intermédio 12º ano – 11.03.2009

55. Para todo o $x \in \mathbb{R}$, qual das seguintes expressões é equivalente a $x.\ln\left(e^{e}\right)$?

(A) ex **(B)** e^{x} **(C)** e^{ex} **(D)** $x + e$

Exame – 2008, Ép. especial

56. Aqueceu-se água num recipiente, durante um determinado tempo, num local onde a temperatura ambiente é constante e igual a 25º Celsius. Interrompeu-se o processo de aquecimento, e nesse instante, a água começou a arrefecer.
O arrefecimento da água segue a Lei do arrefecimento de Newton, de acordo com o modelo matemático: $T(t) = 25 + 48e^{-0{,}05t}$, em que $T(t)$ representa a temperatura da água em graus Celsius, t minutos após o início do arrefecimento.
Recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, determine ao fim de quanto tempo, após o início do arrefecimento, a temperatura da água atinge os 36º Celsius.
Apresente o resultado em minutos e segundos, com estes arredondados às unidades.
Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use quatro casas decimais.

Exame – 2008, Ép. especial

57. Sabe-se que o ponto $P(1{,}3)$ pertence ao gráfico da função $f(x) = 2^{ax} - 1\,,\ a \in \mathbb{R}$.
Qual é o valor de a?

(A) 2 **(B)** 1 **(C)** 0 **(D)** -2

Exame – 2008, 2ª Fase

58. A massa de uma substância radioativa diminui com a passagem do tempo. Supõe-se que, para uma amostra de uma determinada substância, a massa, em gramas, ao fim de t **horas** de observação, é dada pelo modelo matemático $M(t) = 15 \times e^{-0,02t}$, $t \geq 0$.
Resolva, **usando métodos analíticos**, o itens que se segue.
Ao fim de quanto tempo se reduz a metade a massa inicial da amostra da substância radioactiva?
Apresente o resultado em **horas e minutos**, estes arredondados às unidades.
Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

Exame – 2008, 2ª Fase

59. Seja a um número real maior do que 1.
Qual dos seguintes valores é igual a $2\log_a\left(a^{\frac{1}{3}}\right)$?

(A) $-\frac{2}{3}$ **(B)** $-\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{2}{3}$

Exame – 2008, 1ª Fase

60. Num determinado dia, um grupo de amigos decidiu formar uma associação desportiva.
Admita que, t dias após a constituição da associação, o número de sócios é dado, aproximadamente, por:

$$N(t) = \frac{2000}{1 + 199e^{-0,01t}} \text{ , } t \geq 0$$

Resolva, **usando métodos analíticos**, o item seguinte.
Ao fim de quantos dias se comemorou a inscrição do sócio número 1000?
Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use aproximações às milésimas.

Exame – 2008, 1ª Fase

61. Seja a um número real maior do que 1.
Indique qual das expressões seguintes é igual a $\log_a 3 + 2\log_a 5$?

(A) $\log_a 30$ **(B)** $\log_a 40$ **(C)** $\log_a 75$ **(D)** $\log_a 100$

Teste Intermédio 12º ano – 29.04.2008

62. Num lago onde não havia peixes, introduziram-se, num determinado momento, alguns peixes.
Admita que, t anos depois, o número de peixes existentes no lago é dado aproximadamente por

$$f(t) = \frac{2000}{1 + ke^{-0,13t}}$$

onde k designa um número real.

62.1. Determine o valor de k, supondo que foram introduzidos 100 peixes no lago.

62.2. Admita agora que $k = 24$.
Sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar cálculos numéricos, resolva o seguinte problema:
Ao fim de quantos anos o número de peixes no lago atinge o meio milhar? Apresente o resultado arredondado às unidades.
Nota: se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Teste Intermédio 12º ano – 29.04.2008

63. De um número real x sabe-se que $\log_5(x) = \pi - 1$
Indique o valor de $5x$

(A) $25^{\pi-1}$ **(B)** $5^{\pi-1}$ **(C)** 5^{π} **(D)** $5(\pi-1)^5$

Teste Intermédio 12º ano – 17.01.2008

64. Admita que uma certa população de seres vivos evolui de acordo com a seguinte **lei**: o número de indivíduos da população, t dias após um certo instante inicial, é dado aproximadamente por

$$P(t) = ae^{kt} \qquad \left(t \in \mathbb{R}_+^0\right)$$

em que

- a é o número de indivíduos da população no instante inicial ($a > 0$)
- k é uma constante real

64.1. Seja r um número real positivo.
Considere que, ao fim de n dias, contados a partir do instante inicial, o número de indivíduos da população é igual a r vezes o número de indivíduos que existiam no referido instante inicial.
Mostre que se tem $k = \dfrac{\ln(r)}{n}$ (ln designa logaritmo de base e)

64.2. Admita que, às zero horas do dia 1 do corrente mês, se iniciou, em laboratório, uma cultura de bactérias, em pequena escala, na qual se juntaram

