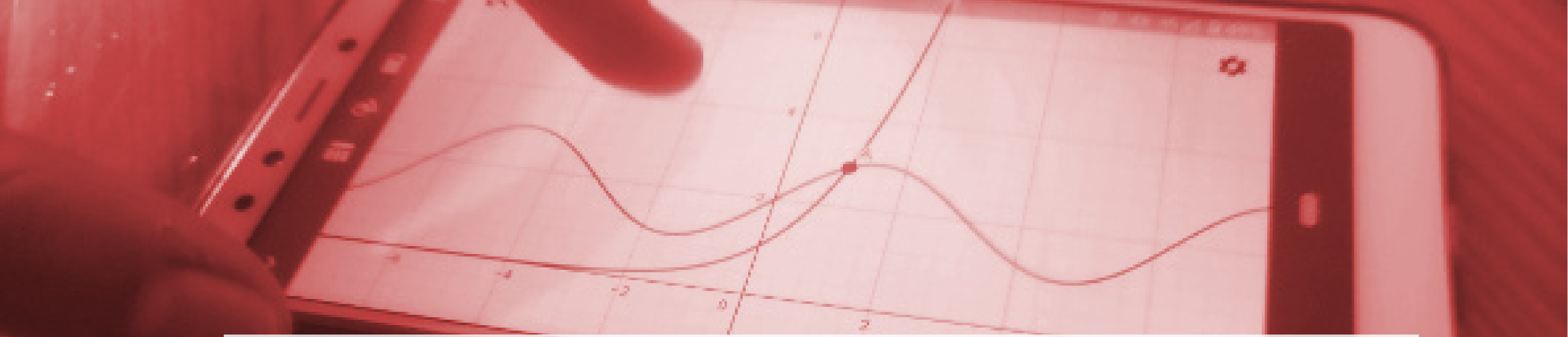


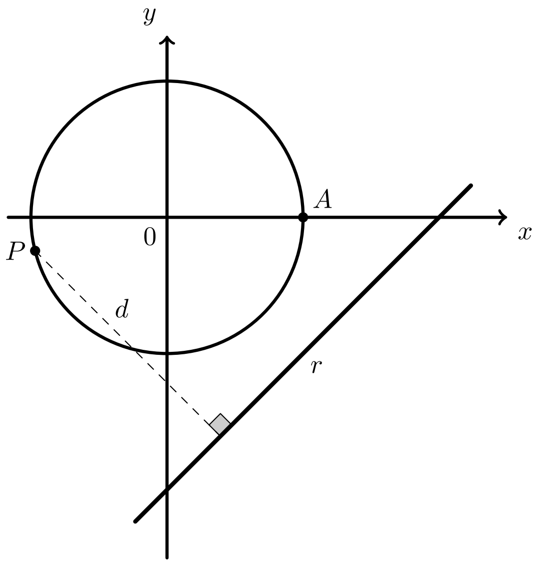
Funções (12.º ano)

Funções trigonométricas (resolução gráfica)

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios

1. Na figura ao lado, estão representados, em referencial o.n. Oxy:

   - uma circunferência, de centro na origem;
   - o ponto A, ponto de intersecção da circunferência com o semieixo positivo Ox;
   - a reta r, de equação reduzida $y = x - 6$.

   Considere que um ponto, P, partindo de A, se desloca sobre a circunferência, no sentido positivo, durante 7 segundos, percorrendo mais do que uma volta.

   Nesse percurso, a distância, d, do ponto P à reta r, t segundos após o início do deslocamento, é dada por

   $$d(t) = \frac{3\sqrt{2}}{2}(2 + \operatorname{sen} t - \cos t), \text{ com } t \in [0{,}7]$$

   Sabe-se que as distâncias máxima e mínima do ponto P à reta r são, respetivamente, $3\sqrt{2} + 3$ e $3\sqrt{2} - 3$.

   Durante o percurso, existem dois instantes em que a distância do ponto P à reta r é igual ao diâmetro da circunferência.

   Determine, recorrendo à calculadora gráfica, esses instantes.

   Apresente os resultados em segundos, arredondados às décimas.

