

MATEMÁTICA A - 12º Ano

Funções - Funções trigonométricas

Propostas de resolução

Exercícios de exames e testes intermédios

1. Para mostrar que a função h é contínua em $x = 0$, temos que verificar que $h(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$:

- $h(0) = \frac{e^0}{0+1} = \frac{1}{1} = 1$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x}{x+1} \right) = \frac{e^0}{0+1} = \frac{1}{1} = 1$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}(x^2)} \right) = \frac{\text{sen}^2(0)}{\text{sen}(0^2)} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}(x^2)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\text{sen } x \times \text{sen } x}{\text{sen}(x^2)} \times \frac{x^2}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\text{sen } x}{x} \times \frac{\text{sen } x}{x} \times \frac{x^2}{\text{sen}(x^2)} \right) = \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\text{sen } x}{x} \right)}_{\text{Lim. Notável}} \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\text{sen } x}{x} \right)}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^2}{\text{sen}(x^2)} \right) = 1 \times 1 \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^2}{\text{sen}(x^2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^2}{\text{sen}(x^2)} \right) = \end{aligned}$$

(fazendo $y = x^2$, temos que se $x \rightarrow 0^-$, então $y \rightarrow 0^+$)

$$= \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{y}{\text{sen } y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{\frac{\text{sen } y}{y}} \right) = \frac{\lim_{y \rightarrow 0^-} 1}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{\text{sen } y}{y} \right)}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{1}{1} = 1$$

Assim, temos que, como $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0)$, a função h é contínua em $x = 0$

Exame – 2018, Ép. especial



2. Como o declive da reta tangente ao gráfico de g em cada ponto é dado pela função derivada, começamos por determinar a expressão de g' :

$$\begin{aligned} g'(x) &= (2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x)' = (2 \operatorname{sen} x)' + (\operatorname{sen}^2 x)' = 2 \cos x + (\operatorname{sen} x \times \operatorname{sen} x)' = \\ &= 2 \cos x + (\operatorname{sen} x)' \times \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \times (\operatorname{sen} x)' = 2 \cos x + \cos x \times \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \times \cos x = \\ &= 2 \cos x + 2 \times \operatorname{sen} x \times \cos x = 2 \cos x + \operatorname{sen}(2x) \end{aligned}$$

Como o máximo de uma função corresponde a um zero da função derivada, vamos determinar a expressão da função derivada da função g' , ou seja g'' , para determinar o declive máximo:

$$\begin{aligned} g''(x) &= (g'(x))' = (2 \cos x + \operatorname{sen}(2x))' = (2 \cos x)' + (\operatorname{sen}(2x))' = 2 \times (-\operatorname{sen} x) + (2x)' \times \cos(2x) = \\ &= -2 \operatorname{sen} x + 2x \cos(2x) \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função $([0, \pi])$, vem:

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{sen} x + 2 \cos(2x) = 0 &\Leftrightarrow 2 \cos(2x) = 2 \operatorname{sen} x \Leftrightarrow \cos(2x) = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ \operatorname{sen} x = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \end{matrix} \\ \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee 2x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x + x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 2x - x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como se pretende identificar os valores de $x \in [0, \pi]$, atribuindo valores inteiros a k para identificar as soluções no intervalo definido, temos:

- $k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{2}$ ($-\frac{\pi}{2} \notin [0, \pi]$)
- $k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = -\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ ($\frac{3\pi}{2} \notin [0, \pi]$)
- $k = 2 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{8\pi}{6} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 4\pi$ ($\frac{3\pi}{2} \notin [0, \pi]$ e $4\pi - \frac{\pi}{2} \notin [0, \pi]$)

Assim, as soluções da equação $g''(x) = 0$, que pertencem ao domínio da função, são $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$, pelo que Estudando a variação do sinal da derivada de g' , e relacionando com a monotonia do declive, vem:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$g''(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$g'(x)$	min	\nearrow	Máx	\searrow	min	\nearrow	Máx

Assim temos que os valores máximos do declive são:

- $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
- $g'(\pi) = 2 \cos \pi + \operatorname{sen}(2\pi) = 2 \times (-1) + 0 = -2$

Como $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) > g'(\pi)$ então $g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ é o máximo absoluto e o valor máximo do declive das retas tangentes ao gráfico de g , ou seja, o declive da reta r é:

$$m_r = g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$



3.

3.1. Resolvendo a equação $g(x) = 0$ vem:

- considerando $x < 0$

$$\begin{aligned}g(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 1}{4x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 0 \wedge 4x \neq 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 2x = \ln 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \underbrace{x = 0 \wedge x \neq 0}_{\text{Cond. Imp.}}\end{aligned}$$

Ou seja, se $x < 0$ então $g(x) = 0$ é uma equação impossível (não tem soluções).

- considerando $0 \leq x \leq \pi$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2 - \sin(2x)} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{1 = 0}_{\text{Cond. Imp.}} \wedge 2 - \sin(2x) \neq 0$$

Logo, se $0 \leq x \leq \pi$ então $g(x) = 0$ também é uma equação impossível (não tem soluções).

Assim podemos concluir que a função g não tem zeros.

Resposta: **Opção A**

3.2. Para averiguar se a função g é contínua em $x = 0$, temos que verificar se $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

- $g(0) = \frac{1}{2 - \sin(2 \times 0)} = \frac{1}{2 - \sin 0} = \frac{1}{2 - 0} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2 - \sin(2x)} \right) = \frac{1}{2 - \sin(2 \times 0)} = \frac{1}{2 - \sin 0} = \frac{1}{2 - 0} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^{2x} - 1}{4x} \right) = \frac{e^{2 \times 0} - 1}{4 \times 0} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

(fazendo $y = 2x$, temos que $4x = 2y$ e se $x \rightarrow 0^-$, então $y \rightarrow 0^-$)

$$\begin{aligned}&= \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^y - 1}{2y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{2} \times \frac{e^y - 1}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{2} \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Como $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$, então a função g é contínua em $x = 0$



3.3. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g , no intervalo $]0, \pi[$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{1}{2 - \operatorname{sen}(2x)} \right)' = \frac{(1)' \times (2 - \operatorname{sen}(2x)) - 1 \times (2 - \operatorname{sen}(2x))'}{(2 - \operatorname{sen}(2x))^2} = \\ &= \frac{0 \times (2 - \operatorname{sen}(2x)) - ((2)' - (\operatorname{sen}(2x))')}{(2 - \operatorname{sen}(2x))^2} = \frac{0 - (0 - (2x)' \cos(2x))}{(2 - \operatorname{sen}(2x))^2} = \\ &= \frac{-(-2 \cos(2x))}{(2 - \operatorname{sen}(2x))^2} = \frac{2 \cos(2x)}{(2 - \operatorname{sen}(2x))^2} \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, para $x \in]0, \pi[$, vem:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cos(2x)}{(2 - \operatorname{sen}(2x))^2} = 0 &\Leftrightarrow 2 \cos(2x) = 0 \wedge \underbrace{(2 - \operatorname{sen}(2x))^2 \neq 0}_{\text{Condição universal}} \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Assim, temos que:

- para $k = -1$, $x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$ ($-\frac{\pi}{4} \notin]0, \pi[$)
- para $k = 0$, $x = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$ ($\frac{\pi}{4} \in]0, \pi[$)
- para $k = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ ($\frac{3\pi}{4} \in]0, \pi[$)
- para $k = 2$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ ($\frac{5\pi}{4} \notin]0, \pi[$)

Assim, temos que $g'(x)$ tem dois zero em $]0, \pi[$ e estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$2 \cos(2x)$	n.d.	+	0	-	0	+	+
$2 - \operatorname{sen}(2x)$	n.d.	+	+	+	+	+	+
$g'(x)$	n.d.	+	0	-	0	+	+
$g(x)$	n.d.	\longrightarrow	Máx	\longrightarrow	min	\longrightarrow	Máx

Assim, podemos concluir que a função g , no intervalo $]0, \pi[$:

- é crescente no intervalo $]0, \frac{\pi}{4}[$ e no intervalo $[\frac{3\pi}{4}, \pi[$;
- é decrescente no intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$;
- tem um mínimo relativo para $x = \frac{3\pi}{4}$, cujo valor é:

$$g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2 - \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2 - \operatorname{sen}\frac{6\pi}{4}} = \frac{1}{2 - \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{2 - (-1)} = \frac{1}{3}$$

- tem dois máximos relativos, para $x = \frac{\pi}{4}$ e para $x = \pi$, cujos valores são respetivamente:

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2 - \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2 - \operatorname{sen}\frac{2\pi}{4}} = \frac{1}{2 - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2 - 1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$g(\pi) = \frac{1}{2 - \operatorname{sen}(2 \times \pi)} = \frac{1}{2 - \operatorname{sen}(2\pi)} = \frac{1}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$



4. Sendo $D_f =]0, \pi[$, e a função f é contínua (porque é o quociente de funções contínuas), então como $1 \in D_f$ e $\frac{\pi}{2} \in D_f$, logo $x = 1$ e $x = \frac{\pi}{2}$ não são assíntotas verticais do gráfico de f

Averiguando se $x = 0$ e $x = \pi$ são assíntotas verticais do gráfico de f , temos:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} 1}{\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{1}{1} = 1$$

Logo, a reta definida pela equação $x = 0$ não é uma assíntota vertical do gráfico de f

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x} \right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi^-} = \frac{\pi}{0^+} = +\infty$$

Logo, a reta definida pela equação $x = \pi$ é uma assíntota vertical do gráfico de f

Resposta: **Opção B**

Exame – 2018, 1ª Fase

5.

- 5.1. Para averiguar se a função f é contínua à esquerda no ponto de abscissa 1, temos que verificar se $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ e para averiguar se a função é contínua à direita no mesmo ponto, temos que verificar se $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

$$\bullet f(1) = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 2}{\operatorname{sen}(x - 1)} = \frac{2(1^-) - 2}{\operatorname{sen}(1^- - 1)} = \frac{2 - 2}{\operatorname{sen} 0} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 2}{\operatorname{sen}(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x - 1)}{\operatorname{sen}(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{\frac{\operatorname{sen}(x - 1)}{x - 1}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} 2}{\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\operatorname{sen}(x - 1)}{x - 1}} =$$

(fazendo $y = x - 1$, se $x \rightarrow 1^-$, então $y \rightarrow 0^-$)

$$= \frac{2}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 1^+ \\ -\infty}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (e^{-2x+4} + \ln(x - 1)) = e^{-2(1^+)+4} + \ln((1^+) - 1) = e^2 + \ln(0^+) = e^2 + (-\infty) = -\infty$$

A afirmação é verdadeira porque como $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$, a função é contínua à esquerda do ponto de abscissa 1, e como $f(1) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ a função não é contínua à direita do mesmo ponto.



5.2. Para calcular o declive da reta tangente, começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x < 1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x-2}{\operatorname{sen}(x-1)} \right)' = \frac{(2x-2)' \operatorname{sen}(x-1) - (2x-2)(\operatorname{sen}(x-1))'}{(\operatorname{sen}(x-1))^2} = \\ &= \frac{2 \operatorname{sen}(x-1) - (2x-2)(x-1)' \cos(x-1)}{\operatorname{sen}^2(x-1)} = \frac{2 \operatorname{sen}(x-1) - (2x-2) \cos(x-1)}{\operatorname{sen}^2(x-1)} \end{aligned}$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa $1 - \frac{\pi}{2}$ é:

$$\begin{aligned} m &= f' \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2 \operatorname{sen} \left(1 - \frac{\pi}{2} - 1 \right) - (2 \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) - 2) \cos \left(1 - \frac{\pi}{2} - 1 \right)}{\operatorname{sen}^2 \left(1 - \frac{\pi}{2} - 1 \right)} = \\ &= \frac{2 \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{2} \right) - (2 - \frac{2\pi}{2} - 2) \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{sen}^2 \left(-\frac{\pi}{2} \right)} = \frac{2(-1) - (-2) \times 0}{(-1)^2} = \frac{-2 - 0}{1} = -2 \end{aligned}$$

Logo a equação da reta tangente é da forma $y = -2x + b$

Como $f \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2 \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) - 2}{\operatorname{sen} \left(1 - \frac{\pi}{2} - 1 \right)} = \frac{2 - \pi - 2}{\operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{2} \right)} = \frac{-\pi}{-1} = \pi$, sabemos que o ponto $P \left(1 - \frac{\pi}{2}, \pi \right)$ pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.

Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de b :

$$\pi = -2 \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) + b \Leftrightarrow \pi = -2 + \pi + b \Leftrightarrow \pi - \pi + 2 = b \Leftrightarrow 2 = b$$

Assim, a equação da reta tangente é:

$$y = -2x + 2$$

Exame – 2017, Ép. especial



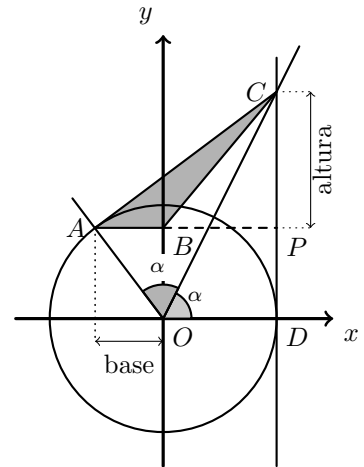
6. Como se trata de um círculo trigonométrico, o ponto A tem coordenadas $(\cos(2\alpha), \sin(2\alpha))$, porque o segmento $[OA]$, define com o semieixo positivo Ox um ângulo de $\alpha + \alpha = 2\alpha$

Considerando o ponto P como o ponto da reta CD com ordenada igual à do ponto A , temos que:

- a base do triângulo é: $\overline{AB} = -\cos(2\alpha)$
- a altura do triângulo é: $\overline{PC} = \overline{CD} - \overline{PD} = \operatorname{tg} \alpha - \sin(2\alpha)$

Assim, calculando a área do triângulo vem:

$$\begin{aligned}
 A_{[ABC]} &= \frac{\overline{AB} \times \overline{PC}}{2} = \frac{-\cos(2\alpha) \times (\operatorname{tg} \alpha - \sin(2\alpha))}{2} = \\
 &= \frac{-\cos(2\alpha) \times \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \right)}{2} = \\
 &= \frac{-\cos(2\alpha) \times \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} - \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} \right)}{2} = \\
 &= \frac{-\cos(2\alpha) \times \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha (1 - 2 \cos^2 \alpha)}{\cos \alpha} \right)}{2} = \frac{-\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg} \alpha (1 - 2 \cos^2 \alpha)}{2} = \\
 &= \frac{\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg} \alpha (- (1 - 2 \cos^2 \alpha))}{2} = \frac{\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg} \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1)}{2} = \\
 &= \frac{\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg} \alpha (2 \cos^2 \alpha - (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha))}{2} = \frac{\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg} \alpha (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha)}{2} = \\
 &= \frac{\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg} \alpha (\cos(2\alpha))}{2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cos^2(2\alpha)}{2}
 \end{aligned}$$



Exame – 2017, Ép. especial

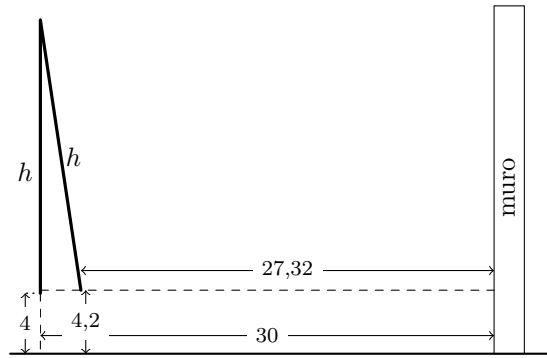


7. No instante inicial as hastes estão na vertical e a distância ao chão é de 4 dm, e, no mesmo instante a distância ao muro é dada por:

$$d(0) = 30 + 0 \times \sin \pi \times 0 = 30 + 0 = 30 \text{ dm}$$

Passados treze segundos e meio a distância ao chão é de 4,2 dm e a distância ao muro é dada por:

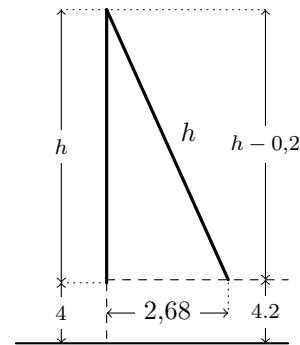
$$\begin{aligned} d(13,5) &= 30 + 12e^{12-13,5} \sin(\pi \times 13,5) = \\ &= 30 + 12e^{-1,5} \sin(\pi \times 13,5) \approx 27,32 \text{ dm} \end{aligned}$$



Assim, podemos considerar um triângulo retângulo, cuja hipotenusa tem o comprimento da haste (h), o cateto maior mede $h + 4 - 4,2 = h - 0,2$ e o cateto menor mede $d(0) - d(13,5) \approx 30 - 27,32 \approx 2,68$

E assim, recorrendo ao teorema de Pitágoras, um valor aproximado do comprimento da haste é dado por:

$$\begin{aligned} h^2 &= (h - 0,2)^2 + 2,68^2 \Leftrightarrow h^2 = h^2 - 0,4h + 0,2^2 + 2,68^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0,4h = 0,2^2 + 2,68^2 \Leftrightarrow h = \frac{0,2^2 + 2,68^2}{0,4} \end{aligned}$$



Como $\frac{0,2^2 + 2,68^2}{0,4} \approx 18$, o valor do comprimento da haste, arredondado às unidades, é 18 dm

Exame – 2017, 2ª Fase

8. Calculando o desenvolvimento do quadrado da soma, temos:

$$\begin{aligned} \left(2x \sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{x}\right)^2 &= (2x \sin \alpha)^2 + 2(2x \sin \alpha) \left(\frac{\cos \alpha}{x}\right) + \left(\frac{\cos \alpha}{x}\right)^2 = \\ &= 4x^2 \sin^2 \alpha + \frac{4x \sin \alpha \cos \alpha}{x} + \frac{\cos^2 \alpha}{x^2} = 4x^2 \sin^2 \alpha + 4 \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{x^2} \end{aligned}$$

Assim, nos três termos do desenvolvimento o termo independente é $4 \sin \alpha \cos \alpha$, pelo que, como sabemos que o termo independente é igual a 1, calculando os valores de α pertencentes ao intervalo $] \pi, 2\pi[$, vem:

$$\begin{aligned} 4 \sin \alpha \cos \alpha = 1 &\Leftrightarrow 2 \times 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 \Leftrightarrow 2 \times \sin(2\alpha) = 1 \Leftrightarrow \sin(2\alpha) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(2\alpha) = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como se pretende identificar os valores de $\alpha \in] \pi, 2\pi[$, atribuindo valores inteiros a k para identificar as soluções no intervalo definido, temos:

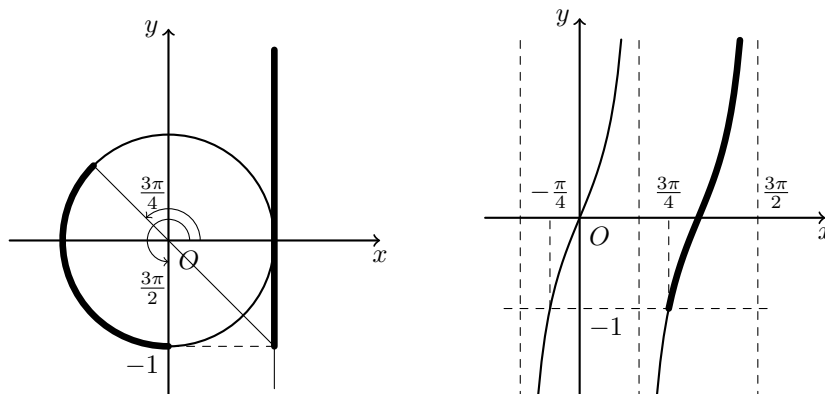
- $k = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} \vee \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} \left(\frac{\pi}{12} \notin] \pi, 2\pi[\text{ e } \frac{5\pi}{12} \notin] \pi, 2\pi[\right)$
- $k = 1 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12} \vee \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{17\pi}{12}$
- $k = 2 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} + 2\pi = \frac{25\pi}{12} \vee \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} + 2\pi = \frac{29\pi}{12} \left(\frac{25\pi}{12} \notin] \pi, 2\pi[\text{ e } \frac{29\pi}{12} \notin] \pi, 2\pi[\right)$

Assim, os valores de α nas condições do enunciado são $\frac{13\pi}{12}$ e $\frac{17\pi}{12}$

Exame – 2017, 2ª Fase



9. Identificando no círculo trigonométrico os valores da tangente do intervalo $[-1, +\infty[$, e as amplitudes dos arcos correspondentes, (como na figura seguinte, à esquerda) temos, de entre os conjuntos apresentados, o único conjunto de valores cuja tangente pertence ao intervalo $\left] \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[$



Na figura anterior, à direita podemos ver uma representação gráfica da função $\text{tg}(x)$ com a restrição ao domínio $\left] \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[$ assinalada, para verificar que o respetivo contradomínio é $[-1, +\infty[$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2017, 1ª Fase



10.

10.1. Para averiguar se a função g é contínua em $x = 1$, temos que verificar se $g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$

- $g(1) = 2$

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x^2}{1 - e^{x-1}} = \frac{1 - (1^-)^2}{1 - e^{1-1^-}} = \frac{1 - 1}{1 - e^0} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x^2}{1 - e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{-(e^{x-1} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{e^{x-1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x-1}{e^{x-1} - 1} \times (x+1) \right) =$$

(fazendo $y = x - 1$ temos que se $x \rightarrow 1^-$, então $y \rightarrow 0^-$)

$$= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{e^y - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{e^y - 1}{y}} \times (1^- + 1) = \frac{1}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^y - 1}{y} \right)}_{\text{Lim. Notável}}} \times 2 = \frac{1}{1} \times 2 = 2$$

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(3 + \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} \right) = 3 + \frac{\text{sen}(1-1)}{1-1} = 3 - \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(3 + \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3 + \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\text{sen}(x-1)}{-(x-1)} = 3 - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\text{sen}(x-1)}{x-1} =$$

(fazendo $y = x - 1$, temos que se $x \rightarrow 1^+$, então $y \rightarrow 0^+$)

$$= 3 - \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 3 - 1 = 2$$

Como $g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$, então a função g é contínua em $x = 1$

10.2. Resolvendo a equação $g(x) = 3$, no intervalo $[4,5]$, ou seja, para $x > 1$, vem:

$$3 + \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} = 3 \Leftrightarrow \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} = 3 - 3 \Leftrightarrow \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} = 0 \times \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow \text{sen}(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}(x-1) = \text{sen } 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, como $\pi \notin [4,5]$; $1 + \pi \in [4,5]$ e $1 + 2\pi \notin [4,5]$ a única solução da equação $g(x) = 3$, no intervalo $[4,5]$ é $1 + \pi$

Exame – 2017, 1ª Fase



11. Como a função f é contínua em \mathbb{R} , em particular é contínua em $x = -1$, pelo que:

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

Assim, temos que:

- $f(-1) = k + 2$
- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\text{sen}(3x + 3)}{4x + 4} = \frac{\text{sen}(3(-1) + 3)}{4(-1) + 4} = \frac{\text{sen}(0)}{0} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)
(fazendo $y = x + 1$, se $x \rightarrow -1$, então $y \rightarrow 0$, e $3y \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\text{sen}(3(x + 1))}{4(x + 1)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3y)}{4y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4} \times \frac{\text{sen}(3y)}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{3}{4} \times \frac{\text{sen}(3y)}{3y} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3}{4} \times \underbrace{\lim_{3y \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3y)}{3y}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Como a função é contínua em $x = -1$, podemos determinar o valor de k :

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \Leftrightarrow k + 2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow k = \frac{3}{4} - 2 \Leftrightarrow k = \frac{3}{4} - \frac{8}{4} \Leftrightarrow k = -\frac{5}{4}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2016, Ép. especial



12. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico e a existência de pontos de inflexão no intervalo $\left] -\frac{3\pi}{2}, 0 \right[$, vamos determinar a expressão da segunda derivada, pelo que começamos por determinar f' em $\left] -\frac{3\pi}{2}, 0 \right[$:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + \cos x \right)' = \left(\frac{1}{4}x^2 \right)' + (\cos x)' = \frac{1}{4}(x^2)' + (-\operatorname{sen} x) = \frac{1}{4} \times 2x - \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x$$

Assim, determinando f'' em $\left] -\frac{3\pi}{2}, 0 \right[$, temos que:



$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x \right)' = \left(\frac{1}{2}x \right)' - (\operatorname{sen} x)' = \frac{1}{2} - \cos x$$

Como os pontos de inflexão são zeros da segunda derivada, vamos determiná-los:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0$, vem $x = \frac{\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{3}$, e como $x \in \left] -\frac{3\pi}{2}, 0 \right[$, podemos verificar que a única solução da equação é $x = -\frac{\pi}{3}$

Assim, estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:

x	$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		0
$f''(x)$	n.d.	+	0	-	n.d.
$f(x)$	n.d.		Pt. I.		n.d.