- 500 indivíduos de uma estirpe A
- 500 indivíduos de uma estirpe B

Nunca foram introduzidos mais indivíduos destas duas estirpes nesta cultura.
As condições da cultura são desfavoráveis para a estirpe A, mas são favoráveis para a estirpe B. De facto,

- decorrido exatamente um dia, a estirpe A estava reduzida a 250 indivíduos
- decorridos exatamente seis dias, a estirpe B tinha alcançado 1000 indivíduos

Quer a estirpe A, quer a estirpe B, evoluíram de acordo com a acima lei referida. No entanto, o valor da constante k para a estirpe A é diferente do valor dessa constante para a estirpe B.
Utilizando a igualdade da alínea anterior, verifique que:

- no caso da estirpe A, o valor da constante k_A, com quatro casas decimais, é $k_A = -0{,}6931$
- no caso da estirpe B, o valor da constante k_B, com quatro casas decimais, é $k_B = 0{,}1155$

Teste Intermédio 12º ano – 17.01.2008

65. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = 1 - \ln(x^2)$
Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, determine os pontos de interseção do gráfico de f com o eixo Ox

Exame – 2007, 2ª Fase

66. Sabendo que:
$\ln(x) - \ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) > 0$ (ln designa logaritmo na base e),
um valor possível para x é:

(A) 0 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 2

Exame – 2007, 1ª fase

67. Admita que a intensidade da luz solar, x metros abaixo da superfície da água, é dada, numa certa unidade de medida, por

$$I(x) = ae^{-bx} \quad (x \geq 0)$$

a e b são constantes positivas que dependem do instante e do local onde é efetuada a medição.
Sempre que se atribui um valor a a e um valor a b obtemos uma função de domínio $\mathbb{R}_0^+$
Medições efetuadas, num certo instante e em determinado local do oceano Atlântico, mostraram que, a 20 metros de profundidade, a intensidade da luz solar era metade da sua intensidade à superfície da água.
Determine o valor de b para esse instante e local. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Exame – 2007, 1ª Fase

68. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $e^{-x} > \frac{1}{e}$

(A) $]-\infty, -1[$ **(B)** $]-\infty, 1[$ **(C)** $]-1, +\infty[$ **(D)** $]1, +\infty[$

Teste Intermédio 12º ano – 15.03.2007

69. Seja a um número real maior do que 1.
Indique o valor de $\log_a \left(a \times \sqrt[3]{a}\right)$

(A) $\frac{5}{4}$ **(B)** $\frac{4}{3}$ **(C)** $\frac{5}{3}$ **(D)** $\frac{3}{2}$

Teste Intermédio 12º ano – 15.03.2007

70. A acidez de uma solução é medida pelo valor do seu pH, que é dado por

$$pH = -\log(x)$$

onde x designa a concentração de iões H_3O^+, medida em mol/dm^3.
Sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes:

70.1. Admita que o pH do sangue arterial humano é 7,4.
Qual é a concentração (em mol/dm^3) de iões H_3O^+, no sangue arterial humano?
Escreva o resultado em notação científica, isto é, na forma $a \times 10^b$, com b inteiro e a entre 1 e 10.
Apresente o valor de a arredondado às unidades.

70.2. A concentração de iões H_3O^+ no café é tripla da concentração de iões H_3O^+ no leite.
Qual é a diferença entre o pH do leite e o pH do café? Apresente o resultado arredondado às décimas.
Sugestão: comece por designar por l a concentração de iões H_3O^+ no leite e por exprimir, em função de l, a concentração de iões H_3O^+ no café.

Teste Intermédio 12º ano – 15.03.2007

71. Seja c um número real maior do que 1.

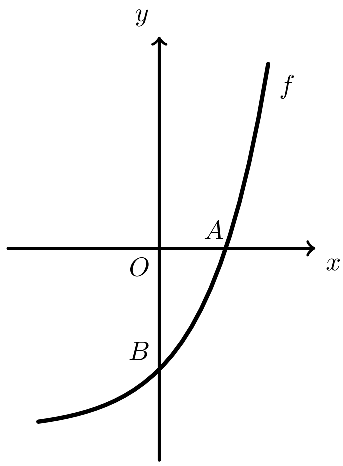
Na figura ao lado está representada uma parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x - c$.

Tal como a figura sugere

- A é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Ox
- B é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Oy

Mostre que:

Se o declive da reta AB é $c - 1$, então $c = e$

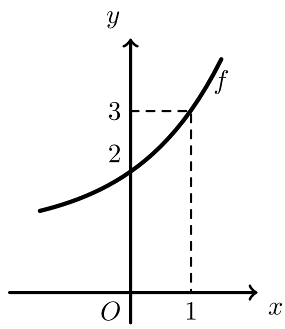


Teste Intermédio 12º ano – 15.03.2007

72. Sejam a e b dois números reais positivos.
Na figura ao lado está parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a^x + b$.
Tal como a figura sugere, os pontos (0,2) e (1,3) pertencem ao gráfico de f.
Quais são os valores de a e de b?