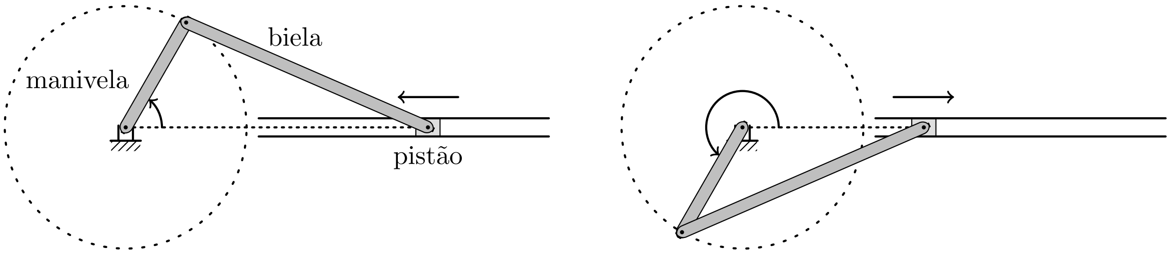
   Não justifique a validade dos resultados obtidos.
   Na sua resposta:

   – apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
   – represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale os pontos relevantes, que lhe permitem resolver a equação.

Exame – 2023, Ép. especial

2. O mecanismo de manivela-biela é composto por uma manivela de comprimento fixo, que efetua um movimento de rotação (sempre no mesmo sentido), e por uma biela, também de comprimento fixo, que transforma esse movimento de rotação no movimento alternado de translação de um pistão.

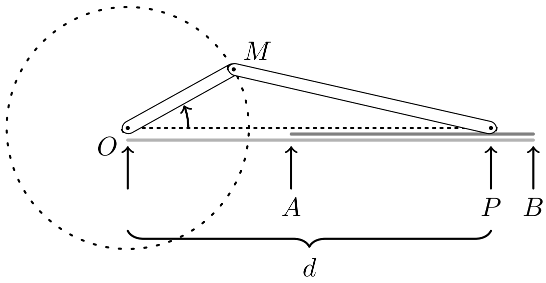
   Na figura seguinte, está representado esse mecanismo.



   Na figura seguinte, está representado um esquema do mecanismo descrito.

   Relativamente a esta figura, sabe-se que:

   - o ponto P representa o pistão;
   - o segmento de reta $[OM]$ representa a manivela, que tem 1 cm de comprimento;
   - o segmento de reta $[MP]$ representa a biela;
   - os pontos A e B são os pontos em que a distância do pistão ao centro de rotação da manivela, O, é mínima e máxima, respetivamente;
   - os pontos O, A, P e B são colineares.



   Sabe-se que o movimento de rotação da manivela se inicia quando o pistão se encontra na posição B e que a manivela descreve voltas completas a uma frequência angular constante.

   Admita que a função que dá, em centímetros, a distância do pistão ao ponto O, em função do tempo, t, em segundos, contado a partir do instante em que é iniciado o movimento, é dada por

$$d(t) = \cos t + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2 t} \ , \ \ t \geq 0$$

   (o argumento das funções seno e cosseno está expresso em radianos)

   2.1. Qual é, em centímetros, o comprimento da biela neste mecanismo?

   (A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5

   2.2. Durante os primeiros cinco segundos, após o início do movimento, registou-se, num certo instante t_0, a distância do pistão ao ponto O

   Sabe-se que, dois segundos após esse instante, a distância do pistão ao ponto O diminuiu 25%.

   Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a distância, em centímetros, arredondada às décimas, do pistão ao ponto O no instante t_0, sabendo-se que este valor existe e é único.

   Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

   Na sua resposta:

   – apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
   – reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;

– apresente o valor pedido em centímetros, arredondado às décimas.

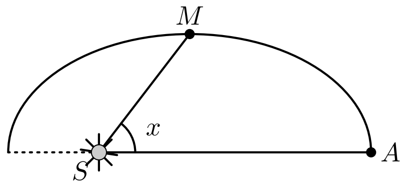
Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame – 2020, 1.ª Fase

3. O planeta Mercúrio descreve uma órbita elíptica em torno do Sol. Na figura ao lado, está representado um esquema de uma parte dessa órbita.

Relativamente a esta figura, tem-se que:

- o ponto S representa o Sol;
- o ponto M representa o planeta Mercúrio;
- o ponto A representa o afélio, que é o ponto da órbita mais afastado do Sol;
- x é a amplitude do ângulo ASM, compreendida entre 0 e 180 graus.