Logo, podemos concluir que o gráfico de f :

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left] -\frac{\pi}{3}, 0 \right[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left] -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{3} \right[$
- tem um ponto de inflexão cuja abcissa é $-\frac{\pi}{3}$

Exame – 2016, Ép. especial

13. Observando que os ângulos AOP e RQO têm a mesma amplitude (porque são ângulos de lados paralelos), relativamente ao triângulo $[PQR]$, vem que:

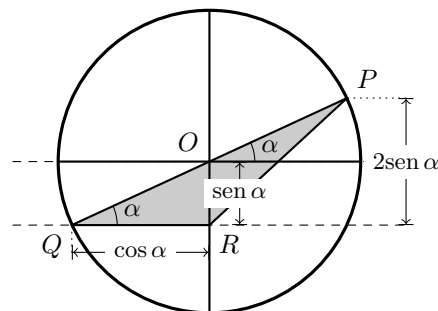
- $\overline{QR} = \cos \alpha$
- $\overline{OR} = \operatorname{sen} \alpha$
- a altura do triângulo, relativa ao lado $[QR]$ é

$$h = 2 \times \overline{OR} = 2 \operatorname{sen} \alpha$$

Desta forma, a área do triângulo é:

$$A_{[PQR]} = \frac{\overline{QR} \times h}{2} = \frac{\cos \alpha \times 2 \operatorname{sen} \alpha}{2} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$$

Resposta: **Opção D**



Exame – 2016, 2ª Fase



14. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f , para $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2 + \operatorname{sen} x}{\cos x} \right)' = \frac{(2 + \operatorname{sen} x)' \cos x - (2 + \operatorname{sen} x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \\ &= \frac{(0 + \cos x) \cos x - (2 + \operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1 + 2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, para $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, vem:

$$\frac{1 + 2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow 1 + 2 \operatorname{sen} x = 0 \wedge \underbrace{\cos^2 x \neq 0}_{(1)} \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} x = -1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6} \right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0$, vem $x = -\frac{\pi}{6} \vee x = \pi + \frac{\pi}{6}$, e como $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ podemos verificar que a única solução da equação é $x = -\frac{\pi}{6}$

(1) Como $\cos x > 0, \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, então $\cos^2 x \neq 0, \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		0
$1 + 2 \operatorname{sen} x$		-	0	+	
$\cos^2 x$		+	+	+	
$f'(x)$	n.d.	-	0	+	n.d.
$f(x)$	n.d.	\searrow	min	\nearrow	n.d.

Assim, podemos concluir que a função f :

- é decrescente no intervalo $]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}[$;
- é crescente no intervalo $]-\frac{\pi}{6}, 0[$;
- tem um mínimo relativo para $x = -\frac{\pi}{6}$

Exame – 2016, 2ª Fase

15. Identificando as medidas relevantes para o cálculo da área do trapézio, temos que:

- a base menor é a ordenada o ponto P , ou seja, $\overline{OP} = 1$
- como R é um ponto do quarto quadrante, então temos que $\cos \alpha > 0$, pelo que a altura do trapézio $[OPQR]$ é: $\overline{PQ} = \cos \alpha$
- como R é um ponto do quarto quadrante, então temos que $\operatorname{sen} \alpha < 0$, pelo que a base maior do trapézio $[OPQR]$ é: $\overline{QR} = 1 + (-\operatorname{sen} \alpha) = 1 - \operatorname{sen} \alpha$

Desta forma, a área do trapézio é:

$$\begin{aligned} A_{[OPQR]} &= \frac{\overline{OP} + \overline{QR}}{2} \times \overline{PQ} = \frac{1 + 1 - \operatorname{sen} \alpha}{2} \times \cos \alpha = \frac{2 - \operatorname{sen} \alpha}{2} \times \cos \alpha = \\ &= \frac{2 \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2} = \cos \alpha - \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2} \end{aligned}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2016, 1ª Fase



16. Começamos por determinar a expressão da derivada da função h , para calcular os extremos da função:

$$\begin{aligned} h'(t) &= \left(20 + \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t) + t \operatorname{sen}(2\pi t) \right)' = (20)' + \left(\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t) \right)' + (t \operatorname{sen}(2\pi t))' = \\ &= 0 + \frac{1}{2\pi} (\cos(2\pi t))' + (t)' \operatorname{sen}(2\pi t) + t (\operatorname{sen}(2\pi t))' = \\ &= \frac{1}{2\pi} (-2\pi t)' \operatorname{sen}(2\pi t) + 1 \times \operatorname{sen}(2\pi t) + t(2\pi t)' \cos(2\pi t) = \\ &= \frac{1}{2\pi} (-2\pi) \operatorname{sen}(2\pi t) + \operatorname{sen}(2\pi t) + t(2\pi) \cos(2\pi t) = \\ &= -\operatorname{sen}(2\pi t) + \operatorname{sen}(2\pi t) + t(2\pi) \cos(2\pi t) = \\ &= 2\pi t \cos(2\pi t) \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função $([0,1])$, vem:

$$\begin{aligned} 2\pi t \cos(2\pi t) = 0 &\Leftrightarrow 2\pi t = 0 \vee \cos(2\pi t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee \cos(2\pi t) = \cos \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee 2\pi t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{\pi}{2 \times 2\pi} + \frac{k\pi}{2\pi}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Atribuindo valores a k , calculamos os valores de t compatíveis com o domínio da função:

- Se $k = 0$, então $t = \frac{1}{4}$
- Se $k = 1$, então $t = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$

Pelo que o conjunto dos zeros da função é $\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$, e assim estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		1
$h'(t)$	0	+	0	-	0	+	+
$h(t)$	min	\longrightarrow	Máx	\longleftarrow	min	\longrightarrow	Máx

Assim, calculando o valor dos mínimos relativos e máximos relativos, temos que:

- $h(0) = 20 + \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi \times 0) + 0 \times \operatorname{sen}(2\pi \times 0) = 20 + \frac{1}{2\pi} \cos(0) + 0 = 20 + \frac{1}{2\pi}$
- $h\left(\frac{1}{4}\right) = 20 + \frac{1}{2\pi} \cos\left(2\pi \times \left(\frac{1}{4}\right)\right) + \frac{1}{4} \times \operatorname{sen}\left(2\pi \times \left(\frac{1}{4}\right)\right) =$
 $= 20 + \frac{1}{2\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 20 + \frac{1}{2\pi} \times 0 + \frac{1}{4} \times 1 = 20 + \frac{1}{4}$
- $h\left(\frac{3}{4}\right) = 20 + \frac{1}{2\pi} \cos\left(2\pi \times \left(\frac{3}{4}\right)\right) + \frac{3}{4} \times \operatorname{sen}\left(2\pi \times \left(\frac{3}{4}\right)\right) =$
 $= 20 + \frac{1}{2\pi} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{3}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 20 + \frac{1}{2\pi} \times 0 + \frac{3}{4} \times (-1) = 20 - \frac{3}{4}$
- $h(1) = 20 + \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi \times 1) + 1 \times \operatorname{sen}(2\pi \times 1) = 20 + \frac{1}{2\pi} \times 1 + 0 = 20 + \frac{1}{2\pi}$

Como $h\left(\frac{3}{4}\right) < h(0)$, temos que o mínimo absoluto é $m = h\left(\frac{3}{4}\right) = 20 - \frac{3}{4} = \frac{77}{4}$

Como $h\left(\frac{1}{4}\right) > h(1)$, temos que o máximo absoluto é $M = h\left(\frac{1}{4}\right) = 20 + \frac{1}{4} = \frac{81}{4}$

E assim, o valor da amplitude de oscilação é:

$$A = M - m = \frac{81}{4} - \frac{77}{4} = \frac{4}{4} = 1$$



17. como a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa $\frac{2\pi}{3}$, o declive da reta r é o valor da função derivada no ponto de abscissa $\frac{2\pi}{3}$ $\left(m_r = f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

Assim, temos

$$f'(x) = (a \operatorname{sen} x)' = (a)'(\operatorname{sen} x) + a(\operatorname{sen} x)' = 0 + a \cos x = a \cos x$$

pelo que

$$m_r = f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = a \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = a\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = a\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a}{2}$$

Como o declive de uma reta é a tangente da inclinação, temos também que

$$m_r = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

E assim, igualando as duas expressões para o declive da reta r , podemos calcular o valor de a :

$$-\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow a = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Exame – 2015, Ép. especial

18. Determinando a expressão da primeira derivada, f' , vem:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (f(x))' = (3 \operatorname{sen}^2(x))' = (3 \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(x))' = 3(\operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(x))' = \\ &= 3\left((\operatorname{sen}(x))' \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(x)(\operatorname{sen}(x))'\right) = 3 \times 2(\operatorname{sen}(x))' \operatorname{sen}(x) = 3 \times 2(\cos(x) \operatorname{sen}(x)) = \\ &= 3 \times 2 \underbrace{\operatorname{sen}(x) \cos(x)}_{\operatorname{sen}(2x)} = 3 \operatorname{sen}(2x) \end{aligned}$$

Determinando a expressão da segunda derivada, f'' , temos que:

$$f''(x) = (f'(x))' = (3 \operatorname{sen}(2x))' = 3((2x)' \cos(2x)) = 3(2 \cos(2x)) = 6 \cos(2x)$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2015, 2ª Fase



19.

19.1. Como no instante em que se iniciou a contagem do tempo, o ponto P coincidia com o ponto A , a distância inicial ($t = 0$), em metros, do ponto A ao ponto O é dada por $d(0)$

Assim, os instantes em que o ponto P passou pelo ponto A , nos primeiros três segundos do movimento, são as soluções da equação $d(t) = d(0)$, com $t \in]0,3[$

$$\begin{aligned} d(t) = d(0) &\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\pi t + \frac{\pi}{6} \right) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\pi \times 0 + \frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\pi t + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen} \left(\pi t + \frac{\pi}{6} \right) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow \pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \pi t + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \pi t = 2k\pi \vee \pi t = \pi - 2 \times \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 2k \vee \pi t = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = 2k \vee \pi t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 2k \vee t = \frac{2}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como $t \in]0,3[$, atribuindo valores inteiros a k para identificar as soluções no intervalo definido, temos

- $k = 0 \rightarrow t = 0 \vee t = \frac{2}{3}$ ($0 \notin]0,3[$)
- $k = 1 \rightarrow t = 2 \vee t = \frac{2}{3} + 2 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = \frac{8}{3}$
- $k = 2 \rightarrow t = 4 \vee t = \frac{2}{3} + 4 \Leftrightarrow t = 4 \vee t = \frac{14}{3}$ ($4 \notin]0,3[\wedge \frac{14}{3} \notin]0,3[$)

Assim temos, durante os primeiros três segundos do movimento, o ponto P passou pelo ponto A por três vezes, nos instantes $t_1 = \frac{2}{3}$ s, $t_2 = 2$ s e $t_3 = \frac{8}{3}$ s.

19.2.

Como a função d resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $[0, +\infty[$, é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $]3,4[$.

Como $0,75 < 1,1 < 1,25$, ou seja, $d(3) < 1,1 < d(4)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $t_0 \in]3,4[$ tal que $d(t_0) = 1,1$, ou seja, que houve, pelo menos, um instante, entre os três segundos e os quatro segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância do ponto P ao ponto O foi igual a 1,1 metros.

C.A.

$$\begin{aligned} d(3) &= 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(3\pi + \frac{\pi}{6} \right) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \times \left(-\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right) \right) = 1 + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2} \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(4) &= 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(4\pi + \frac{\pi}{6} \right) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1,25 \end{aligned}$$

Exame – 2015, 2ª Fase

20. Como na figura está representado o círculo trigonométrico, temos que:

$$\overline{OC} = 1 \alpha, \overline{AB} = \operatorname{sen} \alpha, \overline{OB} = \cos \alpha \text{ e } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{OB}}$$

Temos que a área do quadrilátero $[ABCD]$ pode ser obtida pela diferença das áreas dos triângulos $[OCD]$ e $[OAB]$,

$$A_{[ABCD]} = A_{[OAB]} - A_{[OCD]} = \frac{\overline{OC} \times \overline{CD}}{2} - \frac{\overline{OB} \times \overline{AB}}{2}$$

Assim, vem que:

$$A_{[ABCD]} = \frac{1 \times \operatorname{tg} \alpha}{2} - \frac{\cos \alpha \times \operatorname{sen} \alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} - \frac{\overbrace{2 \times \operatorname{sen} \alpha \times \cos \alpha}^{\operatorname{sen}(2\alpha)}}{2 \times 2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2015, 1ª Fase



21. Temos que:

- como a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa a , o declive da reta r é o valor da função derivada no ponto de abscissa a ($m_r = f'(a)$)

Assim, temos

$$f'(x) = (1 - \cos(3x))' = (1)' - (\cos(3x))' = 0 - (-(3x)'\sin(3x)) = 3 \sin(3x)$$

pelo que $m_r = f'(a) = 3 \sin(3a)$

- como a reta s é tangente ao gráfico da função g no ponto de abscissa $a + \frac{\pi}{6}$, o declive da reta s é o valor da função derivada no ponto de abscissa $a + \frac{\pi}{6}$ ($m_s = g'(a + \frac{\pi}{6})$) Assim, temos

$$g'(x) = (\sin(3x))' = ((3x)'\cos(3x)) = 3 \cos(3x)$$

pelo que

$$m_s = g'(a + \frac{\pi}{6}) = 3 \cos(3(a + \frac{\pi}{6})) = 3 \cos(3a + \frac{3\pi}{6}) = 3 \cos(3a + \frac{\pi}{2}) = \underbrace{-3 \sin(3a)}_{-\sin(3a)}$$

- como as retas r e s são perpendiculares, o declive de uma delas é o simétrico do inverso do declive da outra ($m_r = -\frac{1}{m_s}$)

$$m_r = -\frac{1}{m_s} \Leftrightarrow 3 \sin(3a) = -\frac{1}{-3 \sin(3a)} \Leftrightarrow -3 \sin(3a) \times 3 \sin(3a) = -1 \Leftrightarrow -9 \sin^2(3a) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 \sin^2(3a) = 1 \Leftrightarrow \sin^2(3a) = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \sin(3a) = \pm \sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \sin(3a) = \pm \frac{1}{3}$$

- como a é número real pertencente ao intervalo $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$, ou seja $\frac{\pi}{3} < a < \frac{\pi}{2}$ então

$$3 \times \frac{\pi}{3} < 3a < 3 \times \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi < 3a < \frac{3\pi}{2}$$

ou seja, $3a$ é a amplitude de um ângulo do 3º quadrante, pelo que $\sin(3a) < 0$, logo

$$\sin(3a) = -\frac{1}{3}, \text{ q.e.d.}$$

Exame – 2015, 1ª Fase



22. Para que a função seja contínua em $x = 2$, temos que garantir que $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Temos que

$$\begin{aligned}
 & \bullet f(2) = 2e^{2-2} = 2e^0 = 2 \times 1 = 2 \\
 & \bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (xe^{x-2}) = 2e^{2^- - 2} = 2e^{0^-} = 2 \times 1 = 2 \\
 & \bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{\text{sen}(2-x)}{x^2+x-6} + k \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{\text{sen}(2-x)}{x^2+x-6} \right) + \lim_{x \rightarrow 2^+} k = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{\text{sen}(2-x)}{x^2+x-6} \right) + \lim_{x \rightarrow 2^+} k = \\
 & = \frac{\text{sen}(2-2^-)}{(2^-)^2 + 2^- - 6} + k = \frac{0}{0} + k \text{ (indeterminação)} \quad \text{(fazendo } y = x - 2, \text{ temos } x = y + 2 \text{ e } -y = 2 - x; \\
 & \text{ e se } x \rightarrow 2^+, \text{ então } y \rightarrow 0^+) \\
 & = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{\text{sen}(-y)}{(y+2)^2 + y + 2 - 6} \right) + k = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{\text{sen}(-y)}{y^2 + 4y + 4 + y - 4} \right) + k = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{\text{sen}(-y)}{y^2 + 5y} \right) + k = \\
 & = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{-\text{sen } y}{y(y+5)} \right) + k = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{\text{sen } y}{y} \times \frac{-1}{y+5} \right) + k = \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-1}{y+5} + k = \\
 & = 1 \times \frac{-1}{0^+ + 5} + k = -\frac{1}{5} + k
 \end{aligned}$$

Como se pretende que a função seja contínua em $x = 2$, e verificámos que $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, podemos determinar o valor de k garantindo que $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Leftrightarrow 2 = -\frac{1}{5} + k \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{5} = k \Leftrightarrow \frac{10}{5} + \frac{1}{5} = k \Leftrightarrow \frac{11}{5} = k$$

Exame – 2014, Ép. especial

23. O triângulo $[OBC]$ é retângulo em B , $\overline{OB} = 1$, e $[BC]$ é o cateto oposto ao ângulo α , temos que:

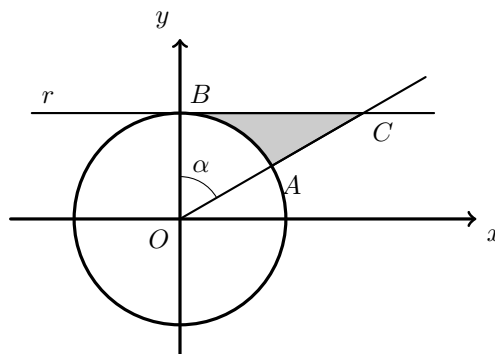
$$\text{tg } \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\overline{BC}}{1} \Leftrightarrow \text{tg } \alpha = \overline{BC}$$

Logo,

$$A_{[OBC]} = \frac{\overline{OB} \times \overline{BC}}{2} = \frac{1 \times \text{tg } \alpha}{2} = \frac{\text{tg } \alpha}{2}$$

A área do setor circular de centro O , raio 1 e amplitude α (delimitado pelo arco AB) é

$$A = \frac{\alpha \times 1^2}{2} = \frac{\alpha}{2}$$



Como a área da zona sombreada (A_S) pode ser calculada como a diferença entre as áreas do triângulo $[OBC]$ e o setor circular de centro O e delimitado pelo arco AB , temos que

$$A_S = A_{[OBC]} - A = \frac{\text{tg } \alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\text{tg } \alpha - \alpha}{2}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2014, Ép. especial



24. Como a função é contínua no intervalo fechado, temos que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)$

Temos que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k - 3$

E calculando $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)$, vem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \left(\begin{array}{l} \text{Se } y = x - \frac{\pi}{2}, \text{ então } x = y + \frac{\pi}{2} \\ x \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \Rightarrow y \rightarrow 0^- \end{array} \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{y} = \left(\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} y \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{-\operatorname{sen} y}{y} = - \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -1 \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$k - 3 = -1 \Leftrightarrow k = -1 + 3 \Leftrightarrow k = 2$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2014, 2ª Fase

25. Como o lado $[PR]$ do triângulo $[PQR]$ é um diâmetro da circunferência e o vértice Q pertence à mesma circunferência, podemos garantir que o triângulo $[PQR]$ é retângulo, sendo $[PR]$ a hipotenusa.

Como a circunferência tem raio 2, vem que $\overline{PR} = 2 \times 2 = 4$, e assim, recorrendo à definição de seno e cosseno temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{QR}}{4} \Leftrightarrow \overline{QR} = 4 \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{cos} \alpha &= \frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}} \Leftrightarrow \operatorname{cos} \alpha = \frac{\overline{PQ}}{4} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 4 \operatorname{cos} \alpha \end{aligned}$$

Como os lados $[QR]$ e $[PQ]$ são perpendiculares, temos que:

$$A_{[PQR]} = \frac{\overline{QR} \times \overline{PQ}}{2} = \frac{4 \operatorname{sen} \alpha \times 4 \operatorname{cos} \alpha}{2} = 8 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha$$

Como o triângulo $[PSR]$ é congruente com o triângulo $[PQR]$ (ambos têm 1 ângulo reto e dois lados iguais), vem que:

$$A(\alpha) = A_{[PQRS]} = A_{[PQR]} + A_{[PSR]} = 2 \times A_{[PQR]} = 2 \times 8 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha = 16 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha$$

Como $\operatorname{tg} \theta = 2\sqrt{2}$ e $\operatorname{tg}^2 \theta + 1 = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \theta}$, temos que:

$$\begin{aligned} (2\sqrt{2})^2 + 1 &= \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \theta} \Leftrightarrow 4 \times 2 + 1 = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \theta} \Leftrightarrow 9 = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \theta} \Leftrightarrow \operatorname{cos}^2 \theta = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{cos} \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \operatorname{cos} \theta = \pm \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ \operatorname{cos} \theta = \frac{1}{3} \end{array} \end{aligned}$$

E, pela fórmula fundamental da trigonometria, vem:

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \frac{1}{9} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \theta = \pm \sqrt{\frac{8}{9}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \theta = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ \operatorname{sen} \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{array}$$

Finalmente, recorrendo à fórmula de $A(\alpha)$, deduzida antes, temos que:

$$A(\theta) = 16 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{32\sqrt{2}}{9}$$

Exame – 2014, 2ª Fase



26. Como

- $\overline{BC} = \text{sen } \alpha$
- $\overline{OC} = \text{cos } \alpha$

Temos que $\overline{DC} = \overline{OD} - \overline{OC} = 3 - |\text{cos } \alpha|$

Como $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, logo $\text{cos } \alpha < 0$, pelo que $|\text{cos } \alpha| = -\text{cos } \alpha$

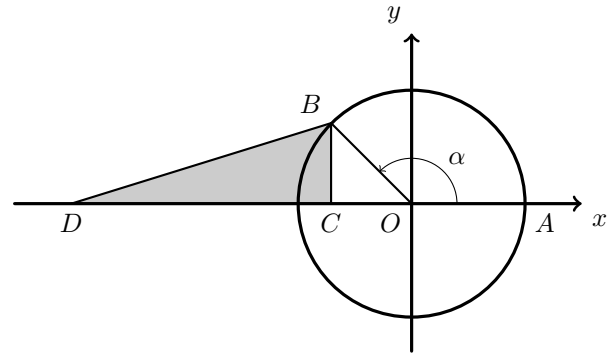
Assim, $\overline{DC} = 3 - |\text{cos } \alpha| = 3 - (-\text{cos } \alpha) = 3 + \text{cos } \alpha$

Desta forma, temos que:

$$A_{[BCD]} = \frac{\overline{DC} \times \overline{BC}}{2} = \frac{\text{sen } \alpha (3 + \text{cos } \alpha)}{2} = \frac{1}{2} (3 + \text{cos } \alpha) \text{sen } \alpha$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2014, 1ª Fase



27.

27.1. Como $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{sen}(\pi) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

temos que:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

27.2. Começando por determinar f'' temos:

$$f''(x) = (f'(x))' = (x - \text{sen}(2x))' = (x)' - (\text{sen}(2x))' = 1 - (2x)' \text{cos}(2x) = 1 - 2 \text{cos}(2x)$$

Para determinar o sentido das concavidades, vamos estudar o sinal de f'' :

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow 1 - 2 \text{cos}(2x) = 0 \Leftrightarrow 1 = 2 \text{cos}(2x) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \text{cos}(2x) \Leftrightarrow \text{cos}(2x) = \text{cos}\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Logo, as únicas soluções da equação $f''(x) = 0$ que pertencem ao intervalo $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \right[$, são $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = -\frac{\pi}{6}$ (obtidas com $k = 0$).