(A) $a = 2$ e $b = 1$ **(B)** $a = 2$ e $b = 3$

(C) $a = 3$ e $b = 2$ **(D)** $a = 3$ e $b = 1$



Exame – 2006, 2ª Fase

73. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \frac{\ln\left(\sqrt{e^x}\right)}{2} \qquad \text{(ln designa logaritmo de base } e\text{)}$$

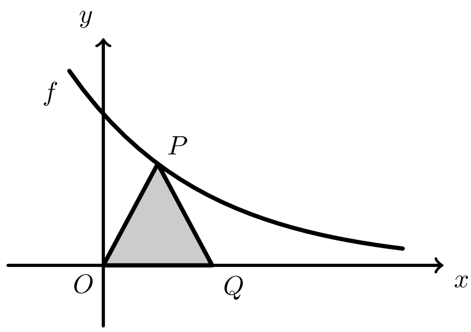
Qual das seguintes expressões pode também definir h?

(A) $\sqrt{x}$ **(B)** $\frac{x}{2}$ **(C)** $\frac{x}{4}$ **(D)** $\frac{\sqrt{x}}{2}$

Exame – 2006, 1ª fase

74. Na figura ao lado estão representados:

- parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-x}$
- um triângulo **isósceles** $[OPQ]$, $\left(\overline{PO} = \overline{PQ}\right)$em que:
  - O é a origem do referencial;
  - P é um ponto do gráfico de f;
  - Q pertence ao eixo das abcissas.



Considere que o ponto P se desloca no primeiro quadrante (eixos não incluídos), ao longo do gráfico de f.
O ponto Q acompanha o movimento do ponto P, deslocando-se ao longo do eixo das abcissas, de tal modo que $\overline{PO}$ permanece sempre igual a $\overline{PQ}$.

Seja A a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, que faz corresponder, à abcissa x do ponto P, a área do triângulo $[OPQ]$.
Mostre que, para cada $x \in \mathbb{R}^+$, se tem $A(x) = xe^{-x}$

Exame – 2006, 1ª fase

75. Indique o número real que é solução da equação $e^{x-2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{3}{2}$ **(C)** $\frac{5}{2}$ **(D)** $\frac{7}{2}$

Teste Intermédio 12º ano – 17.03.2006

76. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $\log_3(1-x) \leq 1$

(A) $[-2,1[$ **(B)** $[-1,2[$ **(C)** $]-\infty,-2]$ **(D)** $[2,+\infty[$

Teste Intermédio 12º ano – 17.03.2006

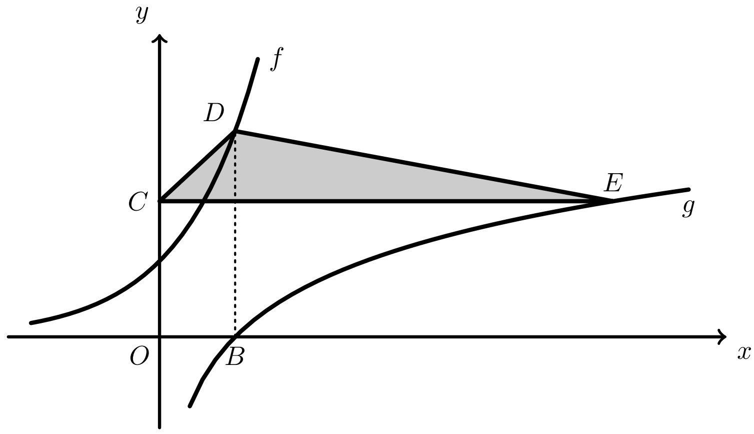
77. Na figura abaixo estão representadas, em referencial o. n. xOy:

- parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$
- parte do gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \ln x$ (ln designa logaritmo de base e)

O ponto A é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Oy e o ponto B é o ponto de interseção do gráfico de g com o eixo Ox.

Na figura está também representado um triângulo $[CDE]$.

O ponto C pertence ao eixo Oy, o ponto D pertence ao gráfico de f e o ponto E pertence ao gráfico de g.



Sabe-se ainda que:

- a reta $[BD]$ é paralela ao eixo Oy e a reta $[CE]$ é paralela ao eixo Ox
- $\overline{AC} = \overline{OA}$

Qual é a área do triângulo $[CDE]$?

(A) $\frac{(e-1)\ln 2}{2}$ **(B)** $\frac{(e^2-1)\ln 2}{2}$ **(C)** $\frac{e(e-2)}{2}$ **(D)** $\frac{e^2(e-2)}{2}$

Teste Intermédio 12º ano – 17.03.2006

78. Um estudo de mercado, encomendado por uma empresa de venda de produtos alimentares, concluiu que a quantidade de azeite *Azeitona do Campo*, vendida num mês por essa empresa, depende do preço de venda ao público, de acordo com a função

$$V(x) = e^{14-x}$$

sendo x o preço de venda ao público, em euros, de 1 litro desse azeite e $V(x)$ a quantidade vendida num mês (medida em litros).
A empresa tem um conjunto de despesas (compra ao produtor, empacotamento, publicidade, transportes, etc.) com a compra e a venda do azeite.
Sabendo que cada litro de azeite vendido acarreta à empresa uma despesa total de 3 euros, **justifique** que o lucro mensal da empresa (em euros), resultante da venda do azeite, é dado por

$$L(x) = (x-3)e^{14-x}$$

Teste Intermédio 12º ano – 17.03.2006

79. Considere a função f, de domínio $]0, +\infty[$, definida por $f(x) = \frac{1-\ln x}{x}$ (ln designa logaritmo de base e).