Admita que a distância, d, em milhões de quilómetros, do planeta Mercúrio ao Sol é dada, em função de x, por

$$d = \frac{555}{10 - 2{,}06 \cos x}$$

Seja α a amplitude do ângulo ASM, num certo instante (α está compreendido entre 0 e 20 graus).
Nesse instante, o planeta Mercúrio encontra-se a uma certa distância do Sol.
Passado algum tempo, a amplitude do ângulo ASM é três vezes maior e a distância do planeta Mercúrio ao Sol diminuiu 3%.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de α, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor de α em graus, arredondado às unidades.

Exame – 2018, 2.ª Fase

4. A primeira derivada de uma função f, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, é dada por $f'(x) = 3x - \operatorname{tg} x$

Sabe-se que o gráfico de f tem um único ponto de inflexão.

Qual é a abcissa desse ponto, arredondada às centésimas?

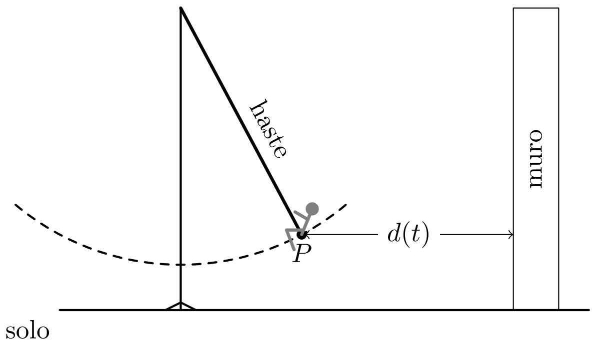
(A) 0,84 **(B)** 0,88 **(C)** 0,92 **(D)** 0,96

Exame – 2018, 2.ª Fase

5. Num jardim, uma criança está a andar num baloiço cuja cadeira está suspensa por duas hastes rígidas.

Atrás do baloiço, há um muro que limita esse jardim.
A figura ao lado esquematiza a situação. O ponto P representa a posição da cadeira.

Num determinado instante, em que a criança está a dar balanço, é iniciada a contagem do tempo. Doze segundos após esse instante, a criança deixa de dar balanço e procura parar o baloiço arrastando os pés no chão.



Admita que a distância, em decímetros, do ponto P ao muro, t segundos após o instante inicial, é dada por

$$d(t) = \begin{cases} 30 + t\,\mathrm{sen}\,(\pi t) & \text{se } 0 \leq t < 12 \\ \\ 30 + 12e^{12-t}\,\mathrm{sen}\,(\pi t) & \text{se } t \geq 12 \end{cases}$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos)

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o número de soluções da equação $d(t) = 27$ no intervalo $[0,6]$, e interprete o resultado no contexto da situação descrita.
Na sua resposta, reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema.

Exame – 2017, 2.ª Fase

6. Seja f a função, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2 + \mathrm{sen}\,x}{\cos x} & \text{se } -\dfrac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ \\ x - \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$
Além do ponto de tangência, a reta r intersecta o gráfico de f em mais dois pontos, A e B, cujas abcissas pertencem ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$; (considere que o ponto A é o de menor abcissa).

Determine analiticamente a equação reduzida da reta r e, utilizando a calculadora gráfica, obtenha as abcissas dos pontos A e B
Apresente essas abcissas arredondadas às centésimas.
Na sua resposta, reproduza, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver o problema.

Exame – 2016, 2.ª Fase

7. Num dia de vento, são observadas oscilações no tabuleiro de uma ponte suspensa, construída sobre um vale.
Mediu-se a oscilação do tabuleiro da ponte durante um minuto.
Admita que, durante esse minuto, a distância de um ponto P do tabuleiro a um ponto fixo do vale é dada, em metros, por

$$h(t) = 20 + \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t) + t\,\text{sen}\,(2\pi t) \quad \text{(t é medido em minutos e pertence a } [0,1])$$

Em $[0,1]$, o conjunto solução da inequação $h(t) < 19{,}5$ é um intervalo da forma $]a,b[$
Determine o valor de $b - a$ arredondado às centésimas, recorrendo à calculadora gráfica, e interprete o resultado obtido no contexto da situação descrita.