Assim, estudando a variação de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f , vem:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
$f''(x)$	n.d.	+	0	-	0	+	n.d.
$f(x)$	n.d.		Pt. I.		Pt. I.		n.d.

Logo, podemos concluir que o gráfico de f :

- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left] -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6} \right[$ e no intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right[$
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right]$
- tem dois pontos de inflexão de abscissas, cujas abscissas são $x = -\frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{\pi}{6}$

Exame – 2014, 1ª Fase



28. Como $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$, então $\cos(2a) = \cos(a + a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$

Assim, para cada valor de $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \cos^2\left(\frac{x}{12}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{12}\right) = \cos\left(2 \times \frac{x}{12}\right) = \cos\left(\frac{x}{6}\right)$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12º ano – 30.04.2014

29. Considerando β como o ângulo FSP e sendo M o ponto médio do lado $[SP]$, como o triângulo $[SMF]$ é retângulo, recorrendo à definição de seno e cosseno temos:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{\overline{FM}}{\overline{FS}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \beta = \frac{\overline{FM}}{4} \Leftrightarrow \overline{FM} = 4 \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos \beta = \frac{\overline{SM}}{\overline{FS}} \Leftrightarrow \cos \beta = \frac{\overline{SM}}{4} \Leftrightarrow \overline{SM} = 4 \cos \beta$$

Como M é o ponto médio de $[SP]$, temos que

$$\overline{SP} = 2 \times \overline{SM} = 2 \times 4 \cos \beta = 8 \cos \beta$$

Assim, a área do triângulo $[PSF]$ pode ser calculada como:

$$A_{[PSF]} = \frac{\overline{SP} \times \overline{FM}}{2} = \frac{8 \cos \beta \times 4 \operatorname{sen} \beta}{2} = \frac{32 \operatorname{sen} \beta \cos \beta}{2} = 16 \operatorname{sen} \beta \cos \beta = 8 \times 2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta = 8 \operatorname{sen} (2\beta)$$

(porque $\operatorname{sen} (a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$,
então $\operatorname{sen} (2a) = \operatorname{sen} (a + a) = 2 \operatorname{sen} a \cos a$)

Como o ângulo RSP é um ângulo reto, podemos relacionar o ângulo α com o ângulo β :

$$\frac{\pi}{2} + \beta + \alpha + \beta = 2\pi \Leftrightarrow 2\beta + \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\beta + \alpha = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 2\beta = \frac{3\pi}{2} - \alpha$$

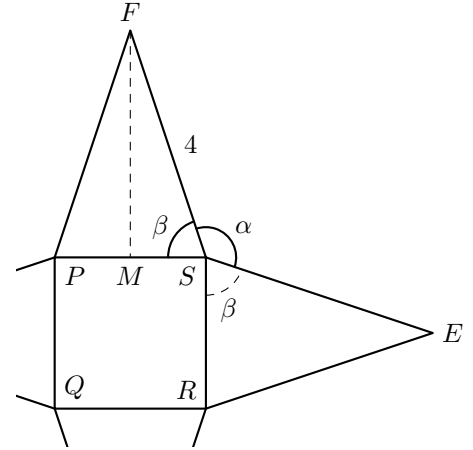
Logo a área do triângulo $[PSF]$ é

$$A_{[PSF]} = 8 \operatorname{sen} (2\beta) = 8 \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = 8 (-\cos \alpha) = -8 \cos \alpha$$

Assim, temos que a área lateral é:

$$A_L = 4 \times A_{[PSF]} = 4 \times (-8 \cos \alpha) = -32 \cos \alpha$$

Teste Intermédio 12º ano – 30.04.2014

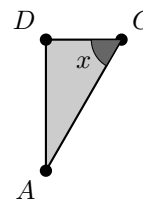


30.

30.1. Vamos considerar \overline{DA} a medida da altura do triângulo e \overline{EC} a medida da base. Sabemos que $\overline{CA} = 1$, porque é a medida do raio da circunferência.

Como $[CA]$ é a hipotenusa do triângulo e $[DA]$ o cateto oposto ao ângulo x , usando o seno do ângulo temos que:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{DA}}{\overline{CA}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{DA}}{1} \Leftrightarrow \overline{DA} = \operatorname{sen} x$$



Por outro lado, como $[DC]$ é o cateto adjacente, usando a definição de cosseno, temos:

$$\cos x = \frac{\overline{DC}}{\overline{CA}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{DC}}{1} \Leftrightarrow \overline{DC} = \cos x$$

Como $\overline{ED} = 6$ temos que:

$$\overline{EC} = \overline{ED} + \overline{DC} \Leftrightarrow \overline{EC} = 6 + \cos x$$

Logo, calculando a área do triângulo, obtemos:

$$A_{[AEC]} = \frac{\overline{EC} \times \overline{DA}}{2} = \frac{(6 + \cos x)(\operatorname{sen} x)}{2} = \frac{6 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x}{2} = 3 \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2}$$

Como $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, podemos escrever:

$$A_{[AEC]} = 3 \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} = 3 \operatorname{sen} x + \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{4} = 3 \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} = 3 \operatorname{sen} x + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x)$$

30.2. Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em \mathbb{R} , é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $\left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right]$.

Como $1,72 < 2 < 2,37$, ou seja, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) < 2 < f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in \left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right[$ tal que $f(c) = 2$, ou seja, que a equação $f(x) = 2$ tem, pelo menos, uma solução em $\left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right[$.

C.A.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = \\ &= 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \\ &\approx 1,72 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \\ &\approx 2,37 \end{aligned}$$

Exame – 2013, Ép. especial



31. Para averiguar se a função f é contínua em $x = 1$, temos que verificar se $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

- $f(1) = 1 \times e^{3+1} + 2 \times 1 = e^4 + 2$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (xe^{3+x} + 2x) = 1 \times e^{3+1} + 2 \times 1 = e^4 + 2$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1 - \sqrt{x} + \text{sen}(x-1)}{1-x} \right) = \frac{1 - \sqrt{1^+} + \text{sen}(1^+ - 1)}{1 - 1^+} = \frac{0^- + \text{sen}(0^+)}{0^-} = \frac{0}{0}$ (ind.)
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1-x} + \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1-x} \right) + \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} \right) =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{(1-x)(1 + \sqrt{x})} \right) + \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\text{sen}(x-1)}{-(x-1)} \right) =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1^2 - (\sqrt{x})^2}{(1-x)(1 + \sqrt{x})} \right) - \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\text{sen}(x-1)}{x-1} \right) =$
 (fazendo $y = x - 1$, temos que se $x \rightarrow 1^+$, então $y \rightarrow 0^+$)
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1-x}{(1-x)(1 + \sqrt{x})} \right) - \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{\text{sen } y}{y} \right)}_{\text{Lim. Notável}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{x}} \right) - 1 =$
 $= \frac{1}{1 + \sqrt{1^+}} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, não existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$; logo a função f não é contínua em $x = 1$

Exame - 2013, 2ª Fase

32.

32.1. Começamos por definir o ponto $P(-3,0)$ e o ângulo AOP , cuja amplitude é $\pi - \alpha$.

Assim, como sabemos que $\overline{OP} = 3$, podemos usar a definição de cosseno podemos calcular \overline{OA} :

$$\cos(\pi - \alpha) = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos(\pi - \alpha) = \frac{3}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{3}{\cos(\pi - \alpha)}$$

Como $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, temos que:

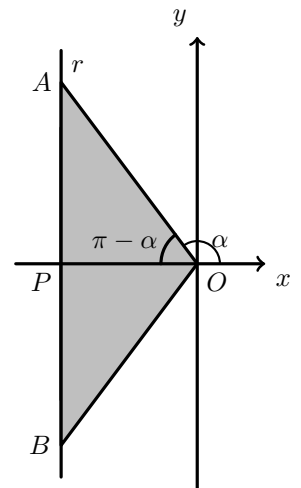
$$\overline{OA} = \frac{3}{\cos(\pi - \alpha)} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{3}{-\cos \alpha} \Leftrightarrow \overline{OA} = -\frac{3}{\cos \alpha}$$

Depois, calculamos \overline{AP} recorrendo à definição de tangente:

$$\text{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \text{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\overline{AP}}{3} \Leftrightarrow \overline{AP} = 3 \text{tg}(\pi - \alpha)$$

Como $\text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg} \alpha$, temos que:

$$\overline{AP} = 3 \text{tg}(\pi - \alpha) \Leftrightarrow \overline{AP} = -3 \text{tg} \alpha$$



Como $\overline{AB} = 2 \times \overline{AP}$ e $\overline{OB} = \overline{OA}$, calculado a expressão do perímetro vem:

$$P_{[OAB]} = \overline{AB} + \overline{OA} + \overline{OB} = 2 \times \overline{AP} + 2 \times \overline{OA} = 2 \times (-3 \text{tg} \alpha) + 2 \times \left(-\frac{3}{\cos \alpha} \right) = -6 \text{tg} \alpha - \frac{6}{\cos \alpha}$$

Logo, para cada $x \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, o perímetro do triângulo é $P(x) = -6 \text{tg} x - \frac{6}{\cos x}$



32.2. Como o declive da reta tangente num ponto é dado pelo valor da derivada nesse ponto, vamos calcular a derivada da função P :

$$P'(x) = \left(-6 \operatorname{tg} x - \frac{6}{\cos x}\right)' = (-6 \operatorname{tg} x)' - \left(\frac{6}{\cos x}\right)' = -6 (\operatorname{tg} x)' - \frac{(6)'(\cos x) - 6(\cos x)'}{(\cos x)^2} =$$

$$= -6 \left(\frac{1}{(\cos x)^2}\right) - \frac{0 - 6(-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{-6}{\cos^2 x} - \frac{6 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{-6 - 6 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

Assim, o declive da reta tangente ao gráfico da função P no ponto de abscissa $\frac{5\pi}{6}$, é

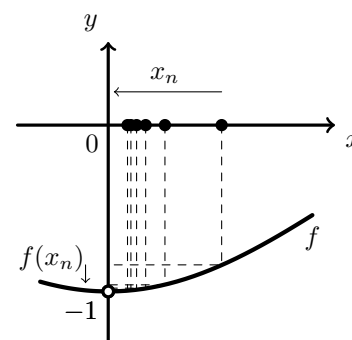
$$m = P'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{-6 - 6 \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{-6 - 6 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2} = \frac{-6 - 6\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{-6 - 3}{\frac{3}{4}} = \frac{-9}{\frac{3}{4}} = -12$$

Exame – 2013, 2ª Fase

33. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0^+$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, e assim, como $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\operatorname{sen} x}{x} = -\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = -1$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (x_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(x_n)$, que se aproximam progressivamente de -1, quando o valor de n aumenta.



Exame – 2013, 1ª Fase



34. Como sabemos que a reta tangente no ponto de abscissa a é paralela à reta $y = \frac{x}{2} + 1$, sabemos que o declive, e logo também o valor derivada é $m = g'(a) = \frac{1}{2}$.

Logo o valor de a é a solução da equação $g'(x) = \frac{1}{2}$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$

Assim, começamos por determinar a expressão de g' :

$$g'(x) = (\sin(2x) - \cos x)' = (\sin(2x))' - (\cos x)' = (2x)' \cos(2x) - (-\sin x) = 2 \cos(2x) + \sin x$$

Como $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ e $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, vem:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2 \cos(2x) + \sin x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin x = 2(1 - \sin^2 x - \sin^2 x) + \sin x = \\ &= 2(1 - 2\sin^2 x) + \sin x = 2 - 4\sin^2 x + \sin x = -4\sin^2 x + \sin x + 2 \end{aligned}$$

Logo, resolvendo a equação $g'(a) = \frac{1}{2}$ temos:

$$-4\sin^2 a + \sin a + 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -8\sin^2 a + 2\sin a + 4 = 1 \Leftrightarrow -8\sin^2 a + 2\sin a + 3 = 0$$

Considerando $y = \sin a$, e resolvendo a equação de grau 2, temos que:

$$-8\sin^2 a + 2\sin a + 3 = 0 \Leftrightarrow -8y^2 + 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-8)(3)}}{2(-8)} \Leftrightarrow y = \frac{3}{4} \vee y = -\frac{1}{2}$$

Escrevendo em função de a , vem: $\sin a = \frac{3}{4} \vee \sin a = -\frac{1}{2}$

Como $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, $-1 < \sin x < 0$, logo a equação $\sin a = \frac{3}{4}$ é impossível.

$$\sin a = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin a = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow a = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee a = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee a = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee a = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Concretizando valores de k podemos verificamos que $a = -\frac{\pi}{6}$ é a única solução da equação que pertence ao domínio da função $]-\frac{\pi}{2}, 0[$, pelo que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $a = -\frac{\pi}{6}$ tem declive $\frac{1}{2}$

Exame - 2013, 1ª Fase

35.

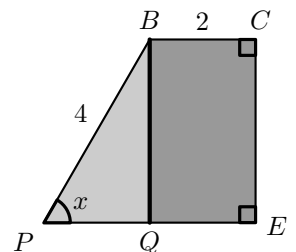
35.1. A área do trapézio $[PBCE]$ pode ser calculada como a soma das áreas do retângulo $[BCEQ]$ e do triângulo $[PBQ]$.

Recorrendo à definição de seno, podemos determinar o comprimento \overline{BQ} :

$$\sin x = \frac{\overline{BQ}}{4} \Leftrightarrow \overline{BQ} = 4 \sin x$$

De forma análoga, usando a definição de cosseno, podemos determinar \overline{PQ} :

$$\cos x = \frac{\overline{PQ}}{4} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 4 \cos x$$



Assim, temos que:

$$\begin{aligned} A_{[PBCE]} &= A_{[BCEQ]} + A_{[PBQ]} = \overline{BC} \times \overline{BQ} + \frac{\overline{PQ} \times \overline{BQ}}{2} = 2 \times 4 \sin x + \frac{4 \sin x \times 4 \cos x}{2} = \\ &= 8 \sin x + 8 \sin x \cos x = 8 \sin x + 4 \times 2 \sin x \cos x = 8 \sin x + 4 \sin(2x) \end{aligned}$$

Logo, para cada valor de $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, a área do trapézio é dada por $S(x) = 8 \sin x + 4 \sin(2x)$



35.2. Vamos recorrer à derivada da função S para estudar a monotonia.

$$S'(x) = (8 \operatorname{sen} x + 4 \operatorname{sen}(2x))' = (8 \operatorname{sen} x)' + (4 \operatorname{sen}(2x))' = 8 \cos x + 4 \times (2x)' \cos(2x) = 8 \cos x + 8 \cos(2x)$$

Determinando os zeros da derivada, vem:

$$\begin{aligned} S'(x) = 0 &\Leftrightarrow 8 \cos x + 8 \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos x + \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\cos(2x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos x = \cos(\pi - 2x) \Leftrightarrow x = \pi - 2x + 2k\pi \vee x = -(\pi - 2x) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x = \pi + 2k\pi \vee x = -\pi + 2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi \vee x = \pi - 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como o domínio da função S é $]0, \frac{\pi}{2}[$, a única solução da equação $S'(x) = 0$ é $x = \frac{\pi}{3}$

Estudando a variação do sinal e S' e a correspondente monotonia de S , vem:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$S'(x)$	n.d.	+	0	-	n.d.
$S(x)$	n.d.	\nearrow	Máx	\searrow	n.d.

Assim podemos concluir que:

- a função S é crescente em $]0, \frac{\pi}{3}]$
- a função S é decrescente em $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$
- a função S tem um máximo absoluto para $x = \frac{\pi}{3}$

Teste Intermédio 12º ano – 24.05.2013

36.

$$\begin{aligned} f' \left(\frac{\pi}{2} \right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f \left(\frac{\pi}{2} \right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x + \cos x - \frac{\pi}{2} - \cos \left(\frac{\pi}{2} \right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y + \frac{\pi}{2} + \cos \left(y + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\pi}{2} - 0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y + \cos \left(y + \frac{\pi}{2} \right)}{y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y} + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos \left(y + \frac{\pi}{2} \right)}{y} = 1 + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} y}{y} = 1 - \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Seja } y = x - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{logo } x = y + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Se } x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \text{então, } y \rightarrow 0$$

$$\cos \left(y + \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{sen} y$$

Teste Intermédio 12º ano – 24.05.2013



37.

37.1. A função g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ porque resulta de operações sucessivas entre funções contínuas. Para que a função g seja contínua em \mathbb{R} , tem que ser contínua em $x = 0$, ou seja, tem que verificar a condição $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = -1 + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} y}{2y} =$$

$$= -1 + \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -1 + \frac{1}{2}(1) = -\frac{1}{2}$$

Seja $y = \frac{x}{2}$
 logo $x = 2y$
 Se $x \rightarrow 0$
 então $y \rightarrow 0$

Como $f(0) = e^k - 1$, para que a função seja contínua, tem que se verificar:

$$e^k - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^k = 1 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow k = \ln 1 - \ln 2 \Leftrightarrow k = -\ln 2$$

37.2. Para resolver a equação, começamos por determinar a expressão analítica de f' :

$$f'(x) = \left(-x + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = (-x)' + \left(\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = -1 + \left(\frac{x}{2}\right)' \cos\left(\frac{x}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Logo,

$$2f'(x) = (f(x) + x)^2 - 1 \Leftrightarrow 2\left(-1 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \left(-x + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + x\right)^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Leftrightarrow -2 + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} \Leftrightarrow y = 1 \vee y = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \vee \cos\left(\frac{x}{2}\right) = -2$$

(fórmula fundamental)
 Se $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

Como $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -2$ é uma equação impossível, temos:

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, o conjunto das soluções da equação (em $] -2\pi, 5\pi[$), é $\{0, 4\}$

Exame – 2012, Ép. especial



38. Como a função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, porque resulta de operações sucessivas entre funções contínuas, só podem existir assíntotas verticais quando $x \rightarrow 0^-$ ou quando $x \rightarrow 0^+$.
Calculando os limites temos:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{4x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-(e^{4x} - 1)}{\frac{1}{4} \times 4x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-4(e^{4x} - 1)}{4x} = -4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{4x} - 1}{4x} = -4$$

(fazendo $y = 4x$, se $x \rightarrow 0^+$, então $y \rightarrow 0^+$)

$$= -4 \lim_{y \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -4 \times 1 = -4$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } x}{1 - \sqrt{1 - x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\text{sen } x)(1 + \sqrt{1 - x^3})}{(1 - \sqrt{1 - x^3})(1 + \sqrt{1 - x^3})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\text{sen } x)(1 + \sqrt{1 - x^3})}{1^2 - (\sqrt{1 - x^3})^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\text{sen } x)(1 + \sqrt{1 - x^3})}{1 - (1 - x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\text{sen } x)(1 + \sqrt{1 - x^3})}{1 - 1 + x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\text{sen } x)(1 + \sqrt{1 - x^3})}{x^3} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + \sqrt{1 - x^3}}{x^2} = 1 \times \frac{1 + \sqrt{1}}{(0^-)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Assim podemos concluir que $x = 0$ é a única assíntota vertical do gráfico de f (quando $x \rightarrow 0^-$).

Exame - 2012, 2ª Fase

39.

- 39.1. Definindo o ponto P , como o ponto médio do lado $[AB]$, a área da região sombreada pode ser calculada como a diferença entre a área do quadrado e a soma das áreas de 8 triângulos retângulos (o triângulo $[AEP]$ e os restantes 7 semelhantes a este):

$$A_{[AEBFCGDH]} = A_{[ABCD]} - 8 \times A_{[AEP]}$$

Como P é o ponto médio de $[AB]$, temos que $\overline{AP} = 2$, podemos determinar \overline{EP} , recorrendo à definição de tangente de um ângulo:

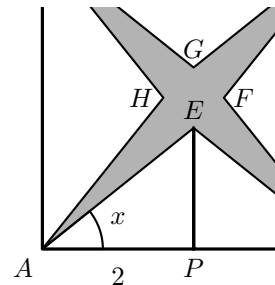
$$\text{tg } x = \frac{\overline{EP}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \text{tg } x = \frac{\overline{EP}}{2} \Leftrightarrow \overline{EP} = 2 \text{tg } x$$

Assim, calculando a área da região sombreada, vem:

$$A_{[AEBFCGDH]} = A_{[ABCD]} - 8 \times A_{[AEP]} = \overline{AB}^2 - 8 \times \frac{\overline{AP} \times \overline{EP}}{2} = 4^2 - 8 \times \frac{2 \times 2 \text{tg } x}{2} =$$

$$= 16 - 8 \times 2 \text{tg } x = 16 - 16 \text{tg } x = 16(1 - \text{tg } x)$$

Logo, para cada valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, a área da região sombreada é dada por $a(x) = 16(1 - \text{tg } x)$



39.2. Como a função a resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{5}\right]$.

Como $4,38 < 5 < 11,71$, ou seja, $a\left(\frac{\pi}{5}\right) < 5 < a\left(\frac{\pi}{12}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $\alpha \in \left]\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{5}\right[$, tal que $a(\alpha) = 5$, ou seja, que existe um ângulo α com amplitude compreendida entre $\frac{\pi}{12} \text{ rad}$ e $\frac{\pi}{5} \text{ rad}$, que define uma região sombreada com área 5.

C.A.

$$a\left(\frac{\pi}{12}\right) = 16\left(1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) \approx 11,71$$

$$a\left(\frac{\pi}{5}\right) = 16\left(1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) \approx 4,38$$

Exame – 2012, 2ª Fase

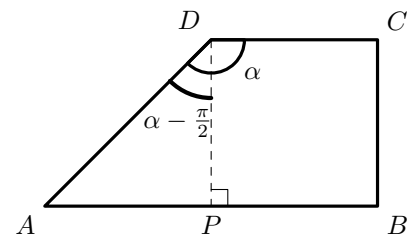
40.

40.1. Considerando um ponto P , sobre o lado $[AB]$ do trapézio, tal que o segmento $[DP]$ seja perpendicular ao lado $[AB]$, consideramos o ângulo ADP com amplitude $\frac{\pi}{2} - \alpha$

Como $\overline{DP} = 1$, recorrendo à definição de cosseno, temos:

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{DP}}{\overline{DA}} \Leftrightarrow \overline{DA} = \frac{1}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$$

e como $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} \alpha$, temos que: $\overline{DA} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$



Da definição de tangente de um ângulo, e como $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ temos:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{AP}}{\overline{DP}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{AP}}{1} \Leftrightarrow \overline{AP} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Logo, o perímetro do trapézio é:

$$\begin{aligned} P_{[ABCD]} &= \overline{PB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} + \overline{AP} = 1 + 1 + 1 + \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} + \left(-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right) = \\ &= 3 + \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} - \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = 3 + \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = 3 + \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \end{aligned}$$

Ou seja, para cada valor de $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, o perímetro do trapézio $[ABCD]$ é $P(\alpha) = 3 + \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$



40.2. Começando por determinar a expressão da derivada, temos:

$$\begin{aligned}
 P'(\alpha) &= \left(3 + \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}\right)' = (3)' + \left(\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}\right)' = 0 + \frac{(1 - \cos \alpha)'(\sin \alpha) - (1 - \cos \alpha)(\sin \alpha)'}{(\sin \alpha)^2} = \\
 &= \frac{0 - (-\sin \alpha)(\sin \alpha) - (1 - \cos \alpha)(\cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - (\cos \alpha - \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \\
 &= \frac{\sin^2 \alpha - \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}
 \end{aligned}$$

Como $\operatorname{tg}^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ e $\operatorname{tg} \theta = -\sqrt{8}$, vem:

$$(-\sqrt{8})^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow 8 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \cos \theta = \pm \frac{1}{3}$$

Como $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, $\cos \theta < 0$, logo $\cos \theta = -\frac{1}{3}$

$$\text{E também: } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \sin^2 \theta = \frac{8}{9}$$

$$\text{Assim, } P'(\theta) = \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}{\frac{8}{9}} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{4 \times 9}{3 \times 8} = \frac{3}{2}$$

Exame – 2012, 1ª Fase

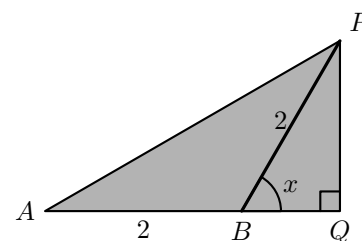
41.