Sem recorrer à calculadora, mostre que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(4e^2\right)$

Teste Intermédio 12º ano – 17.03.2006

80. O tempo t, medido em anos, que um planeta demora a realizar uma translação completa, em torno do Sol, está relacionado com a distância média, d, desse planeta ao Sol, medida em milhões de quilómetros, por meio da fórmula

$$2\ln(t) = k + 3\ln(d)$$

(k é uma constante real e ln designa o logaritmo de base e)

Sem utilizar a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes:

80.1. Sabe-se que:

- a distância média de Úrano ao Sol é (aproximadamente) o dobro da distância média de Saturno ao Sol;
- o planeta Urano demora (aproximadamente) 84 anos a realizar uma translação completa em torno do Sol.

Determine quanto tempo demora o planeta Saturno a realizar uma translação completa em torno do Sol. Apresente o resultado em anos, arredondado às décimas.

Nota: Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

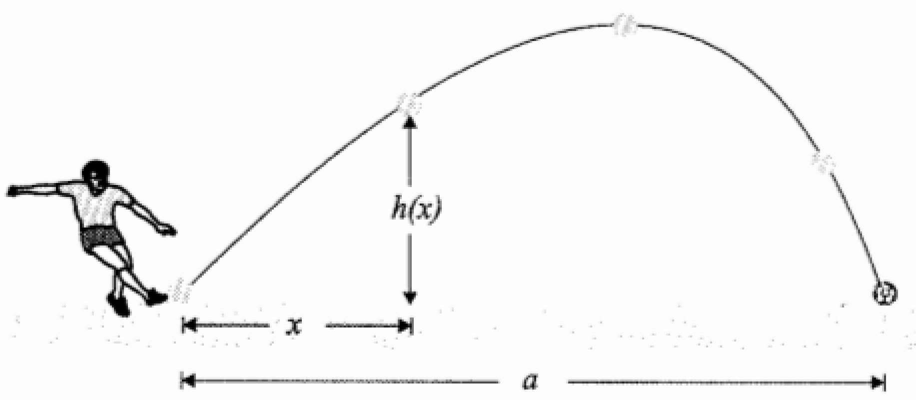
80.2. Sabendo que a distância média da Terra ao Sol é, aproximadamente, de 149,6 milhões de quilómetros, determine o valor de k (apresente o resultado arredondado às unidades).

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)

81. Na figura ao lado está representada a trajetória de uma bola de futebol, depois de ter sido pontapeada por um jogador de da seleção portuguesa, durante um treino de preparação para o EURO-2004.

Designou-se por a a distância, em metros, entre o ponto onde a bola foi pontapeada e o ponto onde ela caiu.

Considere a função h definida em $[0,a]$ por



$h(x) = 2x + 10\ln(1 - 0{,}1x)$ (ln designa logaritmo de base e)

Admita que $h(x)$ é a distância, em metros, da bola ao solo, no momento em que a sua projeção no solo se encontra a x metros do local onde foi pontapeada.
Sem utilizar a calculadora, mostre que a taxa de variação média da função h, no intervalo $[1,3]$ é

$$\ln\left[e^2\left(\frac{7}{9}\right)^5\right]$$

Exame – 2005, 2ª Fase (cód. 435)

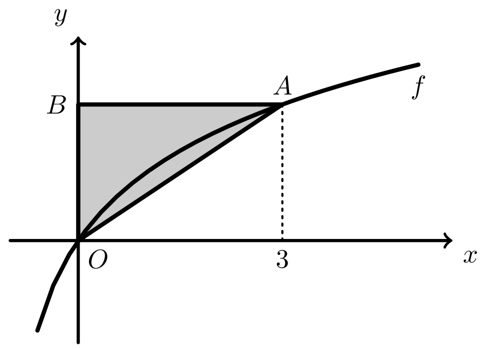
82. Na figura ao lado, está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f, definida, em $]-1,+\infty[$, por

$$f(x) = \log_2(x+1)$$

Na mesma figura, está também representado um triângulo retângulo $[ABO]$.
O ponto A tem abcissa 3 e pertence ao gráfico de f.
O ponto B pertence ao eixo Oy.