41.1. Usando a definição de seno, temos:

$$\sin x = \frac{\overline{PQ}}{\overline{BP}} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\overline{PQ}}{2} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 2 \sin x$$

e usando a definição de cosseno, vem:

$$\cos x = \frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{BQ}}{2} \Leftrightarrow \overline{BQ} = 2 \cos x$$



Calculando a área do triângulo vem:

$$\begin{aligned}
 A_{[APQ]} &= \frac{(\overline{AB} + \overline{BQ}) \times \overline{PQ}}{2} = \frac{(2 + 2 \cos x)(2 \sin x)}{2} = \frac{4 \sin x + 4 \sin x \cos x}{2} = 2 \sin x + 2 \sin x \cos x = \\
 &= 2 \sin x + \sin(2x)
 \end{aligned}$$

Logo, para cada valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a área do triângulo $[APQ]$ é $A(x) = 2 \sin x + \sin(2x)$



41.2. Para estudar a existência de um máximo, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$A'(x) = (2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x))' = (2 \operatorname{sen} x)' + (\operatorname{sen}(2x))' = 2 \cos x + (2x)' \cos(2x) = 2 \cos x + 2 \cos(2x)$$

Depois calculamos os zeros, para estudar o sinal:

$$\begin{aligned} A'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2 \cos x + 2 \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x = -2 \cos(2x) \Leftrightarrow \cos x = -\cos(2x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos x = \cos(\pi - 2x) \end{aligned}$$

Como, em \mathbb{R} ,

$$\cos x = \cos(\pi - 2x) \Leftrightarrow x = \pi - 2x + 2k\pi \vee x = -(\pi - 2x) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pi + 2k\pi \vee x = -\pi + 2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \pi - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Concretizando valores inteiros de k , verificamos que, $x = \frac{\pi}{3}$ é a única solução em $]0, \frac{\pi}{2}[$, ou seja, a única solução da equação $A'(x) = 0$

Assim, estudando a variação de sinal de A' e relacionando com a monotonia da função A , vem:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$A'(x)$	n.d.	+	0	-	n.d.
$A(x)$	n.d.	\nearrow	Máx	\searrow	n.d.

Logo $x = \frac{\pi}{3}$ é o maximizante que corresponde ao máximo absoluto da função A , ou seja existe um valor de $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, para o qual o valor da área do triângulo é máxima.

Teste Intermédio 12º ano – 24.05.2012



42. Como se pretende determinar os extremos da função, vamos recorrer aos zeros da derivada, e por isso, começamos por derivar a função:

$$g'(x) = (x - 2 \cos x)' = (x)' - (2 \cos x)' = 1 - 2(-\sin x) = 1 + 2 \sin x$$

Depois determinamos os zeros da derivada, ou seja as abcissas dos pontos C e D :

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow 1 + 2 \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Atribuindo valores inteiros a k , podemos encontrar os valores de x que pertencem ao domínio da função:

$$x = -\frac{\pi}{6} (k = 0) \text{ e } x = -\frac{5\pi}{6} (k = -1, x = \frac{7\pi}{6} - 2\pi)$$

Assim, estudando a variação de sinal de g' e relacionando com a monotonia da função g , vem:

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	n.d.	+	0	-	0	+	n.d.
$g(x)$	n.d.	\nearrow	Máx	\searrow	min	\nearrow	n.d.

Assim, temos que a abcissa do ponto C é $x_C = -\frac{5\pi}{6}$, e a ordenada é

$$g\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6} - 2 \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6} - 2 \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} - 2\left(-\cos \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6} - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6}$$

Ou seja, o ponto C tem coordenadas $C\left(-\frac{5\pi}{6}, \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6}\right)$

De forma análoga, temos que a abcissa do ponto D é $x_D = -\frac{\pi}{6}$, e a ordenada é

$$g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - 2 \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - 2 \cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$$

Ou seja, o ponto D tem coordenadas $D\left(-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}\right)$

Exame – 2011, Prova especial

43. Como se trata de um círculo trigonométrico, o ponto B tem coordenadas $B\left(\cos \frac{5\pi}{3}, \sin \frac{5\pi}{3}\right)$, porque o segmento $[OB]$, define com o semieixo positivo Ox um ângulo de $\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ radianos.

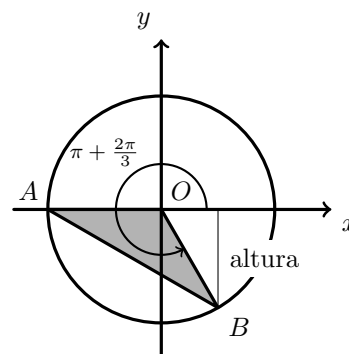
Podemos considerar como a medida da base do triângulo $\overline{OA} = 1$ e o valor absoluto da ordenada de B como a medida da altura:

$$|y_B| = \left| \sin \frac{5\pi}{3} \right| = \left| -\sin \frac{\pi}{3} \right| = \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Assim, calculando a área do triângulo vem:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times |y_B|}{2} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Resposta: **Opção A**



Exame – 2011, Ép. especial



$$\begin{aligned}
44. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{f(x) - \pi} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\pi - 4 \operatorname{sen}(5x) - \pi} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{-4 \operatorname{sen}(5x)} = -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \frac{x}{\operatorname{sen}(5x)} \right) = \\
&= -\frac{1}{4} \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(5x)} = -\frac{1}{4} \times 1 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}} = \\
&\text{(fazendo } y = 5x \text{ temos que } x = \frac{y}{5}, \text{ e se } x \rightarrow 0, \text{ então } y \rightarrow 0) \\
&= -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{\frac{y}{5}}} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{5 \operatorname{sen}(y)}{y}} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{5 \operatorname{sen}(y)}{y}} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{5 \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = \\
&= -\frac{1}{4} \times \frac{1}{5 \times 1} = -\frac{1}{20}
\end{aligned}$$

Exame – 2011, Ép. especial

45. Como a função g é contínua, é contínua em $x = 0$, ou seja, verifica a condição: $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$
Assim, temos que:

- $g(0) = \ln(k - 0) = \ln k$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\ln(k - x)) = \ln k$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{3x} = \frac{1}{3} \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$

Logo, temos que: $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \Leftrightarrow \ln k = \frac{1}{3} \Leftrightarrow k = e^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{3}$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2011, 2ª fase

46. Como $\overline{OA} = 1$, usando as definições de seno e cosseno temos:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\overline{OE}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{\overline{OE}}{1} \Leftrightarrow \overline{OE} = \operatorname{sen} \theta$$

$$\operatorname{cos} \theta = \frac{\overline{EA}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \operatorname{cos} \theta = \frac{\overline{EA}}{1} \Leftrightarrow \overline{EA} = \operatorname{cos} \theta$$

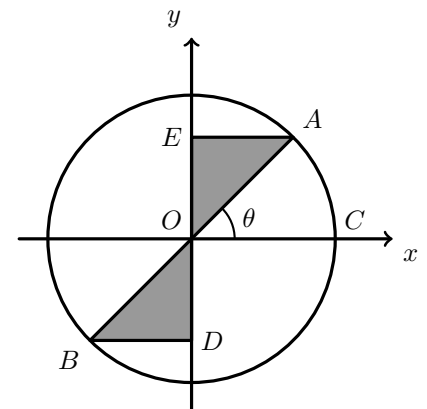
E assim, o perímetro da região sombreada é:

$$P_{[ABDE]} = \overline{AO} + \overline{OB} + \overline{BD} + \overline{DO} + \overline{OE} + \overline{EA}$$

Como $\overline{AO} = \overline{OB}$; $\overline{BD} = \overline{EA}$ e $\overline{DO} = \overline{OE}$, temos:

$$P_{[ABDE]} = 2\overline{AO} + 2\overline{EA} + 2\overline{OE} = 2 \times 1 + 2 \operatorname{cos} \theta + 2 \operatorname{sen} \theta = 2(1 + \operatorname{cos} \theta + \operatorname{sen} \theta)$$

Resposta: **Opção C**



Exame – 2011, 2ª Fase



47. Começamos por determinar $f'(x)$:

$$f'(x) = (a \cos(nx) + b \operatorname{sen}(nx))' = (a \cos(nx))' + (b \operatorname{sen}(nx))' = a(nx)'(-\operatorname{sen}(nx)) + (b(nx))' \cos(nx) = -an \operatorname{sen}(nx) + bn \cos(nx)$$

Determinamos em seguida $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = (-an \operatorname{sen}(nx) + bn \cos(nx))' = (-an \operatorname{sen}(nx))' + (bn \cos(nx))' = \\ &= -an(nx)' \cos(nx) + bn(nx)'(-\operatorname{sen}(nx)) = -an^2 \cos(nx) - bn^2 \operatorname{sen}(nx) = \\ &= -n^2 (a \cos(nx) + b \operatorname{sen}(nx)) = \\ &= -n^2 (f(x)) \end{aligned}$$

Assim temos que: $f''(x) + n^2 f(x) = -n^2 f(x) + n^2 f(x) = 0$, *q.e.d.*

Exame – 2011, 2ª Fase

48.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} \right)}{x} \right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} \right)}{x} \right)^2 =$$

(fazendo $y = \frac{x}{2}$ temos que $x = 2y$, e se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$)

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} y}{2y} \right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \times \frac{\operatorname{sen} y}{y} \right) \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \times 1 \right)^2 = \frac{1}{4}$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2011, 1ª Fase

49.

49.1. Podemos calcular a área do trapézio como a soma das áreas do retângulo $[ODCB]$ e do triângulo $[OAB]$.

A base do retângulo é dada pela distância do ponto D à origem:

$$\overline{OD} = |x_D| = \left| -\frac{\pi}{6} \right| = \frac{\pi}{6}$$

e a altura é a ordenada do ponto C :

$$\overline{DC} = f \left(-\frac{\pi}{6} \right) = 4 \cos \left(2 \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = 4 \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) = 4 \cos \frac{\pi}{3} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

A altura do triângulo também é ordenada do ponto C , $\overline{OB} = \overline{DC}$ e a base é a menor é a abscissa do ponto \overline{OA} , ou seja, a solução positiva da equação $f(x) = 0$.

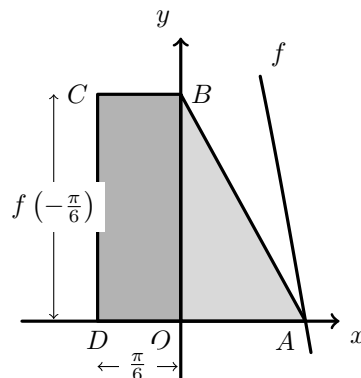
Assim, resolvendo a equação vem:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4 \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, para $k = 0$, a menor solução positiva da equação é $x = \frac{\pi}{4}$

Assim, calculando a área do trapézio, vem:

$$A_{[ABCD]} = A_{[ODCB]} + A_{[OAB]} = \overline{OD} \times \overline{DC} + \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{\pi}{6} \times 2 + \frac{\frac{\pi}{4} \times 2}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$$



49.2. Determinando a expressão da primeira derivada de f , vem:

$$f'(x) = (4 \cos(2x))' = 4(2x)'(-\sin(2x)) = 4 \times 2 \times (-\sin(2x)) = -8 \sin(2x)$$

Depois, determinando a expressão da segunda derivada, vem:

$$f''(x) = (f'(x))' = (-8 \sin(2x))' = -8(2x)' \cos(2x) = -16 \cos(2x)$$

Assim, temos que, para qualquer número real x ,

$$\begin{aligned} f(x) + f'(x) + f''(x) &= (4 \cos(2x)) + (-8 \sin(2x)) + (-16 \cos(2x)) = 4 \cos(2x) - 16 \cos(2x) - 8 \sin(2x) = \\ &= -12 \cos(2x) - 8 \sin(2x) = -4 \times 3 \cos(2x) - 4 \times 2 \sin(2x) = -4(3 \cos(2x) + 2 \sin(2x)), \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

Exame - 2011, 1ª Fase

50. Para que a função f seja contínua em $x = 1$, a condição $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ tem que se verificar.

Assim, temos que:

- $f(1) = 1 \times e^{-1} + 2 \times 1 = e^{-1} + 2 = \frac{1}{e} + 2$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (xe^{-x} + 2x) = 1 \times e^{-1} + 2 \times 1 = e^{-1} + 2 = \frac{1}{e} + 2$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(2 + \frac{\sin(x-1)}{ex - e} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin(x-1)}{e(x-1)} = 2 + \frac{1}{e} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)} =$
(fazendo $y = x - 1$, se $x \rightarrow 1^-$ então $y \rightarrow 0^-$)

$$= 2 + \frac{1}{e} \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sin y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 + \frac{1}{e} \times 1 = 2 + \frac{1}{e}$$

Logo, como $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, a função f é contínua em $x = 1$.

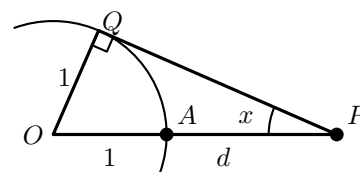
Teste Intermédio 12º ano - 26.05.2011

51.

51.1. Como $\overline{OQ} = 1$ (medida do cateto oposto ao ângulo x) e $\overline{OP} = 1 + d$ (medida da hipotenusa do triângulo retângulo), usando a definição de seno de um ângulo, temos que:

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{1+d} \Leftrightarrow 1+d = \frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d = \frac{1}{\sin x} - 1 \Leftrightarrow d = \frac{1}{\sin x} - \frac{\sin x}{\sin x} \Leftrightarrow d = \frac{1 - \sin x}{\sin x} \end{aligned}$$

Logo, para cada valor de $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, temos que $d = f(x)$.



51.2. Para estudar a monotonia da função, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1 - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \right)' = \frac{(1 - \operatorname{sen} x)'(\operatorname{sen} x) - (1 - \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x} = \\ &= \frac{((1)' - (\operatorname{sen} x)')(\operatorname{sen} x) - (1 - \operatorname{sen} x)(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{(0 - (\cos x))(\operatorname{sen} x) - (\cos x - \operatorname{sen} x \cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \\ &= \frac{-\operatorname{sen} x \cos x - \cos x + \operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \end{aligned}$$

Assim, para $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, temos que:

- $\cos x > 0$, logo $-\cos x < 0$
- $\operatorname{sen}^2 x > 0$
- $\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} < 0$

Ou seja, como $f'(x) < 0$, para $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, a função f é estritamente decrescente no domínio, pelo que a um aumento do valor de x corresponde uma diminuição do valor de d , ou seja, **a afirmação é verdadeira.**

Teste Intermédio 12º ano – 26.05.2011

52.

52.1. As três horas da tarde desse dia correspondem a $t = 15$.

Assim, a profundidade correspondente é dada por:

$$P(15) = 2 \cos \left(\frac{\pi}{6} \times 15 \right) + 8 = 2 \cos \left(\frac{3 \times 5 \times \pi}{3 \times 2} \right) + 8 = 2 \cos \left(\frac{5\pi}{2} \right) + 8 = 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + 8 = 2 \times 0 + 8 = 8$$

Ou seja, às 15 horas, a profundidade da água na marina era de 8 metros.



52.2. Determinando a expressão da derivada, temos:

$$P'(t) = \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 8\right)' = \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right)' + (8)' = 2\left(\frac{\pi}{6}t\right)' \left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right) + 0 = \frac{2\pi}{6} \left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right) = -\frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Calculando os zeros da derivada, vem:

$$\begin{aligned} P'(t) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \sin 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t = 0 + 2k\pi \vee \frac{\pi}{6}t = \pi - 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = \frac{6(2k\pi)}{\pi} \vee t = \frac{6(\pi + 2k\pi)}{\pi}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 12k \vee t = 6 + 12k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como $t \in [0, 24]$, atribuindo valores a k ($k = 0$, $k = 1$ e $k = 2$), obtemos o conjunto dos zeros da função derivada: $\{0, 6, 12, 18, 24\}$

Desta forma, estudando a variação de sinal de P' e relacionando com a monotonia da função P , vem:

x	0		6		12		18		24
$P'(x)$	0	-	0	+	0	-	0	+	0
$P(x)$	Máx	\searrow	min	\nearrow	Máx	\searrow	min	\nearrow	Máx

Logo, a profundidade mínima, que ocorreu às 6 horas e depois novamente às 18 horas, pode ser calculada como:

$$P(6) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} \times 6\right) + 8 = 2 \cos(\pi) + 8 = 2(-1) + 8 = -2 + 8 = 6$$

Ou seja a profundidade mínima na marina, nesse dia, foi de 6 metros.

Exame – 2010, Ép. especial

53.

53.1. Analisando as figuras podemos dividir o cálculo da altura em dois casos:

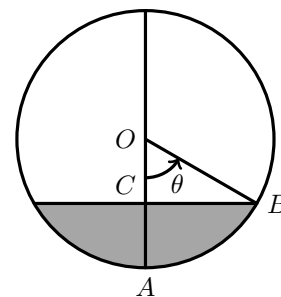
No primeiro caso, $\left(\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $h = 3 - \overline{OC}$

Como $\overline{OB} = 3$, recorrendo à definição de cosseno de um ângulo, temos:

$$\cos \theta = \frac{\overline{OC}}{3} \Leftrightarrow \overline{OC} = 3 \cos \theta$$

e assim,

$$h = 3 - \overline{OC} = 3 - 3 \cos \theta$$



No segundo caso, $\left(\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[\right)$, $h = 3 + \overline{OC}$

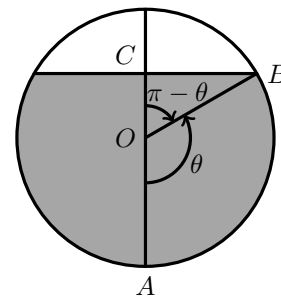
Como $\overline{OB} = 3$, recorrendo à definição de cosseno de um ângulo, temos:

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{\overline{OC}}{3} \Leftrightarrow \overline{OC} = 3 \cos(\pi - \theta) \Leftrightarrow \overline{OC} = 3(-\cos \theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{OC} = -3 \cos \theta$$

e assim,

$$h = 3 + \overline{OC} = 3 + (-3 \cos \theta) = 3 - 3 \cos \theta$$



Ou seja em ambos os casos, isto é, para qualquer $\theta \in]0, \pi[$, a altura h pode ser calculada como que $h(\theta) = 3 - 3 \cos(\theta)$.



53.2. Como $h(\theta) = 3 - 3 \cos(\theta)$, temos que:

$$\begin{aligned} h(\theta) = 3 &\Leftrightarrow 3 - 3 \cos(\theta) = 3 \Leftrightarrow -3 \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos(\theta) = \cos \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como $\theta \in]0, \pi[$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ é a única solução da equação.

Calcular θ tal que $h(\theta) = 3$, significa determinar o ângulo associado a uma quantidade de combustível no depósito com 3 metros de altura.

Assim a solução calculada significa que, quando o combustível no depósito tiver uma altura de 3 metros, o ângulo θ será um ângulo reto $\left(\frac{\pi}{2} \text{ rad.}\right)$.

Exame - 2010, 2ª Fase

54. Para que a função f seja contínua em $x = 0$, tem que se verificar $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

- $f(0) = a(0) + b + e^0 = 0 + b + 1 = b + 1$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax + b + e^x) = a(0) + b + e^0 = 0 + b + 1 = b + 1$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x - \sin(2x)}{x} \right) = \frac{0 - \sin 0}{0} = \frac{0}{0}$ (indeterminação)

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{x} - \frac{\sin(2x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{2 \times \sin(2x)}{2 \times x} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 \times \frac{\sin(2x)}{2x} \right) =$$

$$= 1 - 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x)}{2x} \stackrel{(1)}{=} 1 - 2 \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 1 - 2 \times 1 = 1 - 2 = -1$$
- (1) (fazendo $y = 2x$, se $x \rightarrow 0^+$ então $y \rightarrow 0^+$)

Assim, podemos determinar o valor de b :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow b + 1 = -1 \Leftrightarrow b = -2$$

Exame - 2010, 1ª Fase

55.

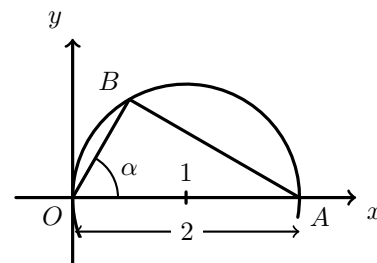
55.1. Como o triângulo está inscrito numa semicircunferência é um triângulo retângulo. Sabemos que a hipotenusa coincide com o diâmetro e tem comprimento 2 ($\overline{OA} = 2$).

Assim, recorrendo à definição de seno temos:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\overline{AB}}{2} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2 \sin \alpha$$

Analogamente, pela definição de cosseno, vem:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{OB}}{2} \Leftrightarrow \overline{OB} = 2 \cos \alpha$$



Logo, o perímetro do triângulo é:

$$P_{[OAB]} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{OB} = 2 + 2 \sin \alpha + 2 \cos \alpha = 2(1 + \cos \alpha + \sin \alpha)$$

Ou seja, para cada valor de $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, o perímetro do triângulo $[OAB]$ é dado, em função de α , por

$$f(\alpha) = 2(1 + \cos \alpha + \sin \alpha)$$



55.2. Determinando a expressão da derivada da função, vem:

$$f'(\alpha) = (2(1 + \cos \alpha + \sin \alpha))' = 2((1)' + (\cos \alpha)' + (\sin \alpha)') = 2(0 - \sin \alpha + \cos \alpha) = 2(\cos \alpha - \sin \alpha)$$

$$\text{Assim: } f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2(\cos \alpha - \sin \alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha - \sin \alpha = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = \sin \alpha$$

Logo, como $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, sabemos que $\alpha = \frac{\pi}{4}$ é a única solução da equação $f'(\alpha) = 0$, pelo que podemos estudar a variação do sinal de f' para relacionar com a monotonia de f :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	n.d.	+	0	-	n.d.
$f(x)$	n.d.	\nearrow	Máx	\searrow	n.d.

Logo, o maximizante de f , ou seja, o valor de α para o qual o perímetro do triângulo é máximo, é $\frac{\pi}{4}$

Exame – 2010, 1ª Fase

56.

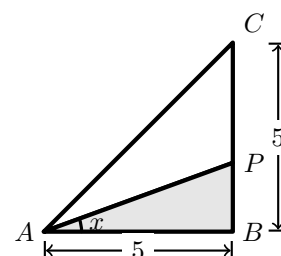
56.1. Relativamente ao triângulo retângulo $[ABP]$, do qual conhecemos a medida do cateto adjacente ao ângulo x , usando a definição de cosseno e de tangente do ângulo x , temos:

$$\cos x = \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{5}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{5}{\cos x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{BP}}{5} \Leftrightarrow \overline{BP} = 5 \operatorname{tg} x$$

Temos ainda que

$$\overline{BP} + \overline{PC} = 5 \Leftrightarrow \overline{PC} = 5 - \overline{BP} \Leftrightarrow \overline{PC} = 5 - 5 \operatorname{tg} x$$



Recorrendo ao teorema de Pitágoras, podemos calcular a medida do segmento $[AC]$:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 5^2 + 5^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 25 + 25 \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{50}$$

Assim, calculando o perímetro do triângulo $[APC]$ vem:

$$P_{[APC]} = \overline{AP} + \overline{PC} + \overline{AC} = \frac{5}{\cos x} + 5 - 5 \operatorname{tg} x + \sqrt{50} = \frac{5}{\cos x} - 5 \operatorname{tg} x + \sqrt{50} + 5$$

Pelo que, para cada valor de $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$, o perímetro do triângulo $[APC]$ é dado pela função f

56.2. Como o declive da reta tangente em cada ponto é dado pelo valor da derivada, vamos determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{5}{\cos x} - 5 \operatorname{tg} x + \sqrt{50} + 5 \right)' = \left(\frac{5}{\cos x} \right)' - (5 \operatorname{tg} x)' + (\sqrt{50})' + (5)' = \\ &= \frac{(5)'(\cos x) - 5(\cos x)'}{\cos^2 x} - 5 \times \frac{1}{\cos^2 x} + 0 + 0 = \frac{0 - 5(-\sin x)}{\cos^2 x} - \frac{5}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{5 \sin x}{\cos^2 x} - \frac{5}{\cos^2 x} = \frac{5 \sin x - 5}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Assim, no ponto de abcissa $\frac{\pi}{6}$, o declive da reta tangente é:

$$m_r = f' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{5 \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) - 5}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{6} \right)} = \frac{5 \left(\frac{1}{2} \right) - 5}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} = \frac{\frac{5}{2} - 5}{\frac{3}{4}} = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{3}{4}} = -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3}$$

Ou seja, a reta r tem declive $-\frac{10}{3}$

Teste Intermédio 12º ano – 19.05.2010



57. Calculando a derivada da função f temos:

$$f'(x) = (\sin(2x))' = (2x)' \cos(2x) = 2 \cos(2x)$$

Calculando o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $\frac{\pi}{8}$ vem:

$$f' \left(\frac{\pi}{8} \right) = 2 \cos \left(2 \times \frac{\pi}{8} \right) = 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2009, Ép. especial

58. Começamos por determinar a expressão da derivada da função:

$$f'(x) = (e^x \cdot \cos x)' = (e^x)' \cos x + e^x (\cos x)' = e^x \cos x + e^x (-\sin x) = e^x (\cos x - \sin x)$$

Determinando os zeros da derivada, vem:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x (\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{Eq Imp, } e^x > 0} \vee \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x$$

No domínio da função, o intervalo $[0, \pi[$, a única solução da equação é $x = \frac{\pi}{4}$.