Qual é a área do triângulo $[ABO]$?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4



Exame – 2005, 1ª fase (cód. 435)

83. Admita que o número de elementos de uma população de aves, t anos após o início de 1970, é dado aproximadamente por

$$P(t) = 5{,}2 \times 10^7 \times e^{(N-M)t}, \quad t \geq 0,$$

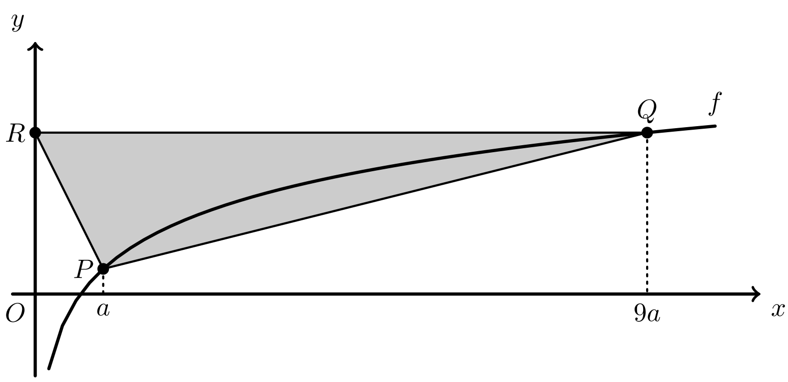
em que N e M são duas constantes, denominadas, respetivamente, por *taxa de natalidade* e *taxa de mortalidade* da população.
No início de 2000, a população era metade da que existia no início de 1970. Sabendo que a *taxa de natalidade* é 7,56, determine a *taxa de mortalidade*, **sem recorrer à calculadora**, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.
Apresente o resultado arredondado às centésimas.
Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Exame – 2005, 1ª Fase (cód. 435)

84. Na figura seguinte está parte da representação gráfica da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_3 x$.

Na figura está também representado um triângulo $[PQR]$.
Os pontos P e Q pertencem ao gráfico de f e as suas abcissas são a e $9a$, respetivamente (a designa um número real positivo).
O ponto R pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à de Q.

Qual das expressões seguintes dá a área do triângulo $[PQR]$?



(A) $9a^2$ **(B)** $9a$ **(C)** $\frac{9a^2}{2}$ **(D)** $\frac{9a+1}{2}$

Exame – 2004, Ép. especial (cód. 435)

85. Indique o valor de p para o qual se verifica a igualdade $\log_p 16 = 4$

(A) -4 **(B)** 4 **(C)** 2 **(D)** $\sqrt{2}$

Exame – 2004, 2ª Fase (cód. 435)

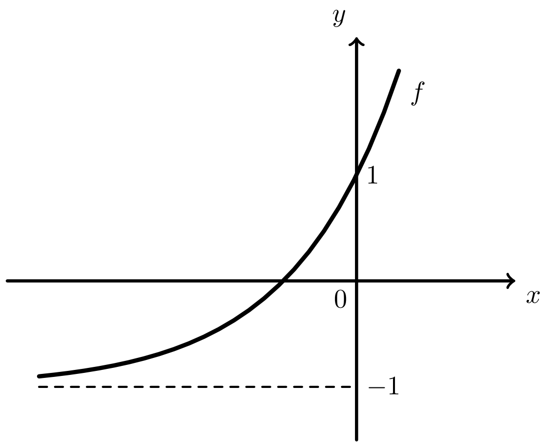
86. Sabe-se que $\log_2 a = \frac{1}{5}$

Qual é o valor de $\log_2 \left(\frac{a^5}{8}\right)$?

(A) -1 **(B)** -2 **(C)** -3 **(D)** -4

Exame – 2004, 1ª Fase (cód. 435)

87. Para um certo valor de a e para um certo valor de b, o gráfico da função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a + be^x$, está parcialmente representado na figura ao lado.



Tal como a figura sugere,

- a reta de equação $y = -1$ é assintota do gráfico de f
- o gráfico de f interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 1

Quais são os valores de a e de b?

(A) $a = -1$ e $b = 2$ **(B)** $a = -1$ e $b = 1$

(C) $a = 1$ e $b = -1$ **(D)** $a = 1$ e $b = -2$

Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)

88. Seja g uma função de domínio A, definida por $g(x) = \ln(1 - x^2)$
Qual dos seguintes poderá ser o conjunto A?

(A) $]-e+1{,}e-1[$ **(B)** $]-1{,}1[$ **(C)** $]0,+\infty[$ **(D)** $]-\infty{,}1[$

Exame – 2003, 2ª fase (cód. 435)

89. Admita que, ao longo dos séculos XIX e XX e dos primeiros anos do século XXI, a população de Portugal Continental, em milhões de habitantes, é dada, aproximadamente, por

$$p(t) = 3{,}5 + \frac{6{,}8}{1 + 12{,}8e^{-0{,}036t}}$$

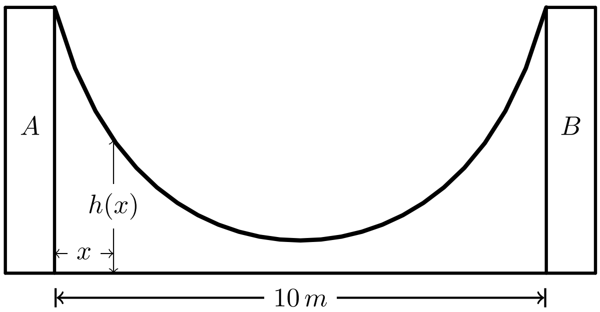
(considere que t é medido em anos e que o instante $t = 0$ corresponde ao **início** do ano 1864).