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		π
$f'(x)$	+	+	0	-	n.d
$f(x)$	min	\longrightarrow	Máx	\longrightarrow	n.d.

Assim, podemos concluir que a função f :

- é crescente no intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$;
- é decrescente no intervalo $[\frac{\pi}{4}, \pi[$;
- tem um mínimo, cujo minimizante é ($x = 0$) e um máximo, cujo é maximizante ($x = \frac{\pi}{4}$)

Assim o mínimo relativo da função é $f(0) = e^0 \times \cos(0) = 1 \times 1 = 1$ e o máximo é

$$f \left(\frac{\pi}{4} \right) = e^{\frac{\pi}{4}} \times \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) = e^{\frac{\pi}{4}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}}}{2}$$

Exame – 2009, Ép. especial

59. Como o declive da reta tangente em cada ponto é dado pelo valor da derivada, vamos determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin(2x) \cos x)' = (\sin(2x))' \cos x + \sin(2x) (\cos x)' = (2x)' \cos(2x) \cos x + \sin(2x) (-\sin x) = \\ &= 2 \cos(2x) \cos x - \sin(2x) \sin x \end{aligned}$$

Assim, o declive da reta tangente no ponto de abscissa 0, pode ser calculado como:

$$m = f'(0) = 2 \cos(2(0)) \cos 0 - \sin(2(0)) \sin 0 = 2 \times 1 \times 1 - 0 \times 0 = 2$$

Como $f(0) = \sin(2(0)) \cos 0 = 0 \times 1 = 0$, sabemos que o ponto $P(0,0)$ pertence ao gráfico de f e também à reta tangente neste ponto.

Como a reta tangente intersesta o eixo das ordenadas no ponto $(0,0)$, o valor da ordenada na origem é zero, logo a equação reduzida é

$$y = 2x + 0 \Leftrightarrow y = 2x$$

Exame – 2009, 2ª Fase



60. Como a função é contínua, é contínua no seu domínio, em particular é contínua em $x = 0$, logo verifica-se a condição: $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

- $f(0) = \log_2(k + 0) = \log_2 k$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\log_2(k + x)) = \log_2(k + 0^+) = \log_2 k$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}(2x)}{x} = \frac{\text{sen}(2 \times 0)}{0} = \frac{0}{0}$ (indeterminação)
 $= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \times \text{sen}(2x)}{2 \times x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}(2x)}{2x} \stackrel{(1)}{=} 2 \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } y}{y}}_{\text{Limite Notável}} = 2 \times 1 = 2$

(1) fazendo $y = 2x$, se $x \rightarrow 0^-$, então $y \rightarrow 0^-$

Logo, como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, temos que:

$$\log_2 k = 2 \Leftrightarrow k = 2^2 \Leftrightarrow k = 4$$

Resposta: **Opção D**

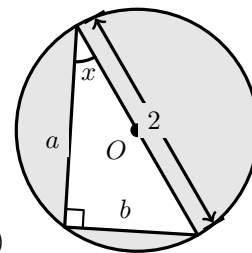
Exame – 2009, 1ª Fase

61. Como a medida da hipotenusa do triângulo é 2 (porque é um diâmetro de uma circunferência de raio 1), podemos recorrer à definição de seno e cosseno, para determinar a medida da base (b) e da altura (a):

$$\text{sen } x = \frac{b}{2} \Leftrightarrow b = 2 \text{sen } x \quad \text{e} \quad \text{cos } x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow a = 2 \text{cos } x$$

Logo a área sombreada é a diferença da área do círculo e da área do triângulo:

$$A = A_o - A_{\Delta} = \pi r^2 - \frac{b \times a}{2} = \pi(1)^2 - \frac{2 \text{sen } x \times 2 \text{cos } x}{2} = \pi - 2 \text{sen } x \text{cos } x = \pi - \text{sen}(2x)$$



Resposta: **Opção A**

Exame – 2009, 1ª Fase

- 62.
- O gráfico da função a **tem uma** única assíntota - a reta vertical $x = 0$
 - O gráfico da função b **tem uma** única assíntota - a reta horizontal $y = 0$
 - O gráfico da função c **não tem** assíntotas
 - O gráfico da função d **tem um número infinito** de assíntotas - as retas verticais $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12º ano – 27.05.2009



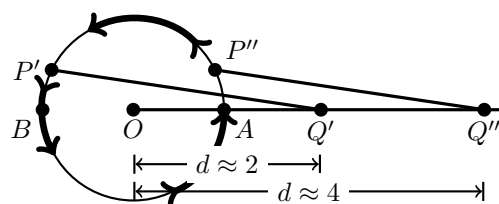
63.

63.1. Quando o ponto P inicia o movimento (e quando termina), ou seja, quando a sua posição coincide com a posição do ponto A , temos $\overline{OQ} = 4$, que é o valor máximo de d , para $x = 0 \vee x = 2\pi$.

Da mesma forma, quando $x = \pi$, ou seja, quando a posição do ponto P coincide com a posição do ponto B , temos $\overline{OQ} = 2$, que é o valor mínimo.

Logo, $d(0) = 4$ e $d(\pi) = 2$, pelo que $d(0) = 2 \times 2 = 2d(\pi)$, ou seja, **a afirmação I é verdadeira**.

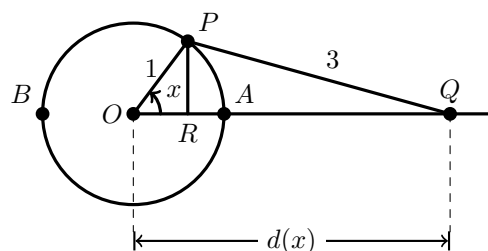
Como a função atinge o valor mínimo para $x = \pi$, ou seja $\overline{OQ} = 2$, e depois, esta distância vai progressivamente aumentar até que $\overline{OQ} = 4$, quando $x = 2\pi$, temos que a função $d(x)$ é crescente no intervalo $]\pi, 2\pi[$, ou seja $d'(x) > 0$ se $x \in]\pi, 2\pi[$, pelo que, **a afirmação II é falsa**.



63.2. Como o triângulo $[ORP]$ é retângulo, e sabemos que a hipotenusa tem comprimento 1, usando a definição de seno e de cosseno vem:

$$\sin x = \frac{\overline{PR}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\overline{PR}}{1} \Leftrightarrow \overline{PR} = \sin x$$

$$\cos x = \frac{\overline{OR}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{OR}}{1} \Leftrightarrow \overline{OR} = \cos x$$



Como o triângulo $[PRQ]$ também é retângulo, e conhecemos a medida de dois lados, podemos usar o Teorema de Pitágoras:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2 \Leftrightarrow 3^2 = (\sin x)^2 + \overline{RQ}^2 \Leftrightarrow 9 - \sin^2 x = \overline{RQ}^2 \Leftrightarrow \overline{RQ} = \sqrt{9 - \sin^2 x}$$

Logo, $\overline{OQ} = \overline{OR} + \overline{RQ} \Leftrightarrow \overline{OQ} = \cos x + \sqrt{9 - \sin^2 x}$, pelo que, para cada valor de $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$d(x) = \cos x + \sqrt{9 - \sin^2 x}$$

Teste Intermédio 12º ano – 27.05.2009

64. Sabemos que, no 4º quadrante - ou seja no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ - o cosseno de um ângulo é positivo e que cresce de 0 para 1, ou seja $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$ e $\cos(0) = 1$

No primeiro quadrante - em particular no intervalo $[0, \frac{\pi}{3}]$ - o cosseno também é positivo, e decrescente, pelo que não atinge valores superiores a 1.

Logo, como a função f tem domínio $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}]$, contradomínio de f é $[0, 1]$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2008, Ép. especial



65. Como $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$, então $\sin(2a) = \sin(a+a) = 2 \sin a \cos a$, e assim temos que

$$f(x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x) + 2 \Leftrightarrow f(x) = \sin(2x) + 2$$

A ordenada do ponto de interseção da reta $y = 1$ com o gráfico de f é 1 e a abscissa é a solução da equação $f(x) = 1$ que pertence ao intervalo $[0, \pi]$. Assim, resolvendo a equação temos:

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\Leftrightarrow \sin(2x) + 2 = 1 \Leftrightarrow \sin(2x) = -1 \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \vee 2x = \pi - \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \frac{2k\pi}{2} \vee 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Assim atribuindo valores a k ($k = 0$ para o primeiro caso ou $k = 1$ no segundo caso) obtemos a única solução da equação que pertence ao intervalo $[0, \pi]$, ou seja, $x = \frac{3\pi}{4}$

Logo as coordenadas do ponto de interseção são: $\left(\frac{3\pi}{4}, 1\right)$

Exame – 2008, Ép. especial

66.

66.1. Recorrendo à definição de derivada da função no ponto de abscissa 0, vem:

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \sin(4x) - (2 + \sin(4 \times 0))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \sin(4x) - 2}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \times \sin(4x)}{4 \times x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{4x} \stackrel{(1)}{=} 4 \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y}}_{\text{Limite Notável}} = 4 \times 1 = 4 \end{aligned}$$

(1) fazendo $y = 4x$, se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$

66.2. Para estudar a monotonia da função, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$g'(x) = (2 + \sin(4x))' = (2)' + (\sin(4x))' = 0 + (4x)' \cos(4x) = 4 \cos(4x)$$

Para estudar o sinal da derivada, calculamos os zeros:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 \cos(4x) = 0 \Leftrightarrow \cos(4x) = 0 \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo valores a k ($k = 0$ e $k = 1$) encontramos as duas soluções da equação que pertencem ao intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, ou seja $x = \frac{\pi}{8}$ e $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$

Estudando a variação do sinal de g' para relacionar com a monotonia de g , no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, vem:

x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$		\nearrow	Máx	\searrow	min	\nearrow	

Assim, no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, temos que:

- o valor do máximo de g é $g\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 + \sin\left(4 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + 1 = 3$
- o valor do mínimo de g é $g\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 2 + \sin\left(4 \times \frac{3\pi}{8}\right) = 2 + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 + (-1) = 1$
- g é crescente no intervalo $]0, \frac{\pi}{8}[$ e também no intervalo $\left[\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right[$
- g é decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right]$

Exame – 2008, 2ª Fase



67. Como $D_f = [-\pi, +\infty[$, só pode existir uma assíntota horizontal quando $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-4x+1}) = e^{-4(+\infty)+1} = e^{-\infty} = 0$$

Logo verifica-se que a reta de equação $y = 0$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f

Como a função é contínua em $] - \pi, 0[$ e em $]0, + \infty[$, por resultar de operações sucessivas entre funções contínuas, então as retas definidas por $x = -\pi$ e por $x = 0$ são as duas únicas retas verticais que podem ser assíntotas do gráfico de f :

$$\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} \frac{3 \operatorname{sen}(x)}{x^2} = \frac{3 \operatorname{sen}(-\pi)}{-\pi^2} = \frac{0}{-\pi^2} = 0$$

Ou seja, a reta de equação $x = -\pi$ não é uma assíntota do gráfico de f

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3 \operatorname{sen}(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{3}{x} \times \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x} \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}_{\text{Limite Notável}} = \frac{3}{0^-} \times 1 = -\infty \times 1 = -\infty$$

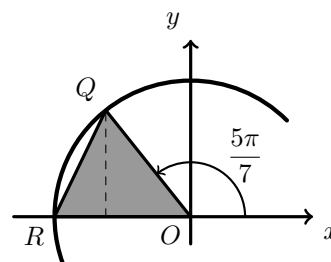
Assim, a reta de equação $x = 0$, é a única assíntota vertical do gráfico de f

Exame – 2008, 1ª Fase

68. Como o ponto Q está sobre um círculo trigonométrico, temos as coordenadas do ponto Q são $\left(\cos \frac{5\pi}{7}, \operatorname{sen} \frac{5\pi}{7} \right)$

Considerando o lado $[OR]$ como a base, a medida da altura é y_Q (a ordenada do ponto Q). E assim a área do triângulo pode ser calculada como:

$$A_{[OQR]} = \frac{\overline{OR} \times y_Q}{2} = \frac{1 \times \operatorname{sen} \frac{5\pi}{7}}{2} \approx 0,39$$



Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12º ano – 29.04.2008

69. Determinando a expressão da derivada e igualando a zero, temos:

$$f'(x) = (3 - 2 \cos x)' = (3)' - (2 \cos x)' = 0 - 2(-\operatorname{sen} x) = 2 \operatorname{sen} x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

No intervalo $[0, 2\pi]$ as três soluções são $x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$

Estudando a variação do sinal de f' para relacionar com a monotonia de f , no intervalo $[0, 2\pi]$, vem:

x	0		π		2π
$f'(x)$	0	+	0	-	0
$f(x)$	min	\longrightarrow	Máx	\longrightarrow	min

Logo, o valor x de para o qual $f(x)$ é máximo, é π

Resposta: **Opção C**

Exame – 2007, 2ª fase



70. Partindo da área do círculo menor temos:

$$\begin{array}{l|l}
 a = \pi r^2 & \Leftrightarrow A\sqrt{\cos \theta} = \pi r^2 \Leftrightarrow & \text{(porque } a = A\sqrt{\cos \theta}\text{)} \\
 & \Leftrightarrow \pi R^2\sqrt{\cos \theta} = \pi r^2 \Leftrightarrow & \text{(porque } A = \pi R^2\text{)} \\
 & \Leftrightarrow R^2\sqrt{\cos \theta} = r^2 \Leftrightarrow & \text{(dividindo ambos os membros por } \pi\text{)} \\
 & \Leftrightarrow (\sqrt[4]{2}r)^2\sqrt{\cos \theta} = r^2 \Leftrightarrow & \text{(porque } R = \sqrt[4]{2}r\text{)} \\
 & \Leftrightarrow \sqrt{2}r^2\sqrt{\cos \theta} = r^2 \Leftrightarrow & \\
 & \Leftrightarrow \sqrt{2} \times \sqrt{\cos \theta} = 1 \Leftrightarrow & \text{(dividindo ambos os membros por } r^2\text{)} \\
 & \Leftrightarrow \sqrt{\cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow & \text{(calculando o quadrado de ambos os membros)} \\
 & \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow & \\
 & \Leftrightarrow \cos \theta = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow & \\
 & \Leftrightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} &
 \end{array}$$

Logo $\theta = \frac{\pi}{3}$, porque $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Exame – 2007, 2ª fase

71.

71.1. Como a função h resulta de operações sucessivas de funções contínuas em \mathbb{R} , é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Como $-0,63 < 0 < 1,77$, ou seja, $h(0) < 0 < h(\frac{\pi}{2})$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tal que $h(a) = 0$, ou seja, que a função h tem, pelo menos, um zero em $]0, \frac{\pi}{2}[$.

C.A.

$$f'(x) = (e^{x-1})' = (x-1)'e^{x-1} = 1 \times e^{x-1} = e^{x-1}$$

$$g'(x) = (\sin x)' = \cos x$$

$$h(0) = f'(0) - g'(0) = e^{0-1} - \cos(0) = e^{-1} - 1 \approx -0,63$$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}-1} + \cos \frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}-1} + 0 \approx 1,77$$

71.2. Como ficou provado no item anterior, existe $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tal que $h(a) = 0$, logo

$$h(a) = 0 \Leftrightarrow f'(a) - g'(a) = 0 \Leftrightarrow f'(a) = g'(a)$$

Ou seja, existe $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tal que as derivadas de f e g nos pontos de abscissa a são iguais, ou seja, os declives das retas tangentes aos gráficos das funções f e g nos pontos de abscissa a são iguais, o que significa que essas retas são paralelas.

Exame – 2007, 1ª fase



72. Considerando o lado $[OC]$ como a base do triângulo ($\overline{OC} = 1$), a altura será o segmento que contém o ponto P e a sua projeção ortogonal (P') sobre a reta OC .

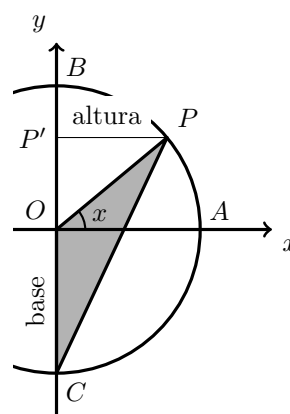
Como $\overline{OP} = 1$, recorrendo à definição de cosseno, vem:

$$\cos x = \frac{\overline{PP'}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{PP'}}{1} \Leftrightarrow \overline{PP'} = \cos x$$

Assim a área do triângulo $[OPC]$ é:

$$A_{[OPC]} = \frac{\overline{OC} \times \overline{PP'}}{2} = \frac{1 \times \cos x}{2} = \frac{\cos x}{2}$$

Resposta: **Opção B**



Exame – 2006, Ép. especial

73.

- 73.1. Como o período de uma função trigonométrica pode ser calculado como a diferença das abcissas de dois máximizantes consecutivos, começamos por determinar a derivada da função:

$$f'(x) = (A + B \cos(Cx))' = (A)' + B(\cos(Cx))' = 0 + B(Cx)'(-\sin(Cx)) = -BC \sin(Cx)$$

Calculando os zeros da derivada temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -BC \sin(Cx) = 0 \Leftrightarrow \sin(Cx) = 0 \Leftrightarrow Cx = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{C}, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, como todos os zeros de f' estão associados a uma mudança de sinal, para cada valor de k verificamos a existência de um maximizante, ou de um minimizante.

Como os maximizantes e os minimizantes ocorrem alternadamente, se um valor de k gera um maximizante, $k + 1$ gera um minimizante e $k + 2$ gera outro maximizante.

Logo, para k e $k + 2$ temos dois maximizantes (ou minimizantes) consecutivos, pelo que o período da função pode ser calculado como:

$$\frac{(k+2)\pi}{C} - \frac{k\pi}{C} = \frac{(k+2)\pi - k\pi}{C} = \frac{k\pi + 2\pi - k\pi}{C} = \frac{2\pi}{C}$$

- 73.2. Como o período da função é a diferença entre dois maximizantes consecutivos, e a distância do ancoradouro ao fundo do rio ocorre a cada maré alta, o período desta função é $12 - 0 = 12$.

Por outro lado, como o período desta função é $\frac{2\pi}{C}$ temos que:

$$\frac{2\pi}{C} = 12 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{12} = C \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} = C$$

Assim temos que a função a função é do tipo $f(x) = A + B \cos\left(\frac{\pi}{6} \times x\right)$

Como a distância ao fundo do rio era máxima às zero horas, e a distância máxima foi de 17 metros, temos que

$$f(0) = 17 \Leftrightarrow A + B \cos\left(\frac{\pi}{6} \times 0\right) = 17 \Leftrightarrow A + B \cos(0) = 17 \Leftrightarrow A + B \times 1 = 17 \Leftrightarrow A + B = 17$$

Por outro lado, como a distância era mínima às 6 horas, e o mínimo da função é 11, temos:

$$f(6) = 11 \Leftrightarrow A + B \cos\left(\frac{\pi}{6} \times 6\right) = 11 \Leftrightarrow A + B \cos(\pi) = 11 \Leftrightarrow A + B \times (-1) = 11 \Leftrightarrow A - B = 11$$

Logo, temos que

$$\begin{cases} A + B = 17 \\ A - B = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11 + B + B = 17 \\ A = 11 + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2B = 17 - 11 \\ A = 11 + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{6}{2} \\ A = 11 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 3 \\ A = 14 \end{cases}$$

Pelo que, os valores dos parâmetros adequados ao modelo são $A = 14$, $B = 3$ e $C = \frac{\pi}{6}$.

Exame – 2006, Ép. especial

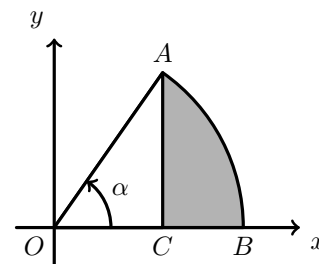


74. Como o arco BA é um arco de uma circunferência de raio 1, e com amplitude α , tem de comprimento α .

Como $\overline{OA} = 1$, e recorrendo às definições de seno e cosseno, vem:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\overline{AC}}{1} \Leftrightarrow \overline{AC} = \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{OC}}{1} \Leftrightarrow \overline{OC} = \cos \alpha$$



Logo, $\overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB} \Leftrightarrow 1 = \cos \alpha + \overline{CB} \Leftrightarrow \overline{CB} = 1 - \cos \alpha$

Assim, o perímetro da região sombreada é:

$$P = \alpha + \overline{AC} + \overline{CB} = \alpha + \sin \alpha + 1 - \cos \alpha = 1 + \alpha + \sin \alpha - \cos \alpha$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2006, 2ª Fase

75.

- 75.1. Como o *periélio* é o ponto da órbita da Terra mais próximo do Sol, é nesse ponto que a distância é mínima. Nesse ponto o ângulo x tem amplitude zero radianos, logo a distância mínima, em milhões de quilómetros arredondados às décimas, é:

$$d(0) = 149,6(1 - 0,0167 \cos 0) = 149,6(1 - 0,0167 \times 1) \approx 147,1$$

Analogamente, o ponto da órbita da Terra oposto ao *periélio* será o mais afastado do Sol, e é nesse ponto que a distância é máxima. Nesse ponto o ângulo x tem amplitude π radianos, logo a distância máxima, em milhões de quilómetros arredondados às décimas, é:

$$d(\pi) = 149,6(1 - 0,0167 \cos \pi) = 149,6(1 - 0,0167 \times (-1)) \approx 152,1$$

- 75.2. Se $x = \pi$, da relação $\frac{2\pi t}{T} = x - 0,0167 \sin x$ resulta:

$$\frac{2\pi t}{T} = \pi - 0,0167 \sin \pi \Leftrightarrow \frac{2\pi t}{T} = \pi - 0,0167 \times 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi t}{T} = \pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi \times T}{2\pi} \Leftrightarrow t = \frac{T}{2}$$

No contexto da situação descrita, quando o ângulo x tem uma amplitude de π radianos, o tempo (t) que decorreu da passagem da Terra pelo *periélio* é metade do tempo (T) que a Terra demora a descrever uma órbita completa.

Exame – 2006, 2ª Fase

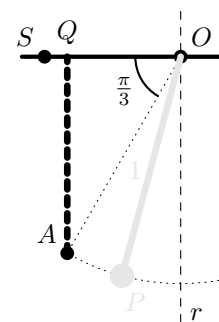
76.

- 76.1. No instante inicial ($t = 0$) a amplitude do ângulo SOP é dada por:

$$\alpha(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \cos(\sqrt{9,8} \times 0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \cos 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Assim, considerando o ponto Q , como a projeção ortogonal do ponto A sobre a reta OS , temos que a amplitude do ângulo QOA é $\frac{\pi}{3}$ radianos, e a distância do centro da esfera à reta OS é \overline{QA} . Logo:

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{QA}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{QA}}{1} \Leftrightarrow \overline{QA} = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \overline{QA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



76.2. Quando o ponto P passa na reta r temos $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Logo valor de t que corresponde ao instante em que o ponto P passa na reta r , pela primeira vez, é a menor solução positiva da equação $\alpha(t) = \frac{\pi}{2}$. Resolvendo a equação vem:

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \cos(\sqrt{9,8}t) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} \cos(\sqrt{9,8}t) = 0 \Leftrightarrow \cos(\sqrt{9,8}t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{9,8}t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{\sqrt{9,8}}, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, a menor solução positiva da equação corresponde a $k = 0$, ou seja, $t = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{9,8}} \approx 0,5$

Ou seja, o ponto P passa na reta r , pela primeira vez, aproximadamente, meio segundo depois do instante inicial.

Exame – 2006, 1ª Fase

77.

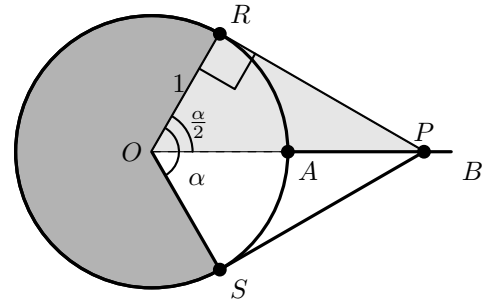
77.1. Como a reta PR é tangente à circunferência no ponto R , é perpendicular ao raio $[OR]$, ou seja o ângulo ORP é reto, e por isso o triângulo $[ORP]$ é retângulo.

Como o ângulo POR tem amplitude $\frac{\alpha}{2}$ radianos e $\overline{OR} = 1$, recorrendo à definição de tangente, temos:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{RP}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{RP}}{1} \Leftrightarrow \overline{RP} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

Logo, considerando $[OR]$ como a base do triângulo $[ORP]$ e $[RP]$ como a altura, vem:

$$A_{[ORP]} = \frac{\overline{OR} \times \overline{RP}}{2} = \frac{1 \times \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2}$$



Como os pontos R e S são simétricos relativamente à reta AB , temos que:

$$A_{[ORPS]} = A_{[ORP]} + A_{[OPS]} = 2 \times A_{[ORP]} = 2 \times \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

Ou seja, para cada valor de $\alpha \in]0, \pi[$, a área do quadrilátero $[ORPS]$ é dada por $f(\alpha)$

77.2.

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi^-} f(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \pi^-} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \frac{\pi^-}{2} = +\infty$$

Quando o ângulo α se aproxima arbitrariamente de π , as retas tangentes PR e PS , intersectam a reta AB num ponto arbitrariamente afastado de A , o que significa que as áreas dos triângulos $[ORP]$ e $[OPS]$, e conseqüentemente a área do quadrilátero $[ORPS]$, são arbitrariamente grandes.

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)

78.

78.1. O declive de uma reta tangente é dado pelo valor da derivada na abcissa do ponto de tangência.

Como $f'(x) = (\operatorname{sen} x)' = \cos x$, temos:

$$m_r = f'(a) = \cos a \quad \text{e} \quad m_s = f'(b) = \cos b$$

Como $a + b = 2\pi \Leftrightarrow a = 2\pi - b$, temos que:

$$m_r = f'(a) = \cos a = \cos(2\pi - b) = \cos(-b) = \cos(b) = f'(b) = m_s$$

Logo, as retas r e s têm declives iguais, ou seja, são paralelas.



78.2. Como o domínio da função g é $]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$, o gráfico de g não tem qualquer assíntota não vertical.

Como a função g resulta do quociente de duas funções contínuas, é contínua no seu domínio, isto é, as retas $x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$ são as três únicas retas que podem ser assíntotas verticais do gráfico de g .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

(limite notável)

Logo, a reta $x = 0$ **não é** uma assíntota vertical do gráfico de g

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pi^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{x}{\sin x} = \frac{\pi^-}{\sin(\pi^-)} = \frac{\pi^-}{0^+} = +\infty$$

Logo, a reta $x = \pi$ **é** uma assíntota vertical do gráfico de g

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} \frac{x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} \frac{x}{\sin x} = \frac{2\pi^-}{\sin(2\pi^-)} = \frac{2\pi^-}{0^-} = -\infty$$

Logo, a reta $x = 2\pi$ **é** uma assíntota vertical do gráfico de g

Assim, o gráfico de g tem exatamente duas assíntotas: as retas verticais $x = \pi$ e $x = 2\pi$

Exame – 2005, 2ª Fase (cód. 435)

79. Recorrendo à definição de derivada no ponto de abscissa π , temos que:

$$f'(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x - \cos \pi}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x - (-1)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2005, 1ª fase (cód. 435)

80. Como $\overline{OB} = 3$, recorrendo à definição de seno e cosseno temos:

$$\sin x = \frac{\overline{OI}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\overline{OI}}{3} \Leftrightarrow \overline{OI} = 3 \sin x$$

$$\cos x = \frac{\overline{BI}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{BI}}{3} \Leftrightarrow \overline{BI} = 3 \cos x$$

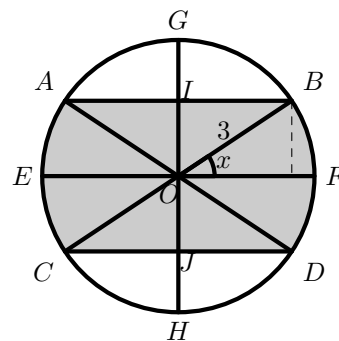
Recorrendo à decomposição sugerida na figura temos que a área da zona sombreada pode ser obtida através da soma das áreas de 4 triângulos congruentes e de 4 setores circulares de raio 3 e amplitude x :

$$A = 4 \times A_{[OIB]} + 4 \times A_{\text{setor } FB} = 4 \times \frac{\overline{OI} \times \overline{BI}}{2} + 4 \times \frac{x \times \overline{OB}^2}{2} = 4 \times \frac{3 \sin x \times 3 \cos x}{2} + 4 \times \frac{x \times 3^2}{2} =$$

$$= 2 \times 9 \sin x \cdot \cos x + 2 \times x \times 9 = 18x + 18 \sin x \cdot \cos x = 18(x + \sin x \cdot \cos x)$$

Logo, para cada valor de $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, a área da região sombreada é dada pela função A .

Exame – 2005, 1ª Fase (cód. 435)



81.

81.1. Substituindo os valores de λ e ϕ na fórmula, vem:

$$\begin{aligned} \cos(7,5t) &\approx -\frac{\operatorname{tg} 38}{\operatorname{tg} 66,5} \Leftrightarrow \cos(7,5t) \approx -0,3397 \Leftrightarrow 7,5t \approx \cos^{-1}(-0,3397) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 7,5t \approx 109,8594 \Leftrightarrow t \approx \frac{109,8594}{7,5} \Leftrightarrow t \approx 14,6479 \end{aligned}$$

Logo, convertendo 0,6479 horas em minutos vem $0,6479 \times 60 \approx 38,8750 \approx 39$

Ou seja, em Beja, no Solstício de Junho, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol é de 14 horas e 39 minutos.

81.2. Como ϕ é a latitude do círculo polar ártico, para locais situados mais a norte, $\lambda > \phi$, e logo $\operatorname{tg} \lambda > \operatorname{tg} \phi$ (porque $\lambda \in]66,5^\circ, 90^\circ[$ e $\phi \approx 66,5$).

Assim, para locais situados a norte do círculo polar ártico, $\frac{\operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{tg} \phi} > 1 \Leftrightarrow -\frac{\operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{tg} \phi} < -1$

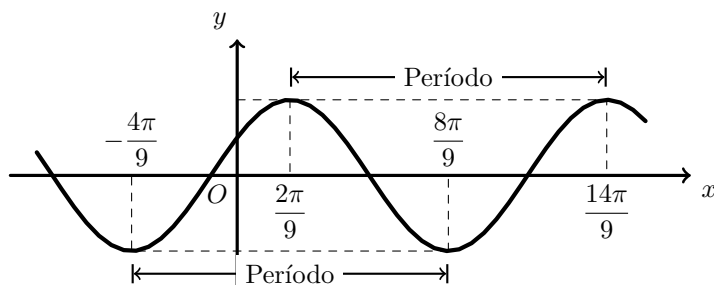
Logo a substituição dos valores na fórmula $\cos(7,5t) \approx -\frac{\operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{tg} \phi}$ resultaria numa equação impossível, porque $\cos(x) \geq -1$

Exame – 2004, Ép. especial (cód. 435)

82. O período (P) da função pode ser calculado, por exemplo, como a distância entre dois maximizantes consecutivos.

$$P = \frac{14\pi}{9} - \frac{2\pi}{9} = \frac{12\pi}{9} = \frac{4\pi}{3}$$

Resposta: **Opção D**



Exame – 2004, 2ª Fase (cód. 435)

83.

83.1. Os instantes em que as duas bolas estiveram a igual distância da base do recipiente, durante os primeiros cinco segundos, são as soluções da equação $b(t) = p(t)$ que pertencem ao intervalo $[0,5]$. Assim, resolvendo a equação, vem:

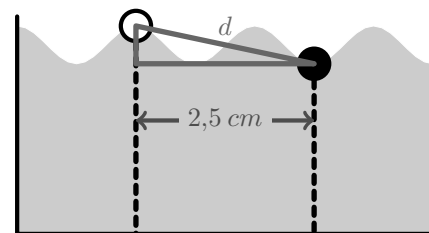
$$\begin{aligned} b(t) = p(t) &\Leftrightarrow 10 + e^{-0,1t} \operatorname{sen}(\pi t) = 10 - 1,37e^{-0,1t} \operatorname{sen}(\pi t) \Leftrightarrow e^{-0,1t} \operatorname{sen}(\pi t) = -1,37e^{-0,1t} \operatorname{sen}(\pi t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{-0,1t} \operatorname{sen}(\pi t) + 1,37e^{-0,1t} \operatorname{sen}(\pi t) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(\pi t)(e^{-0,1t} + 1,37e^{-0,1t}) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen}(\pi t) = 0 \vee \underbrace{e^{-0,1t}(1 + 1,37)}_{\text{(equação impossível)}} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(\pi t) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \pi t = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Logo as soluções da equação no intervalo $[0,5]$ são $x = 0$ (para $k = 0$), $x = 1$ (para $k = 1$), $x = 2$ (para $k = 2$), $x = 3$ (para $k = 3$), $x = 4$ (para $k = 4$) e $x = 5$ (para $k = 5$), ou seja, neste intervalo a equação tem 6 soluções, o que significa que nos primeiros 5 segundos, as duas bolas estiveram a igual distância da base do recipiente por **seis vezes**.



- 83.2. A distância d entre os centros das bolas, é o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo em que o cateto maior tem comprimento $2,5 \text{ cm}$ e o cateto menor tem comprimento $|b(\frac{1}{2}) - p(\frac{1}{2})|$

Assim, determinando a diferença das distâncias das duas bolas à base do recipiente, passado meio segundo, temos:



$$b\left(\frac{1}{2}\right) = 10 + e^{-0,1 \times \frac{1}{2}} \operatorname{sen}\left(\pi \times \frac{1}{2}\right) = 10 + e^{-0,05} \times 1 \approx 10,95$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 10 - 1,37e^{-0,1 \times \frac{1}{2}} \operatorname{sen}\left(\pi \frac{1}{2}\right) = 10 - 1,37e^{-0,05} \times 1 \approx 8,70$$

Como $b(\frac{1}{2}) - p(\frac{1}{2}) \approx 10,95 - 8,70 \approx 2,25$, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, vem:

$$d^2 = 2,25^2 + 2,5^2 \Leftrightarrow d^2 = 11,3125 \Leftrightarrow d = \sqrt{11,3125} \Rightarrow d \approx 3,4$$

Logo a distância, arredondada às décimas, entre os centros das duas bolas, passado meio segundo é de $3,4 \text{ cm}$

Exame – 2004, 2ª Fase (cód. 435)

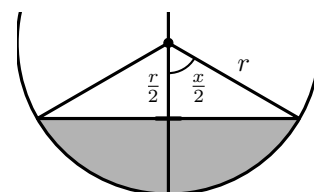
84.

- 84.1. Se o depósito ficar completamente cheio, $x = 2\pi$, logo podemos calcular a capacidade total do depósito, calculando a imagem de 2π :

$$V(2\pi) = 80(2\pi - \operatorname{sen}(2\pi)) = 80(2\pi - 0) \approx 502,655 \approx 503$$

Ou seja, o depósito tem uma capacidade de 503 m^3 , aproximadamente.

- 84.2. Como $\frac{1}{4}$ da altura máxima, corresponde a metade do raio; considerando o ângulo de amplitude $\frac{x}{2}$ e recorrendo à definição de cosseno, vem



$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\frac{r}{2}}{r} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{r}{2r} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in [0, 2\pi]$, a única solução da equação é $x = \frac{2\pi}{3}$.

Assim, o volume associado é:

$$V\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 80\left(\frac{2\pi}{3} - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 80\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 98,2696 \approx 98$$

Ou seja, quando nível de combustível está a $\frac{1}{4}$ da altura máxima, o volume é de 98 m^3 , aproximadamente.

Exame – 2004, 1ª Fase (cód. 435)

85.



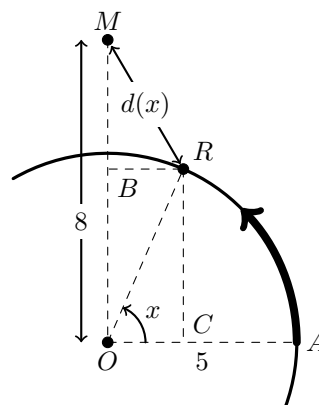
85.1. Como $\overline{OR} = 5$, recorrendo à definição de seno e cosseno, e notando que $\overline{CR} = \overline{OB}$ e ainda que $\overline{OC} = \overline{BR}$, temos:

$$\sin x = \frac{\overline{CR}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\overline{CR}}{5} \Leftrightarrow \overline{CR} = 5 \sin x \Leftrightarrow \overline{OB} = 5 \sin x$$

$$\cos x = \frac{\overline{OC}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{OC}}{5} \Leftrightarrow \overline{OC} = 5 \cos x \Leftrightarrow \overline{BR} = 5 \cos x$$

Temos ainda que:

$$\overline{OB} + \overline{BR} = 8 \Leftrightarrow \overline{BR} = 8 - \overline{OB} \Leftrightarrow \overline{BR} = 8 - 5 \sin x$$



Logo, usando o Teorema de Pitágoras, vem:

$$\begin{aligned} \overline{RM}^2 &= \overline{BM}^2 + \overline{BR}^2 \Leftrightarrow \overline{RM}^2 = (8 - 5 \sin x)^2 + (5 \cos x)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{RM}^2 &= 64 - 80 \sin x + 25 \sin^2 x + 25 \cos^2 x \Leftrightarrow \overline{RM}^2 = 64 - 80 \sin x + 25(\sin^2 x + \cos^2 x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{RM}^2 &= 64 - 80 \sin x + 25(1) \Leftrightarrow \overline{RM}^2 = 64 + 25 - 80 \sin x \Leftrightarrow \overline{RM}^2 = 89 - 80 \sin x \end{aligned}$$

Logo, para cada valor de x , $d(x) = \overline{RM} = \sqrt{89 - 80 \sin x}$

85.2.

$$d\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{89 - 80 \sin \frac{\pi}{2}} = \sqrt{89 - 80 \times 1} = \sqrt{9} = 3$$

Ou seja, quando o ângulo x tem amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos, a distância entre a Rita e a mãe, é de 3 metros, o que se pode comprovar na figura, porque quando o ângulo x tem amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos, a posição da Rita está sobre o segmento de reta $[MO]$, e por isso

$$\overline{RM} = \overline{OM} - \overline{OR} \Leftrightarrow \overline{RM} = 8 - 5 \Leftrightarrow \overline{RM} = 3$$

Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)

86. Calculando a área do trapézio, temos:

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{AB} = \frac{30 + 10}{2} \times 10 = 20 \times 10 = 200$$

Logo, dividir o trapézio em duas figuras com a mesma área, significa que o triângulo $[APD]$ terá área 100.

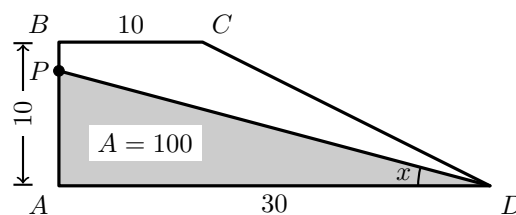
Usando a definição de tangente vem:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{PA}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{PA}}{30} \Leftrightarrow \overline{PA} = 30 \operatorname{tg} x$$

$$\text{Logo a área do triângulo } [APD], \text{ é: } A_{[APD]} = \frac{\overline{AD} \times \overline{PA}}{2} = \frac{30 \times 30 \operatorname{tg} x}{2} = \frac{30^2 \operatorname{tg} x}{2}$$

$$\text{Ou seja, } A_{[APD]} = 100 \Leftrightarrow \frac{30^2 \operatorname{tg} x}{2} = 100$$

Resposta: **Opção B**



Exame – 2003, 2ª Fase (cód. 435)



87.

87.1.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{sen} x - (0 + \operatorname{sen} 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{sen} x - 0}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{x} + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

(limite notável)

87.2. Para estudar o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da primeira derivada e depois da segunda derivada:

$$f'(x) = (x + \operatorname{sen} x)' = (x)' + (\operatorname{sen} x)' = 1 + \cos x$$

$$f''(x) = (f'(x))' = (1 + \cos x)' = (1)' + (\cos x)' = 0 + (-\operatorname{sen} x) = -\operatorname{sen} x$$

Determinando os zeros da segunda derivada, vem:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo as duas soluções da equação que pertencem ao domínio da função $\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right)$ são $x = 0$ e $x = \pi$, e assim, estudando a variação de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f , vem:

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		π		$\frac{3\pi}{2}$
$f''(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$			Pt. I.		Pt. I.		

Logo o gráfico de f tem:

- a concavidade voltada para cima no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0 \right[$ e no intervalo $\left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right]$
- a concavidade voltada para baixo no intervalo $]0, \pi[$
- 2 pontos de inflexão de abscissas $x = 0$ e $x = \pi$

87.3.

$$\begin{aligned} f(x) = x + \cos x \Leftrightarrow x + \operatorname{sen} x = x + \cos x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \cos x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Logo os dois valores de $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$ que verificam a condição dada, são $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5\pi}{4}$

Exame – 2003, 2ª Fase (cód. 435)

88.

88.1. Como $a = 2$ e $b = -5$, temos que $f(x) = 2 - 5 \operatorname{sen}^2 x$

- Como $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ e $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2}$, vem:

$$\left(\frac{1}{2} \right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{\frac{5}{4}} \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{4}{5}$$

- Como $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ e $\cos^2 \theta = \frac{4}{5}$, vem:

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \frac{4}{5} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \frac{4}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{5}{5} - \frac{4}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1}{5}$$

Logo, $f(\theta) = 2 - 5 \operatorname{sen}^2 \theta = 2 - 5 \left(\frac{1}{5} \right) = 2 - 1 = 1$



88.2. Como $x = 0$ é um maximizante e 1 é o máximo, temos que:

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow a + b \operatorname{sen}^2(0) = 1 \Leftrightarrow a + b \times 0 = 1 \Leftrightarrow a = 1$$

Como 0 e π são dois maximizantes consecutivos, $x = \frac{\pi}{2}$ é um minimizante, -3 é o mínimo e $a = 1$, temos que:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3 \Leftrightarrow 1 + b \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3 \Leftrightarrow 1 + b \times (1)^2 = -3 \Leftrightarrow b = -3 - 1 \Leftrightarrow b = -4$$

Logo $a = 1$ e $b = -4$

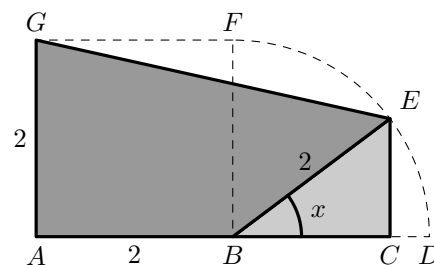
Exame – 2003, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 435)

89.

89.1. Considerando o triângulo $[BCE]$, e recorrendo à definição de seno e cosseno, temos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{CE}}{\overline{BE}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{CE}}{2} \Leftrightarrow \overline{CE} = 2 \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{cos} x = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} \Leftrightarrow \operatorname{cos} x = \frac{\overline{BC}}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = 2 \operatorname{cos} x$$



Logo, considerando a área da zona sombreada como a diferença das áreas do trapézio $[ACEG]$ e do triângulo $[BCE]$, temos:

$$\begin{aligned} A_{[ABEG]} &= A_{[ACEG]} - A_{[BCE]} = \frac{\overline{AG} + \overline{CE}}{2} \times \overline{AC} - \frac{\overline{BC} \times \overline{CE}}{2} = \frac{2 + 2 \operatorname{sen} x}{2} \times (2 + \overline{BC}) - \frac{2 \operatorname{cos} x \times 2 \operatorname{sen} x}{2} = \\ &= (1 + \operatorname{sen} x) \times (2 + 2 \operatorname{cos} x) - \frac{4 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x}{2} = 2 + 2 \operatorname{cos} x + 2 \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x - 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x = \\ &= 2 + 2 \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{cos} x = 2(1 + \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x) \end{aligned}$$

Logo, para cada valor de $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, a área do polígono $[ABEG]$ é dada por $A(x) = 2(1 + \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x)$

89.2. • $A(0) = 2(1 + \operatorname{sen}(0) + \operatorname{cos}(0)) = 2(1 + 0 + 1) = 2 \times 2 = 4$
O que também pode ser observado na figura, porque se $x = 0$, o ponto E coincide com o ponto D , e por isso a área sombreada também pode ser calculada como a área do triângulo $[AGD]$:

$$A_{[AGD]} = \frac{\overline{AG} \times \overline{AD}}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 4$$

• $A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(2(1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2}\right))\right) = 2(1 + 1 + 0) = 2 \times 2 = 4$
O que também pode ser observado na figura, porque se $x = \frac{\pi}{2}$, o ponto E coincide com o ponto F , e por isso a área sombreada também pode ser calculada como a área do quadrado $[ABFG]$:

$$A_{[ABFG]} = \overline{AB} \times \overline{AG} = 2 \times 2 = 4$$

Exame – 2003, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)



90.

90.1. Como a área da superfície terrestre é dada por $A_{Esfera} = 4\pi r^2$, logo $\frac{1}{4}A_{Esfera} = \frac{4\pi r^2}{4} = \pi r^2$. Assim, pretendemos determinar o valor de θ tal que:

$$\begin{aligned} f(\theta) = \pi r^2 &\Leftrightarrow 2\pi r^2(1 - \text{sen } \theta) = \pi r^2 \Leftrightarrow 1 - \text{sen } \theta = \frac{\pi r^2}{2\pi r^2} \Leftrightarrow 1 - \text{sen } \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\text{sen } \theta = \frac{1}{2} - 1 \Leftrightarrow -\text{sen } \theta = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{sen } \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{sen } \theta = \text{sen } \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \theta = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

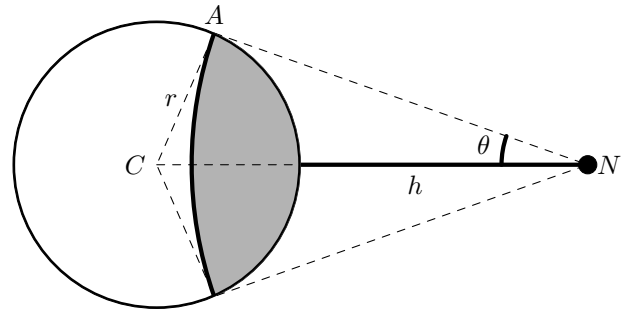
Como $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, a única solução da equação é $\theta = \frac{\pi}{6}$

Ou seja, para que a superfície visível da nave seja um quarto da superfície terrestre, o ângulo θ deve ter amplitude de $\frac{\pi}{6}$ radianos.