89.1. De acordo com este modelo, qual foi a população de Portugal Continental no **final** do ano de 2003? Apresente o resultado em milhões de habitantes, arredondado às décimas.
Nota: Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

89.2. **Sem recorrer à calculadora** (a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos), resolva o seguinte problema:
De acordo com este modelo, em que ano a população de Portugal Continental foi de 3,7 milhões de habitantes?
Nota: Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Exame – 2003, 2ª Fase (cód. 435)

90. Uma rampa de desportos radicais foi construída entre duas paredes, A e B, distanciadas de 10 metros, como se mostra na figura ao lado.



Considere a função h definida por

$$h(x) = 15 - 4\ln(-x^2 + 10x + 11)$$

(ln designa logaritmo de base e)

Admita que $h(x)$ é a altura, em metros, do ponto da rampa situado a x metros à direita da parede A.

90.1. Determine a altura da parede A. Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.
Nota: se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

90.2. Mostre, analiticamente, que $h(5 - x) = h(5 + x)$
Interprete esta igualdade no contexto da situação descrita.

Exame – 2003, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 435)

91. Num laboratório, foi colocado um purificador de ar.
Num determinado dia, o purificador foi ligado às zero horas e desligado algum tempo depois.
Ao longo desse dia, o nível de poluição do ar **diminuiu**, enquanto o purificador esteve ligado.
Uma vez o purificador desligado, o nível de poluição do ar **começou de imediato a aumentar**.
Admita que o nível de poluição do ar no laboratório, medido em mg/l de ar, às t horas desse dia, pode ser dado por

$$P(t) = 1 - \frac{\ln(t+1)}{t+1}\,,\ t \in [0{,}24] \qquad \text{(ln designa logaritmo de base } e\text{)}$$

Qual é o nível de poluição à uma hora e trinta minutos **da tarde**?
Apresente o resultado na unidade considerada, arredondado às décimas e sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Exame – 2003, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

92. Sejam a e b dois números reais positivos.
Qual das seguintes igualdades é equivalente a $\ln a = -\ln b$?

(A) $a + b = 1$ **(B)** $\frac{a}{b} = 1$ **(C)** $a \times b = 1$ **(D)** $a - b = 1$

Exame – 2002, Prova para militares (cód. 435)

93. Considere as funções f e g de domínio $\mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = \frac{1}{3} + 2e^{1-x} \qquad\qquad g(x) = 2\,\text{sen}\,x - \cos x$$

Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva a equação $f(x) = g(\pi)$, apresentando a solução na forma $\ln(ke)$, onde k representa um número real positivo.
(ln designa logaritmo de base e)

Exame – 2002, 2ª Fase (cód. 435)

94. O nível intensidade N de um som, medido em decibéis, é função da sua **intensidade** I, medida em watt por metro quadrado, de acordo com a igualdade

$$N = 10\log_{10}(10^{12}I), \text{ para } I > 0$$

Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes.

94.1. Verifique que $N = 120 + 10\log_{10} I$

94.2. Admita que o nível de ruído de um avião a jato, ouvido por uma pessoa que se encontra na varanda de um aeroporto, é de 140 decibéis.
Determine a intensidade desse som, em watt por metro quadrado.

Exame – 2002, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 435)

95. Doses terapêuticas iguais de um certo antibiótico são administradas, pela primeira vez, a duas pessoas: a Ana e o Carlos.
Admita que, durante as doze primeiras horas após a tomada simultânea do medicamento pela Ana e pelo Carlos, as concentrações de antibiótico, medidas em miligramas por litro de sangue, são dadas, respetivamente, por

$$A(t) = 4t^3e^{-t} \qquad \text{e} \qquad C(t) = 2t^3e^{-0,7t}$$

A variável t designa o tempo, medido em **horas**, que decorre desde o instante em que o medicamento é tomado ($t \in [0,12]$).
Recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora para efetuar cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes.

95.1. Determine o valor da concentração deste antibiótico no sangue da Ana, quinze depois **minutos** de ela o ter tomado. Apresente o resultado, em miligramas por litro de sangue, arredondado às centésimas.
Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

95.2. No instante em que as duas pessoas tomam o medicamento, as concentrações são iguais (por serem nulas). Determine quanto tempo depois as concentrações voltam a ser iguais. Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).
Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Exame – 2002, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

96. A Sofia preparou um pudim, para servir como sobremesa ao jantar. Depois de o ter confecionado, a Sofia colocou o pudim a arrefecer, na bancada da cozinha. Uma hora depois, colocou-o no frigorífico, para ficar bem frio.
Admita que a temperatura do pudim, em graus centígrados, t minutos depois de ter sido colocado na bancada, é dada, por

$$f(t) = \begin{cases} 20 + 80 \times 2^{-0,05t}, & 0 \leq t < 60 \\ \\ 6 + 24 \times 2^{-0,05(t-60)}, & \text{t} \geq 60 \end{cases}$$

Quanto tempo deverá o pudim estar **no frigorífico**, para que a sua temperatura fique igual a doze graus? Apresente o resultado em minutos e utilize métodos exclusivamente analíticos.