90.2. Considerando o triângulo $[CAN]$, e a definição de seno, vem:

$$\text{sen } \theta = \frac{\overline{CA}}{\overline{CN}} \Leftrightarrow \text{sen } \theta = \frac{r}{r+h}$$

Logo, determinando a área visível a partir da nave, em função de h , vem:



$$g(h) = f(\theta) = 2\pi r^2(1 - \text{sen } \theta) = 2\pi r^2 \left(1 - \frac{r}{r+h}\right) = 2\pi r^2 \left(\frac{r+h}{r+h} - \frac{r}{r+h}\right) = 2\pi r^2 \left(\frac{h}{r+h}\right) = \frac{2\pi r^2 h}{r+h}$$

90.3.

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} g(h) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{2\pi r^2 h}{r+h} = 2\pi r^2 \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{h}{r+h} = 2\pi r^2 \frac{\lim_{h \rightarrow +\infty} h}{\lim_{h \rightarrow +\infty} (r+h)} = 2\pi r^2 \frac{\lim_{h \rightarrow +\infty} h}{\lim_{h \rightarrow +\infty} h} = 2\pi r^2 \times 1 = 2\pi r^2$$

Logo, quando a distância da nave à Terra é arbitrariamente grande, a área da superfície terrestre visível da nave, aproxima-se de $2\pi r^2$, ou seja, de metade da área total da superfície da Terra.

Exame - 2002, Prova para militares (cód. 435)

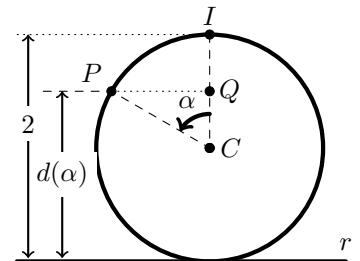
91. Considerando o ponto I como a posição inicial do ponto P , e o ponto Q como a projeção ortogonal do ponto P sobre a reta IC , pela definição de cosseno vem:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{CQ}}{\overline{CP}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{CQ}}{1} \Leftrightarrow \overline{CQ} = \cos \alpha$$

Como $\overline{CQ} + \overline{QI} = 1 \Leftrightarrow \overline{QI} = 1 - \overline{CQ} \Leftrightarrow \overline{QI} = 1 - \cos \alpha$, temos que:

$$\begin{aligned} d(\alpha) = 2 - \overline{QI} &\Leftrightarrow d(\alpha) = 2 - (1 - \cos \alpha) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d(\alpha) = 2 - 1 + \cos \alpha \Leftrightarrow d(\alpha) = 1 + \cos \alpha \end{aligned}$$

Resposta: **Opção A**



Exame - 2002, 2ª fase (cód. 435)



92. Considerando o ponto P como intersecção da reta AB com o eixo Ox e usando a definição de seno e cosseno temos que:

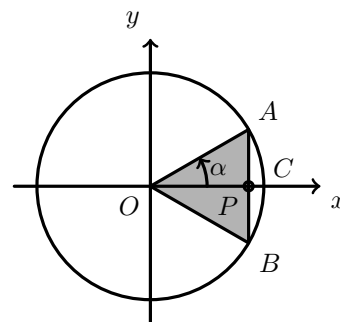
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{AP}}{1} \Leftrightarrow \overline{AP} = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \operatorname{cos} \alpha = \frac{\overline{OP}}{1} \Leftrightarrow \overline{OP} = \operatorname{cos} \alpha$$

Assim, considerando $[AB]$ como a base e $[OP]$ como a altura, a área do triângulo $[OAB]$ é:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{OP}}{2} = \frac{2 \times \overline{AP} \times \overline{OP}}{2} = \overline{AP} \times \overline{OP} = \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \alpha$$

Resposta: **Opção A**



Exame – 2002, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 435)

93.

93.1. Como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ é a definição de derivada no ponto de abscissa 0, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 0 + 2 \operatorname{cos}(0) = 2 \times 1 = 2$$

93.2. Para estudar o sentido das concavidades, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$f''(x) = (f'(x))' = (x + 2 \operatorname{cos} x)' = (x)' + (2 \operatorname{cos} x)' = 1 + 2(\operatorname{cos} x)' = 1 + 2(-\operatorname{sen} x) = 1 - 2 \operatorname{sen} x$$

Determinando os zeros da segunda derivada vem:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow -2 \operatorname{sen} x = -1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como o domínio de f (e portanto também de f'') é $[-\pi, \pi]$, as únicas soluções da equação, ou seja os únicos zeros da derivada, são: $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$, e assim, estudando a variação de sinal de f'' para o relacionar com o sentido das concavidades do gráfico de f , vem:

x	$-\pi$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f''(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$			Pt. I.		Pt. I.		

Logo o gráfico de f tem:

- a concavidade voltada para cima no intervalo $[-\pi, \frac{\pi}{6}]$ e no intervalo $[\frac{5\pi}{6}, \pi]$
- a concavidade voltada para baixo no intervalo $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$
- 2 pontos de inflexão de abscissas $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$

Exame – 2002, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 435)



94.

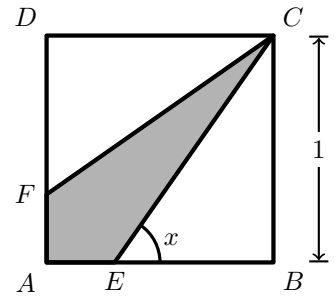
94.1. Usando as definições de seno e tangente, vem:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{\overline{EC}} \Leftrightarrow \overline{EC} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BC}}{\overline{EB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\overline{EB}} \Leftrightarrow \overline{EB} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Sabemos ainda que

$$\overline{AE} + \overline{EB} = 1 \Leftrightarrow \overline{AE} = 1 - \overline{EB} \Leftrightarrow \overline{AE} = 1 - \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$



Assim, como $\overline{FC} = \overline{EC}$ e $\overline{AF} = \overline{AE}$, calculando o perímetro do quadrilátero $[CEAF]$, vem:

$$P_{[CEAF]} = 2 \times \overline{AE} + 2 \times \overline{EC} = 2 \times \left(1 - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) + 2 \times \frac{1}{\operatorname{sen} x} = 2 - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{\operatorname{sen} x}$$

Ou seja, para cada valor de $x \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$ o perímetro do quadrilátero é dado pela função f

94.2.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(2 - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} 2 - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2}{\operatorname{sen} x} = 2 - \frac{2}{+\infty} + \frac{2}{1} = 2 - 0 + 2 = 4$$

Ou seja, quando o ângulo x toma valores arbitrariamente próximos de $\frac{\pi}{2}$, o perímetro do quadrilátero é 4, porque, como se pode ver na figura, quando $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$, a posição do ponto E é praticamente coincidente com o ponto B , ou seja o quadrilátero $[CEAF]$, praticamente coincide com o quadrado $[ABCD]$, que tem perímetro 4.

94.3.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (f(x))' = \left(2 - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{\operatorname{sen} x}\right)' = (2)' - \left(\frac{2}{\operatorname{tg} x}\right)' + \left(\frac{2}{\operatorname{sen} x}\right)' = 0 - \frac{-2(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{-2(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x} = \\ &= \frac{2 \times \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} - \frac{2 \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{2 \times 1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{2 \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{2 - 2 \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \end{aligned}$$

No domínio da função f (e de $f'(x)$), ou seja no intervalo $\left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$, temos que:

- $\cos x < 1 \Leftrightarrow 2 \cos x < 2 \Leftrightarrow -2 \cos x > -2 \Leftrightarrow 2 - 2 \cos x > -2 + 2 \Leftrightarrow 2 - 2 \cos x > 0$
- $\operatorname{sen} x > 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x > 0$
- Logo, o quociente $\frac{2 - 2 \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} > 0$, ou seja a $f'(x) > 0$

Assim, podemos concluir que a função f é estritamente crescente.

Exame – 2002, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

- 95.
- a expressão $f(x) = x^2$ **não pode ser** porque $f(0) = 0$, ou seja esta função tem um zero
 - a expressão $f(x) = e^x$ **não pode ser** porque não é par, por exemplo $f(1) \neq f(-1)$
 - a expressão $f(x) = \cos x$ **não pode ser** porque tem um número infinito de zeros: se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, temos que $f(x) = 0$

A função $f(x) = \pi$ é uma função constante, não nula, por isso não tem zeros e $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \pi = f(-x)$, ou seja, é uma função par, porque objetos simétricos têm a mesma imagem.

Resposta: **Opção D**

Exame – 2001, Prova para militares (cód. 435)



96.

- 96.1. Para estudar a existência de assíntotas não verticais, vamos averiguar a existência de um valor finito para o declive da assíntota, como o domínio é \mathbb{R}^+ :

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{\pi}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{x}}{x} = 1 + \frac{\pi}{+\infty} = 1 + \frac{\pi}{+\infty} = 1 + \frac{\text{sen}(0^+)}{+\infty} = 1 + \frac{0^+}{+\infty} = 1 + 0^+ = 1$$

Averiguando a existência de um valor finito para a aordenada da origem da assíntota, vem:

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{\pi}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{x} \right) = \frac{\pi}{+\infty} = \text{sen}(0^+) = 0$$

Logo a reta de equação $y = 1 \times x + 0$, ou seja $y = x$ é a única assíntota não vertical do gráfico de f

- 96.2. Para determinar o declive da reta tangente ao gráfico, começamos por determinar a expressão da derivada da função:

$$f'(x) = (f(x))' = \left(x + \frac{\pi}{x} \right)' = (x)' + \left(\frac{\pi}{x} \right)' = 1 + \left(\frac{0 - (x)' \pi}{x^2} \right) \cos \frac{\pi}{x} = 1 - \frac{\pi}{x^2} \cos \frac{\pi}{x}$$

Logo o valor do declive da reta tangente ao gráfico de f , no ponto de abcissa 2, pode ser calculado como:

$$m_r = f'(2) = 1 - \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{4} \cos 0 = 1 - \frac{\pi}{4} \times 0 = 1 - 0 = 1$$

Para determinar as coordenadas do ponto de abcissa 2, que pertence ao gráfico da função e à reta tangente, simultaneamente, calculamos:

$$f(2) = 2 + \frac{\pi}{2} = 2 + 1 = 3$$

Logo a reta tangente é da forma $y = 1 \times x + b$ e contém o ponto P , de coordenadas $P(2,3)$, pelo que:

$$y_P = x_P + b \Leftrightarrow 3 = 2 + b \Leftrightarrow 3 - 2 = b \Leftrightarrow b = 1$$

Ou seja, a equação da reta tangente ao gráfico de f , no ponto de abcissa 2 é $y = x + 1$

- 96.3. Os zeros da função são as soluções da equação $f(x) = 0$, resolvendo a equação vem:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{x} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{x}$$

Como $\text{sen} \frac{\pi}{x} \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\text{sen} \frac{\pi}{x} \geq -1 \Leftrightarrow -\text{sen} \frac{\pi}{x} \leq 1$$

Assim, para valores de $x \in]1, +\infty[$, ou seja, para $x > 1$, a equação $x = -\text{sen} \frac{\pi}{x}$ não tem soluções, o que significa que a função não tem zeros no intervalo $]1, +\infty[$

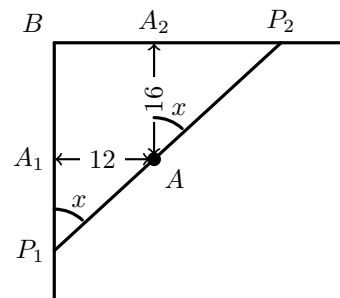
Exame – 2001, Prova para militares (cód. 435)

97.

- 97.1. Considerando A_1 e A_2 as projeções ortogonais do ponto sobre as retas BP_1 e BP_2 , respetivamente, temos que o ângulo A_2AP_2 também tem amplitude x , pelo que recorrendo às definições de seno e cosseno temos:

$$\text{sen } x = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{AP_1}} \Leftrightarrow \text{sen } x = \frac{12}{\overline{AP_1}} \Leftrightarrow \overline{AP_1} = \frac{12}{\text{sen } x}$$

$$\text{cos } x = \frac{\overline{AA_2}}{\overline{AP_2}} \Leftrightarrow \text{cos } x = \frac{16}{\overline{AP_2}} \Leftrightarrow \overline{AP_2} = \frac{16}{\text{cos } x}$$



Calculando o comprimento da ponte (c), em função de x , vem:

$$c(x) = \overline{AP_2} + \overline{AP_1} = \frac{16}{\text{cos } x} + \frac{12}{\text{sen } x} = \frac{16 \text{sen } x}{\text{cos } x \cdot \text{sen } x} + \frac{12 \text{cos } x}{\text{sen } x \cdot \text{cos } x} = \frac{16 \text{sen } x + 12 \text{cos } x}{\text{sen } x \cdot \text{cos } x}$$



97.2. Se $\overline{BP_1} = \overline{BP_2}$, o triângulo $[P_1BP]$ é um triângulo retângulo isósceles, ou seja os ângulos agudos são iguais, e por isso, têm amplitude $\frac{\pi}{4}$ radianos.

Assim, calculando o comprimento da ponte, vem:

$$c\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{16 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + 12 \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{16 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{28 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2}{4}} = 28\sqrt{2} \approx 39,6$$

Ou, seja, se o vértice a ponte for construída entre dois pontos equidistantes do vértice B , terá um comprimento aproximado de 39,6 metros.

Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)

98.

98.1. Como o domínio da função é $] -\pi, \pi[$, e f resulta de operações sucessivas entre funções contínuas, também é contínua, logo as retas $x = -\pi$ e $x = \pi$ são as únicas retas que podem ser assíntotas do gráfico de f .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^-} \frac{\cos x}{1 + \cos x} = \frac{\cos(-\pi)}{1 + \cos(-\pi)} = \frac{-1^+}{1 + (-1^+)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Logo, a reta $x = -\pi$ é efetivamente uma assíntotavertical do gráfico de f

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\cos x}{1 + \cos x} = \frac{\cos \pi}{1 + \cos \pi} = \frac{-1^+}{1 + (-1^+)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Assim, a reta $x = \pi$ também é uma assíntota vertical do gráfico de f

98.2. Para estudar a existência de extremos da função, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\cos x}{1 + \cos x} \right)' = \frac{(\cos x)'(1 + \cos x) - (\cos x)(1 + \cos x)'}{(1 + \cos x)^2} = \\ &= \frac{-\operatorname{sen} x(1 + \cos x) - (\cos x)(0 - \operatorname{sen} x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{-\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{-\operatorname{sen} x}{(1 + \cos x)^2} \end{aligned}$$

Para provar a existência de um maximizante, vamos determinar os zeros da derivada:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-\operatorname{sen} x}{(1 + \cos x)^2} = 0 \Leftrightarrow -\operatorname{sen} x = 0 \wedge \underbrace{(1 + \cos x)^2 \neq 0}_{\text{(PV, } \cos x \neq -1, \forall x \in] -\pi, \pi[)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou seja, no domínio da função (o intervalo $] -\pi, \pi[$), a única solução da equação $f'(x) = 0$, é $x = 0$, pelo que podemos estudar a variação do sinal de f' para relacionar com a monotonia de f :

x	$-\pi$		0		π
$f'(x)$	n.d.	+	0	-	n.d.
$f(x)$	n.d.	\nearrow	Máx	\searrow	n.d.

Assim:

$$f(0) = \frac{\cos 0}{1 + \cos 0} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Logo, a função f só tem um máximo, cujo valor é $\frac{1}{2}$



98.3. A medida da base maior do trapézio ($\overline{OP} = x_P$), como P pertence ao semi-eixo-positivo Ox , é a solução positiva da equação:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{1 + \cos x} = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \wedge \underbrace{1 + \cos x \neq 0}_{(PV, \cos x \neq -1, \forall x \in]-\pi, \pi[)} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, a única solução positiva do intervalo $]-\pi, \pi[$, é $\frac{\pi}{2}$, ou seja, $\overline{OP} = x_P = \frac{\pi}{2}$

A medida da base menor do trapézio ($\overline{RQ} = x_Q$), como Q está sobre a reta de equação $y = \frac{1}{3}$, é a solução positiva da equação:

$$f(x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\cos x}{1 + \cos x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3 \cos x = 1 + \cos x \wedge \underbrace{1 + \cos x \neq 0}_{(PV, \cos x \neq -1, \forall x \in]-\pi, \pi[)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cos x - \cos x = 1 \Leftrightarrow 2 \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, a única solução positiva do intervalo $]-\pi, \pi[$, é $\frac{\pi}{3}$, ou seja, $\overline{QR} = x_Q = \frac{\pi}{3}$

Assim, calculando a área do trapézio, vem:

$$A_{[OPQR]} = \frac{\overline{RQ} + \overline{OP}}{2} \times \overline{OR} = \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{\frac{2\pi}{6} + \frac{3\pi}{6}}{6} = \frac{5\pi}{36}$$

Exame - 2001, 2ª fase (cód. 435)

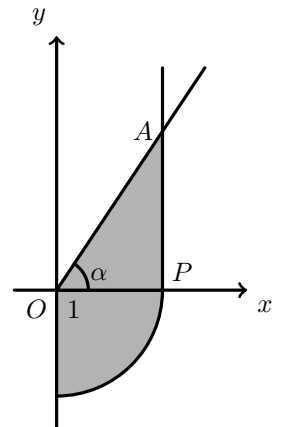
99. Designando o ponto $(1,0)$ por P e recorrendo à definição de tangente, temos que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AP}}{1} \Leftrightarrow \overline{AP} = \operatorname{tg} \alpha$$

Logo, podemos calcular a área da região sombreada, como a soma do quarto de círculo de raio 1, com a área do triângulo $[OPA]$:

$$A = \frac{A_o}{4} + A_{[OPA]} = \frac{\pi \times 1^2}{4} + \frac{\overline{OP} \times \overline{AP}}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1 \times \operatorname{tg} \alpha}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$$

Resposta: **Opção A**



Exame - 2001, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 435)



100.

100.1. Como A e B são pontos cujas ordenadas são extremos da função, começamos por determinar a expressão da derivada, e calcular os zeros:

$$f'(x) = (x + 2 \cos x)' = (x)' + 2(\cos x)' = 1 + 2(-\sin x) = 1 - 2 \sin x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \sin x = 0 \Leftrightarrow -2 \sin x = -1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, as únicas soluções da equação do intervalo $[0, 2\pi]$, ou seja as duas únicas soluções da equação são $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$, pelo que podemos provar que são maximizantes ou minimizantes, pelo estudo do sinal da derivada para relacionar com a monotonia da função:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		\nearrow	Máx	\searrow	min	\nearrow	

Logo, como a ordenada do ponto A é um máximo, e a ordenada do ponto B é um mínimo, vem:

- $x_A = \frac{\pi}{6}$

- $y_A = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + 2 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{6\sqrt{3}}{6} = \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$

- $x_B = \frac{5\pi}{6}$

- $y_B = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} + 2 \cos \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2(-\cos \frac{\pi}{6}) = \frac{5\pi}{6} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\pi}{6} - \frac{6\sqrt{3}}{6} = \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6}$

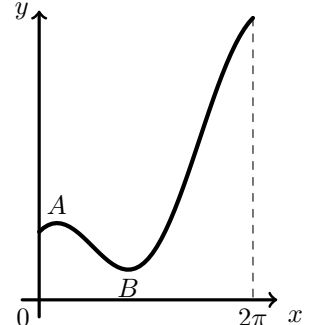
100.2. Pela observação do gráfico, verificamos que o contradomínio de f é o conjunto dos valores compreendidos entre a ordenada do ponto B e a imagem de 2π .

Assim,

$$f(2\pi) = 2\pi + 2 \cos(2\pi) = 2\pi + 2(1) = 2\pi + 2$$

Ou seja:

$$D'_f = \left[\frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6}, 2\pi + 2 \right]$$



Exame – 2001, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 435)



101.

101.1. Para determinar a área de uma das faces laterais, começamos determinar a altura do triângulo (\overline{EG}) .

Recorrendo à definição de cosseno, como $\overline{FG} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2}{2} = 1$, vem:

$$\cos x = \frac{\overline{FG}}{\overline{EG}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\overline{EG}} \Leftrightarrow \overline{EG} = \frac{1}{\cos x}$$

Assim, calculando a área do triângulo $[BCE]$, temos:

$$A_{[BCE]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{EG}}{2} = \frac{2 \times \frac{1}{\cos x}}{2} = \frac{1}{\cos x}$$

Logo, para calcular a área total, vem:

$$A_T = 4 \times A_{[BCE]} + A_{[ABCD]} = 4 \times \frac{1}{\cos x} + 2 \times 2 = \frac{4}{\cos x} + 4 = \frac{4}{\cos x} + \frac{4 \cos x}{\cos x} = \frac{4 \cos x + 4}{\cos x}$$

Ou seja, para cada valor de $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, a área da pirâmide é dada por $A(x)$

101.2.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} A(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{4 \cos x + 4}{\cos x} = \frac{4 \cos(\frac{\pi}{2}^-) + 4}{\cos(\frac{\pi}{2}^-)} = \frac{4 \times 0^+ + 4}{0^+} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

Ou seja, quando o ângulo x toma valores arbitrariamente próximos de $\frac{\pi}{2}$ radianos, a área da pirâmide assume valores arbitrariamente grandes, o que pode ser justificado pelo facto da altura da pirâmide ser arbitrariamente grande.

Exame – 2001, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

102.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{sen} x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{\operatorname{sen} x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)}{\lim_{x \rightarrow 0^+} x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \\ &= \frac{\ln(0^+)}{0^+} \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{-\infty}{0^+} \times \frac{1}{1} = -\infty \times 1 = -\infty \end{aligned}$$

(limite notável)

Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, Prova modelo (cód. 435)

103.

103.1. Para que a função seja contínua no ponto de abcissa 0, tem que se verificar a condição:

$$h(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$$

- $h(0) = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x}{x} + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1 + \frac{1}{0^-} = 1 - \infty = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$
(limite notável)



Assim, como $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$, e por isso, a função h **não é contínua no ponto** de abscissa 0.

Mas, como $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0)$, a função h **é contínua à direita do ponto** de abscissa 0.

103.2. As abscissas dos pontos de interseção das duas funções, no intervalo $[-1, 1000\pi]$, são as soluções da equação $h(x) = j(x)$, que pertencem a esse intervalo.

- Assim, para $x \in [-1, 0[$, temos:

$$\begin{aligned} h(x) = j(x) &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = \frac{1}{3x} \Leftrightarrow 3x^2 + 3x = x \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(3x+2) = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow (x=0 \vee 3x+2=0) \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x=0 \vee x=-\frac{2}{3}\right) \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Ou seja, no intervalo $] -1, 0[$, os gráficos das funções h e j interseam-se uma vez.

- Para $x = 0$, como a função j não está definida, não há interseção dos dois gráficos.
- Para $x \in]0, 1000\pi]$, vem:

$$h(x) = j(x) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{3x} \Leftrightarrow \sin x = \frac{2x}{3x} \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{2}{3} \wedge x \neq 0$$

Como a equação $\sin x = \frac{2}{3}$ tem duas soluções no intervalo $]0, 2\pi[$ e é periódica (de período 2π) terá 1000 soluções no intervalo $]0, 1000\pi]$, porque este intervalo contém 500 intervalos do tipo $]0 + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \times k[$, $k \in \{0, 2, 3, \dots, 498, 499\}$, e existem duas soluções em cada intervalo.

Assim, os gráficos de j e de h interseam-se em 1001 pontos no intervalo $[0, 1000\pi]$ (1 ponto de interseção com abscissa negativa e 1000 com abscissas positivas).

Exame – 2001, Prova modelo (cód. 435)

104. Como o valor do declive da reta tangente pode ser calculado pelo valor da derivada, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$h'(x) = (\sin x)' = \cos x$$

Como $-1 \leq \cos x \leq 1$, o declive da reta tangente está compreendido entre -1 e 1. Logo, as opções (A), (B) e (C) não podem ser retas tangentes ao gráfico de h , pois os declives das retas são maiores que 1, nas opções (A) e (C); ou menores que -1, no caso da opção (B).

Na opção (D), ao contrário das anteriores, o valor do declive é compatível com a condição imposta ($-1 \leq 1 \leq 1$).

Resposta: **Opção D**

Exame – 2000, 2ª fase (cód. 435)

105.

105.1. Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em \mathbb{R} , é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $[0, \pi]$.