Exame – 2001, Prova para militares (cód. 435)

97. Considere a equação $3y = \log_2 x \quad (x > 0)$
Qual das seguintes condições é equivalente a esta equação?

(A) $x = 8^y$ **(B)** $x = 3y^2$ **(C)** $y = 9^x$ **(D)** $y = \left(\frac{x}{3}\right)^2$

Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)

98. Um petroleiro que navegava no Oceano Atlântico, encalhou numa rocha e sofreu um rombo no casco. Em consequência disso, começou a derramar crude. Admita que, às t horas do dia a seguir ao do acidente, a área, em Km^2, de crude espalhado pelo oceano é dada por

$$A(t) = 16e^{0,1t}\,, \ \ (t \in [0{,}24])$$

98.1. Verifique que, para qualquer valor de t, $\dfrac{A(t+1)}{A(t)}$ é constante.
Determine um valor aproximado dessa constante (arredondado às décimas) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

98.2. Admita que a mancha de crude é circular, com centro no local onde o petroleiro encalhou. Sabendo que esse local se encontra a sete quilómetros da costa, determine a que horas, do dia seguinte ao do acidente, a mancha de crude atingirá a costa.
Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).
Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Exame – 2001, 2ª Fase (cód. 435)

99. Considere as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = 2^x \qquad \text{e} \qquad g(x) = 3^x$$

Qual é o conjunto solução da inequação $f(x) > g(x)$?

(A) Conjunto vazio **(B)** $\mathbb{R}^-$ **(C)** $\mathbb{R}^+$ **(D)** $\mathbb{R}$

Exame – 2001, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 435)

100. Considere que a altura A (em metros) de uma criança do sexo masculino pode ser expressa, aproximadamente, em função do seu peso p (em quilogramas) por

$$A(p) = -0{,}52 + 0{,}55 \ln p \qquad \text{(ln designa o logaritmo de base } e\text{)}$$

Recorrendo a métodos analíticos e usando a calculadora para fazer cálculos numéricos, resolva os dois itens seguintes.

100.1. O Ricardo tem $1{,}4\,m$ de altura. Admitindo que a altura e o peso do Ricardo estão de acordo com a igualdade referida, qual será o seu peso?
Apresente o resultado em quilogramas, arredondado às unidades.
Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

100.2. Verifique que, para qualquer valor de p, a diferença $A(2p) - A(p)$ é constante. Determine um valor aproximado dessa constante (com duas casas decimais) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

Exame – 2001, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 435)

101. Qual das expressões seguintes é, para qualquer número real positivo a, igual a $e^{2\ln a}$?
(ln designa o logaritmo de base e)

(A) $2a$ **(B)** $2 + a$ **(C)** $2a$ **(D)** a^2

Exame – 2001, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

102. A pressão atmosférica de cada local da Terra depende da altitude a que este se encontra.
Admita que a pressão atmosférica P (medida em quilopascal) é dada, em função de h em **quilómetros**, por

$$P(h) = 101e^{-0,12h}$$

102.1. A montanha mais alta de Portugal é o Pico, na ilha do Pico - Açores.
A altitude do cume do Pico é 2350 metros.
Qual é o valor da pressão atmosférica nesse local?
Apresente o resultado em quilopascal, arredondado às unidades.

102.2. Determine x tal que, para qualquer h, $P(h+x) = \frac{1}{2}P(h)$.
Apresente o resultado arredondado às décimas.
Interprete o valor obtido, no contexto do problema.

Exame – 2000, 2ª fase (cód. 435)

103. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, definida por $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$

Resolva a equação $\ln[f(x)] = x$, recorrendo exclusivamente a processos analíticos (ln designa logaritmo de base e).

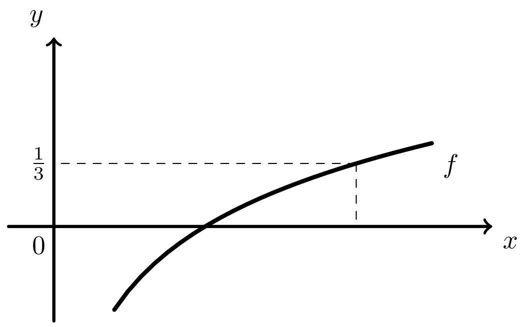
Exame – 2000, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 435)

104. Na figura ao lado está parte da representação gráfica da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_8 x$

P é um ponto do gráfico de f que tem ordenada $\frac{1}{3}$

Qual é a abcissa do ponto P?

(A) $\frac{8}{3}$ **(B)** 1 **(C)** $\ln\left(\frac{8}{3}\right)$ **(D)** 2



Exame – 2000, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

105. Sejam a, b e c três números reais tais que $\log_a b = c$
Qual é o valor de $\log_a(ab)$?

(A) $1+c$ **(B)** $a+c$ **(C)** ac **(D)** $a+bc$

Exame – 2000, Prova modelo (cód. 435)

106. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{x+a}$, onde a designa um certo número real.
O gráfico de f interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 2
Indique o valor de a.

(A) $\ln 2$ **(B)** 2 **(C)** e^2 **(D)** $e + \ln 2$

Exame – 2000, Prova para militares (cód. 135)

107. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \log_2(2.\sqrt[3]{x})$
Qual das expressões seguintes também pode definir a função g?

(A) $2 + \log_2(\sqrt[3]{x})$ **(B)** $2.\log_2(\sqrt[3]{x})$ **(C)** $\frac{3+\log_2 x}{3}$ **(D)** $\frac{1+\log_2 x}{2}$

Exame – 1999, Prova modelo (cód. 135)

108. Um pára-quedista salta de um helicóptero. Ao fim de algum tempo, o pára-quedas abre.
Admita que a distância (em metros) a que o pára-quedista se encontra do solo, t segundos **após a abertura do pára-quedas**, é dada por

$$d(t) = 840 - 6t + 25e^{-1,7t}$$

Sabendo que, no momento em que o pára-quedista salta do helicóptero, este se encontra a 1500 metros do solo, determine a distância percorrida em queda livre pelo pára-quedista (desde que salta do helicóptero até ao momento da abertura do pára-quedas).

Exame – 1998, Prova para militares (cód. 135)

109. A magnitude M de um sismo e a energia total E libertada por esse sismo estão relacionadas pela equação

$$\log_{10} E = 5{,}24 + 1{,}44M \qquad \text{(a energia } E \text{ é medida em Joule).}$$

109.1. Um físico português estimou que o terramoto de Lisboa de 1755 teve magnitude 8,6.
Mostre que a energia total libertada nesse sismo foi aproximadamente $4{,}2 \times 10^{17}$ Joule.

109.2. A ponte *Vasco da Gama* foi concebida para resistir a um sismo cuja energia total libertada seja cinco vezes a do terremoto de Lisboa de 1755. Qual é a magnitude de um sismo com essa característica? Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas.

Exame – 1998, 2ª fase (cód. 135)

110. Seja f a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = \log_2(8x^2) - \log_2 x$

110.1. Mostre que $f(x) = 3 + \log_2 x$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$

110.2. Determine a abcissa do ponto de interseção do gráfico de f com a reta de equação $y = 8$

Exame – 1998, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 135)

111. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln(3x)$ (ln designa logaritmo de base e).
Qual dos seguintes pontos pertence ao gráfico da função f?

(A) $(e, \ln 3)$ **(B)** $(e, 1 + \ln 3)$ **(C)** $(e, e + \ln 3)$ **(D)** $(e, e \ln 3)$

Exame – 1998, Prova modelo (cód. 135)

112. Um fio encontra-se suspenso entre dois postes.
A distância entre ambos é de 30 metros.

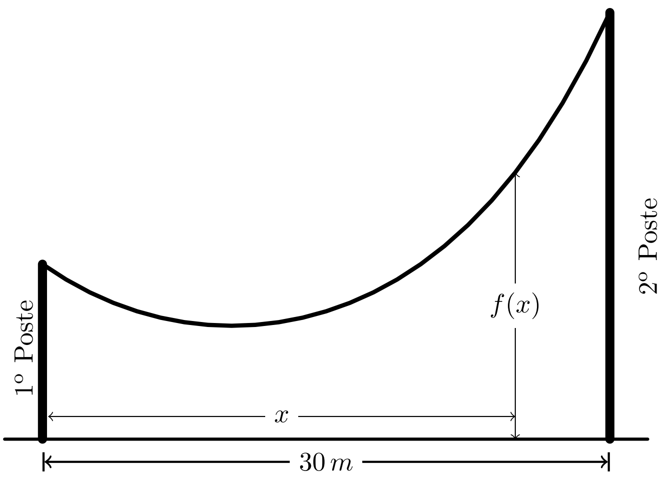
Considere a função f, definida por

$$f(x) = 5\left(e^{1-0,1x} + e^{0,1x-1}\right) \quad x \in [0,30]$$

Admita que $f(x)$ é a distância ao solo, em metros, do ponto do fio situado x metros à direita do primeiro poste.

Determine a diferença de altura dos dois postes. Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às décimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.



Exame – 1998, Prova modelo (cód. 135)

113. A atividade R, de qualquer substância radioativa, é dada, numa certa unidade de medida, pela expressão

$$R(t) = A \times e^{-Bt} \ ,$$

em que A e B são constantes reais positivas e t é o tempo, em horas, com $t \geq 0$.

113.1. Mostre que o tempo necessário para que a atividade R passe do seu valor inicial para metade é $\dfrac{\ln 2}{B}$

113.2. Sabendo que o valor inicial da atividade de uma certa substância radioativa é 28 unidades e que $R(1) = 26$, determine os valores de A e de B para essa substância.

Exame – 1997, 2ª fase (cód. 135)