Como $-1 < 0 < 2\pi + 1$, ou seja, $f(0) < 0 < f(\pi)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]0, \pi[$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]0, \pi[$.

C.A.

$$f(0) = 2 \times 0 - \cos 0 = 0 - 1 = -1$$

$$f(\pi) = 2 \times \pi - \cos(\pi) = 2\pi - (-1) = 2\pi + 1$$

105.2. Determinando a expressão da derivada, vem:

$$f'(x) = (2x - \cos x)' = (2x)' - (\cos x)' = 2 - (-\sin x) = 2 + \sin x$$

Como $\sin x \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$, então $2 + \sin x \geq -1 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$, ou seja $f'(x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Como a derivada de f é estritamente positiva, a função f é estritamente crescente, e funções estritamente crescentes têm no máximo, um zero, pelo que o zero cuja existência é garantida pela enunciado do item anterior, é o único zero da função.

Exame – 2000, 2ª fase (cód. 435)

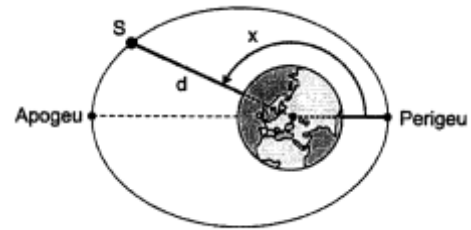


106. Quando o satélite se encontra no *apogeu*, o ângulo x tem amplitude 180° . Assim, a distância do satélite ao centro Terra é:

$$d = \frac{7820}{1 + 0,07 \cos 180} = \frac{7820}{1 + 0,07(-1)} = \frac{7820}{0,93} \approx 8408,6$$

Como se pretende saber a distância à superfície da Terra (d_{Sup}), devemos subtrair o raio da terra:

$$d_{Sup} = d - 6378 = 8408,6 - 6378 = 2030,6 \approx 2031$$



Logo, a distância do satélite à superfície da Terra, arredondada às unidades é de 2031 km

Exame – 2000, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 435)

107. Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ então a reta $y = 0$ é uma assíntota do gráfico de f ; analogamente se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ então a reta $y = 1$ é uma assíntota do gráfico de f . Como a função $g(x) = \sin x$ não tem qualquer assíntota, as afirmações das opções (A) e (C) são falsas.

Como $\sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, então a afirmação $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x = +\infty$ (opção (B)) é falsa.

A função $g(x) = \sin x$ é periódica e não se aproxima de nenhum valor específico para valores arbitrariamente grandes de x , pelo que não existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2000, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

108. O dia 24 de março é o 84° dia do ano ($31 + 29 + 24 = 84$). Assim o tempo decorrido entre o nascer e por do Sol, no dia 24 de março, é

$$f(84) = 12,2 + 2,64 \sin \frac{\pi(84 - 81)}{183} \approx 12,336$$

Logo a hora do por Sol, pode ser calculada como a soma da hora a que nasceu (6,5) com a duração do dia (12,336):

$$6,5 + 12,336 = 18,836$$

Calculando 0,836 horas em minutos, temos $0,836 \times 60 = 50,16$, pelo que o por do Sol no dia 24 de março ocorreu às 18 horas e 50 minutos.

Exame – 2000, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

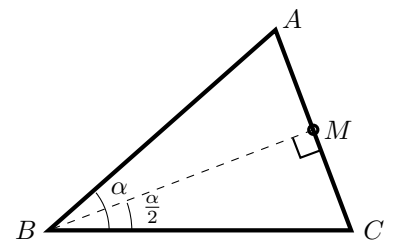
109.

- 109.1. Considerando o ponto M , como o ponto médio do lado AC , definimos dois triângulos retângulos. Assim, recorrendo à definição de seno e cosseno, vem:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{CM}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{CM} = \overline{BC} \times \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BM} = \overline{BC} \times \cos \frac{\alpha}{2}$$

Logo, como $\overline{AC} = 2 \times \overline{CM} = 2\overline{BC} \times \sin \frac{\alpha}{2}$, para cada valor de $\alpha \in]0, \pi[$ a área do triângulo $[ABC]$ é:



$$\begin{aligned} A_{[ABC]} &= \frac{\overline{AC} \times \overline{BM}}{2} = \frac{2 \times \overline{BC} \times \sin \frac{\alpha}{2} \times \overline{BC} \times \cos \frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{\overline{BC}^2}{2} \times 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \\ &= \frac{\overline{BC}^2}{2} \times \sin \left(2 \times \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\overline{BC}^2}{2} \times \sin \alpha \end{aligned}$$



- 109.2.
- Um polígono regular de n lados, inscrito numa circunferência de lado 1, pode ser decomposto em n triângulos isósceles, iguais, em que os lados iguais têm comprimento 1 ($\overline{BC} = 1$).
 - Como a soma dos ângulos ao centro de todos os n triângulos é 2π , o ângulo α é o resultado da divisão do ângulo giro por n , ou seja $\alpha = \frac{2\pi}{n}$
 - Como a área do polígono regular é dada pela soma das áreas dos n triângulos, e como têm todos a mesma área, por serem iguais, multiplicamos a área do triângulo por n .

Logo, multiplicando por n a expressão anterior e substituindo \overline{BC} e α , a expressão da área do polígono é:

$$A_n = n \times \frac{1^2}{2} \times \text{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right) = \frac{n}{2} \text{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right)$$

109.3.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{2} \text{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{2}{n}} \times \text{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\text{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right)}{\frac{2}{n}} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\pi \times \frac{\text{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right)}{\pi \times \frac{2}{n}} \right) = \pi \times \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\text{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right)}{\frac{2\pi}{n}} \right) = \pi \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } x}{x} = \pi \times 1 = \pi \end{aligned}$$

(Se $x = \frac{2\pi}{n}$, $n \rightarrow +\infty \Rightarrow x \rightarrow 0^+$) (limite notável)

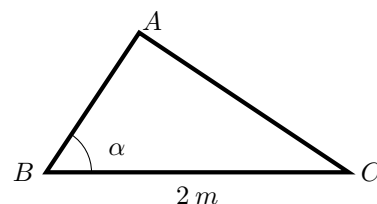
Ou seja quando o polígono regular tem um número arbitrariamente grande de lados, a sua área é arbitrariamente de π . O que pode ser observado geometricamente, porque a área dos polígonos regulares inscritos numa circunferência aproxima-se da área da circunferência com o aumento do número de lados, e a circunferência de raio 1 tem área igual a π ($A_o = \pi \times 1^2 = \pi$).

Exame – 2000, Prova modelo (cód. 435)

110. Recorrendo às definições de seno e cosseno temos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \text{sen } \alpha = \frac{\overline{AC}}{2} \Leftrightarrow \overline{AC} = 2 \text{sen } \alpha$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \text{cos } \alpha = \frac{\overline{AB}}{2} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2 \text{cos } \alpha$$



E assim, considerando o lado $[AB]$ como a base e o lado $[AC]$ como a altura, a área do triângulo $[ABC]$ é:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{2} = \frac{2 \text{cos } \alpha \times 2 \text{sen } \alpha}{2} = \frac{4 \text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \alpha}{2} = 2 \text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \alpha$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2000, Prova para militares (cód. 135)

111. Como $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$, a função g não está definida para valores de x tais que $\text{cos } x = 0$.

$$\text{Como } \text{cos } x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

- as opções (B) e (C) não podem ser o domínio de g , porque $\frac{\pi}{2} \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right[$ e também $\frac{\pi}{2} \in]0, \pi[$
- a opção (D) também não pode ser porque $\frac{3\pi}{2} \in]\pi, 2\pi[$ e $\text{cos } \frac{3\pi}{2} = 0$

Finalmente temos que $\forall x \in \left] -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right[$, $\text{cos } x \neq 0$

Resposta: **Opção A**

Exame – 1999, Prova para militares (cód. 135)



112.

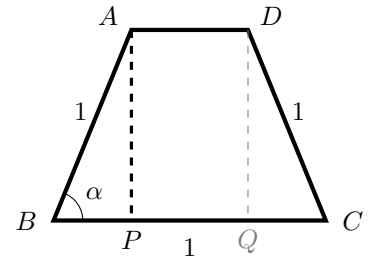
112.1. Como $f(0) = \text{sen}(0) - \frac{1}{2} \text{sen}(2 \times 0) = 0 - \frac{1}{2} \text{sen}(0) = 0$, temos que:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x) - \frac{1}{2} \text{sen}(2x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \text{sen}(2x)}{x} = \\ & \hspace{15em} \text{(limite notável)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{x} = 1 - \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \text{sen}(2x)}{2x} = 1 - \frac{1}{2} \times 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{2x} = 1 - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{sen } y}{y} = 1 - 1 = 0 \\ & \hspace{10em} \text{(Se } y = 2x, x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0) \hspace{15em} \text{(limite notável)} \end{aligned}$$

112.2.

112.2.1. Considerando as projeções ortogonais dos vértices A e D sobre o lado $[BC]$, respectivamente os pontos P e Q , e recorrendo às definições de seno e cosseno, vem:

$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \text{sen } \alpha = \frac{\overline{AP}}{1} \Leftrightarrow \overline{AP} = \text{sen } \alpha \\ \text{cos } \alpha &= \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \text{cos } \alpha = \frac{\overline{BP}}{1} \Leftrightarrow \overline{BP} = \text{cos } \alpha \end{aligned}$$



Logo, como $\overline{AD} = 1 - \overline{BP} - \overline{QC} = 1 - 2\overline{BP} = 1 - 2 \text{cos } \alpha$, a área do trapézio $[ABCD]$ é:

$$\begin{aligned} A_{[ABCD]} &= \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} \times \overline{AP} = \frac{1 + 1 - 2 \text{cos } \alpha}{2} \times \text{sen } \alpha = \frac{2 - 2 \text{cos } \alpha}{2} \times \text{sen } \alpha = (1 - \text{cos } \alpha) \text{sen } \alpha = \\ &= \text{sen } \alpha - \text{sen } \alpha \text{cos } \alpha = \text{sen } \alpha - \frac{1}{2} \times 2 \text{sen } \alpha \text{cos } \alpha = \text{sen } \alpha - \frac{1}{2} \text{sen}(2\alpha) \end{aligned}$$

Logo, para cada valor de $\alpha \in \left] \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$ a área do trapézio é dada por $f(\alpha)$

112.2.2.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen } \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \text{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) = 0 - \frac{1}{2} \text{sen } \pi = -(-1) = 1$$

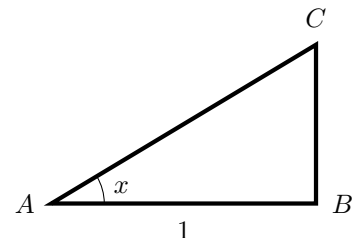
Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, o ângulo ABC é reto, tal como o ângulo BCD , e como os lados $[AB]$, $[BC]$ e $[CD]$ são congruentes, o quadrilátero é um quadrado de lado 1, pelo que a sua área também é 1, de acordo com o cálculo anterior: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Exame – 1999, Prova modelo (cód. 135)

113.

113.1. Usando as definições de cosseno e de tangente, temos:

$$\begin{aligned} \text{cos } x &= \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \text{cos } x = \frac{1}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{1}{\text{cos } x} \\ \text{tg } x &= \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \text{tg } x = \frac{\overline{BC}}{1} \Leftrightarrow \overline{BC} = \text{tg } x \end{aligned}$$



Logo, o perímetro do triângulo é:

$$P_{[ABC]} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 1 + \text{tg } x + \frac{1}{\text{cos } x} = \frac{\text{cos } x}{\text{cos } x} + \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} + \frac{1}{\text{cos } x} = \frac{1 + \text{sen } x + \text{cos } x}{\text{cos } x}$$

Logo, para cada valor de $x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, o perímetro do triângulo é dado por $f(x)$.



113.2. Como $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha$, temos que: $\operatorname{sen}\alpha = -\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$

E, pela fórmula fundamental ($\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$), temos que:

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 &\Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{25}{25} - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5}\end{aligned}$$

Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sabemos que $\cos\alpha > 0$, logo $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

Desta forma, temos que:

$$f(\alpha) = \frac{1 + \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1 + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{5}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{5 + 3 + 4}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

113.3. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{1 + \operatorname{sen}x + \cos x}{\cos x}\right)' = \frac{(1 + \operatorname{sen}x + \cos x)' \cos x - (1 + \operatorname{sen}x + \cos x)(\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{(0 + \cos x + (-\operatorname{sen}x)) \cos x - (1 + \operatorname{sen}x + \cos x)(-\operatorname{sen}x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}x \cos x - (-\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}x \cos x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}x \cos x + \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}x \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + \operatorname{sen}x}{\cos^2 x} = \frac{1 + \operatorname{sen}x}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

Logo, como $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos que $\operatorname{sen}x > 0$ e $\cos x > 0$, pelo que f' é um quociente de dois valores positivos, logo $f'(x) > 0, \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Como a derivada é sempre positiva, a função é estritamente crescente, ou seja, no triângulo $[ABC]$ a amplitudes maiores do ângulo x , correspondem áreas maiores.

Exame – 1998, Prova para militares (cód. 135)



114.

114.1. Como $\overline{DE} = 1$ e $\overline{EH} = \frac{\overline{DG}}{2} = 1$, e recorrendo à definição de tangente, vem:

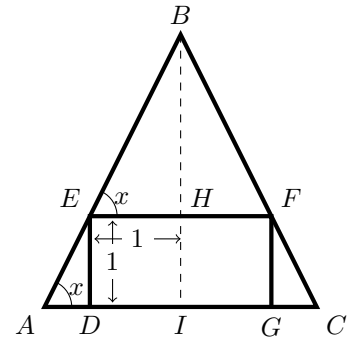
$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BH}}{\overline{EH}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{BH}}{1} \Leftrightarrow \overline{BH} = \operatorname{tg} x$$

Assim, temos que:

$$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DG} + \overline{GC} = 2\overline{AD} + 2 = 2\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) + 2 = \frac{2}{\operatorname{tg} x} + 2$$

$$\overline{BI} = \overline{BH} + \overline{HI} = \operatorname{tg} x + 1$$



Logo a área do triângulo $[ABC]$ é:

$$\begin{aligned} A_{[ABC]} &= \frac{\overline{AC} \times \overline{BI}}{2} = \frac{\left(\frac{2}{\operatorname{tg} x} + 2\right) \times (\operatorname{tg} x + 1)}{2} = \frac{\frac{2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{\operatorname{tg} x} + 2\operatorname{tg} x + 2}{2} = \\ &= \frac{2\left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x + 1\right)}{2} = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x + 1 = 2 + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \end{aligned}$$

Logo, para cada valor de $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, a área do triângulo $[ABC]$ é dada, por $f(x)$

114.2.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2 + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)' = (2)' + (\operatorname{tg} x)' + \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)' = 0 + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{(1)' \times \operatorname{tg} x - 1 \times (\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg}^2 x} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{0 - 1 \times \frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \\ &= \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{-(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = -\frac{\cos(2x)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \end{aligned}$$

114.3. Para determinar o valor mínimo, começamos por calcular os zeros da derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{\cos(2x)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow -\cos(2x) = 0 \wedge \underbrace{\sin^2 x \cdot \cos^2 x \neq 0}_{\text{(PV, } x \in]0, \frac{\pi}{2}[)} \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $x = \frac{\pi}{4}$ é a única solução da equação, ou seja o único zero da derivada, pelo que estudando a variação do sinal da derivada para relacionar com a monotonia da função, vem:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f'	n.d.	-	0	+	n.d.
f	n.d.	\searrow	min	\nearrow	n.d.

Pelo que podemos concluir que $x = \frac{\pi}{4}$ é o minimizante de f , ou seja é o valor de x para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é mínima.

Exame – 1998, 2ª fase (cód. 135)



115. Considerando o ponto P como a projeção ortogonal do vértice B sobre a reta HF , e recorrendo às definições de seno e cosseno, vem:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{BP}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{BP}}{5} \Leftrightarrow \overline{BP} = 5 \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{cos} x = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \operatorname{cos} x = \frac{\overline{OP}}{5} \Leftrightarrow \overline{OP} = 5 \operatorname{cos} x$$

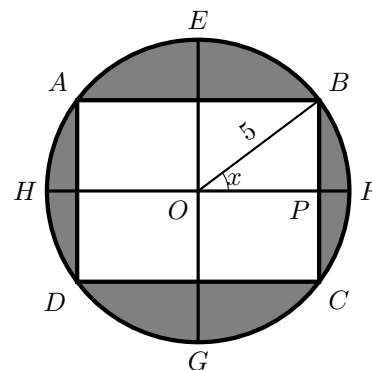
Sabemos ainda que

- $\overline{AB} = 2\overline{OP} = 2 \times 5 \operatorname{cos} x = 10 \operatorname{cos} x$
- $\overline{BC} = 2\overline{BP} = 2 \times 5 \operatorname{sen} x = 10 \operatorname{sen} x$

Logo a área relvada (sombreada) é dada pela diferença da área da circunferência e do retângulo $[ABCD]$:

$$\begin{aligned} A &= A_o - A_{[ABCD]} = \pi(\overline{OB})^2 - \overline{AB} \times \overline{BC} = \pi(5)^2 - 10 \operatorname{cos} x \times 10 \operatorname{sen} x = \\ &= 25\pi - 100 \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x = 25\pi - 50 \times 2 \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x = 25\pi - 50 \operatorname{sen}(2x) \end{aligned}$$

Logo, para cada valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ a área da zona relvada, em m^2 , é dada por $g(x)$



Exame – 1998, 1ª fase - 2ª chamada (cód. 135)

116.

116.1. Como $\overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{4}{2} = 2$, e recorrendo à definição de cosseno e tangente, vem:

$$\operatorname{cos} x = \frac{\overline{AM}}{\overline{PA}} \Leftrightarrow \operatorname{cos} x = \frac{4}{\overline{PA}} \Leftrightarrow \overline{PA} = \frac{4}{\operatorname{cos} x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{PM}}{\overline{AM}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{PM}}{4} \Leftrightarrow \overline{PM} = 4 \operatorname{tg} x$$

Como $\overline{FM} = \overline{FP} + \overline{PM}$ e $\overline{FM} = 4$, temos que:

$$\overline{FP} + \overline{PM} = 4 \Leftrightarrow \overline{FP} = 4 - \overline{PM} \Leftrightarrow \overline{FP} = 4 - 4 \operatorname{tg} x$$

Assim, como $\overline{PA} = \overline{PB}$, temos que o comprimento total, C , é:

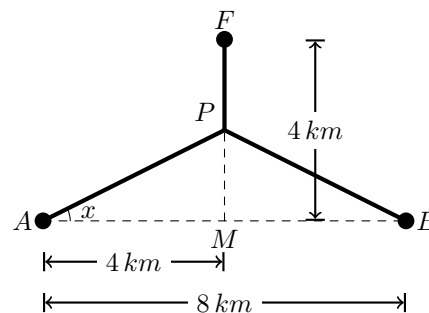
$$\begin{aligned} C &= \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{FP} = 2\overline{PA} + \overline{FP} = 2 \left(\frac{4}{\operatorname{cos} x} \right) + 4 - 4 \operatorname{tg} x = \frac{8}{\operatorname{cos} x} + 4 - 4 \times \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = \\ &= 4 + \frac{8}{\operatorname{cos} x} - \frac{4 \operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = 4 + \frac{8 - 4 \operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} \end{aligned}$$

Logo, para cada $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, o comprimento total da canalização é dado por $g(x)$

116.2.

$$g(0) = 4 + \frac{8 - 4 \operatorname{sen} 0}{\operatorname{cos} 0} = 4 + \frac{8 - 4 \times 0}{1} = 4 + 8 = 12$$

Se o ângulo x tiver amplitude de 0 (zero) radianos, o comprimento da canalização é 12 km, o que pode ser observado na figura, porque com este valor do ângulo x , o comprimento é dado por $\overline{AB} + \overline{FM} = 8 + 4 = 12$, tendo a canalização a forma de um "T" invertido (\perp).



116.3. Para determinar o valor de x para o qual o comprimento da canalização é mínimo, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(4 + \frac{8 - 4 \operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = (4)' + \left(\frac{8 - 4 \operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = 0 + \frac{(8 - 4 \operatorname{sen} x)'(\cos x) - (8 - 4 \operatorname{sen} x)(\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{(0 - 4 \cos x)(\cos x) - (8 - 4 \operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{-4 \cos^2 x - (-8 \operatorname{sen} x + 4 \operatorname{sen}^2 x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{-4 \cos^2 x + 8 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{-4(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) + 8 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{-4 + 8 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Depois, calculando os zeros da derivada, vem:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4 + 8 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow -4 + 8 \operatorname{sen} x = 0 \wedge \underbrace{\cos^2 x \neq 0}_{\text{(PV, } x \in]0, \frac{\pi}{4}[)}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{4}{8} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$, a única solução da equação é $x = \frac{\pi}{6}$, ou seja este é o único zero da derivada, pelo que podemos, agora, estudar a variação do sinal de f' para relacionar com a monotonia de f :

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$	n.d.	-	0	+	n.d.
$f(x)$	n.d.	\searrow	min	\nearrow	n.d.

Pelo que podemos concluir que $x = \frac{\pi}{6}$ é o minimizante de f , ou seja é o valor de x para o qual o comprimento da canalização é mínimo.

Exame - 1988, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 135)

117.

117.1.

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = -\operatorname{sen} x \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}(-x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = -x + 2k\pi \vee 2x = \pi - (-x) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3x = 2k\pi \vee 2x = \pi + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \vee x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como $x \in [0, \pi]$, os zeros da função obtêm-se para $k = 0$ ou $k = 1$, ou seja, o conjunto dos zeros de g é $\left\{0, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$



117.2. Como o domínio de h é o conjunto $[0, \pi] \setminus \frac{\pi}{2}$ não existem assíntotas não verticais do gráfico de h ; e as retas verticais de equações $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \pi$ são as únicas retas que podem ser assíntotas do gráfico de h . Verificando cada uma das três hipóteses, vem:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x)}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen}(0^+) + \operatorname{sen}(2 \times 0^+)}{\cos 0^+} = \frac{0^+ + 0^+}{1} = 0$$

Logo, a reta $x = 0$ **não é assíntota** do gráfico de h

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{g(x)}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x)}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}^-\right) + \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{2}^-\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}^-\right)} = \frac{1 + \operatorname{sen}(\pi^-)}{0^+} = \frac{1 + 0^+}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Pelo que, a reta $x = \frac{\pi}{2}$ **é uma assíntota** do gráfico de h

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pi^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{g(x)}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x)}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen}(\pi^-) + \operatorname{sen}(2 \times \pi^-)}{\cos \pi^-} = \frac{0^+ + 0^-}{1} = 0$$

Logo, a reta $x = \pi$ **não é assíntota** do gráfico de h

117.3. Recorrendo às definições de seno e cosseno vem:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{BH}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{BH}}{2} \Leftrightarrow \overline{BH} = 2 \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{cos} x = \frac{\overline{CH}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \operatorname{cos} x = \frac{\overline{CH}}{2} \Leftrightarrow \overline{CH} = 2 \operatorname{cos} x$$

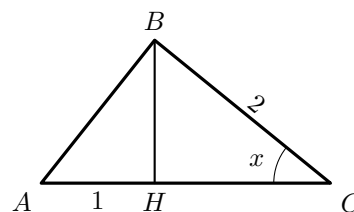
Como $\overline{AH} = 1$ e $\overline{AC} = \overline{AH} + \overline{CH}$, temos que:

$$\overline{AC} = \overline{AH} + \overline{CH} \Leftrightarrow \overline{AC} = 1 + \overline{CH} \Leftrightarrow \overline{AC} = 1 + 2 \operatorname{cos} x$$

Logo a área do triângulo $[ABC]$ é:

$$\begin{aligned} A_{[ABC]} &= \frac{\overline{AC} \times \overline{BH}}{2} = \frac{(1 + 2 \operatorname{cos} x) \times 2 \operatorname{sen} x}{2} = \frac{2 \operatorname{sen} x + 4 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x}{2} = \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x = \\ &= \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x) \end{aligned}$$

Ou seja, para cada valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a área do triângulo $[ABC]$ é dada por $g(x)$



Exame – 1998, Prova modelo (cód. 135)