Na sua resposta:

- reproduza o gráfico da função h visualizado na calculadora (sugere-se que, na janela de visualização, considere $y \in [19{,}21]$);
- apresente o valor de a e o valor de b arredondados às milésimas;
- apresente o valor de $b - a$ arredondado às centésimas;
- interprete o valor obtido no contexto da situação descrita.

Exame – 2016, 1.ª Fase

8. Considere a função f, de domínio $]0,\pi[$ definida por $f(x) = \ln x + \cos x - 1$
Sabe-se que:

- A é um ponto do gráfico de f
- a reta tangente ao gráfico de f, no ponto A, tem inclinação $\frac{\pi}{4}$ radianos.

Determine a abcissa do ponto A, recorrendo à calculadora gráfica.
Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto A com arredondamento às centésimas.

Exame – 2013, Ép. especial

9. De duas funções f e g sabe-se que:

- f tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $f(x) = \pi - 4\,\text{sen}\,(5x)$
- g tem domínio $\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$, e g', primeira derivada de g, tem domínio, $\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$; e é definida por $g'(x) = \log_2\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)$

Seja h a função, de domínio $\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$, definida por $h(x) = f(x) - g(x)$
O ponto A pertence ao gráfico da função h
Sabe-se que a reta tangente ao gráfico da função h no ponto A é paralela ao eixo Ox
Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine a abcissa do ponto A. Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto com arredondamento às décimas.

Exame – 2011, Ép. especial

10. Considere a função f, de domínio $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$,definida por $f(x) = e^{2x} + \cos x - 2x^2$
Sabe-se que:

- B é um ponto do gráfico de f
- a reta de equação $y = 8x$ é paralela à reta tangente ao gráfico de f no ponto B

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto B

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

Exame – 2011, 2.ª Fase

11. Seja f a função, de domínio $]0,3[$ definida por $f(x) = x\ln x + \operatorname{sen}(2x)$
O ponto A pertence ao gráfico da função f
Sabe-se que a reta tangente ao gráfico da função f no ponto A tem declive 3

Determine a abcissa do ponto A
Na resolução deste item deve:

- traduzir o problema por uma equação;
- resolver graficamente essa equação, **recorrendo à calculadora**;
- indicar o valor pedido arredondado às centésimas.

Deve reproduzir e identificar o gráfico, ou os gráficos, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, incluindo o referencial, e deve assinalar, no(s) gráfico(s), o(s) ponto(s) relevante(s).

Teste Intermédio 12.º ano – 26.05.2011

12. Considere a função f, de domínio $]0,\pi[$, definida por $f(x) = \ln x \times \cos x$
Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo Ox, que se situa mais próximo da origem O;
- B é o ponto de intersecção do gráfico da função f com a reta bissetriz dos quadrantes pares.

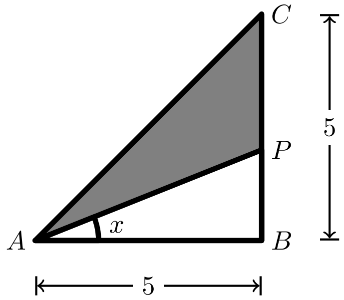
Determine a área do triângulo $[OAB]$, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas dos pontos A e B, arredondando às milésimas as coordenadas do ponto B;
- desenhar o triângulo $[OAB]$, assinalando os pontos que representam os seus vértices;
- apresentar o resultado pedido, com arredondamento às centésimas

Exame – 2010, Ép. especial

13. Na figura ao lado, está representado um triângulo retângulo $[ABC]$, cujos catetos $[AB]$ e $[BC]$, medem 5 unidades.
Considere que um ponto P se desloca sobre o cateto $[BC]$, nunca coincidindo com nem B com C
Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo BAP $\left(x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\right)$
Seja f a função que, a cada valor de x, faz corresponder o **perímetro** do triângulo $[APC]$
Sabe-se que $f(x) = \frac{5}{\cos x} - 5\operatorname{tg} x + \sqrt{50} + 5$
Existe um valor de x para o qual o **perímetro** do triângulo $[APC]$ é igual a 16
Determine esse valor, arredondado às centésimas, **recorrendo às capacidades gráficas da calculadora**.
Apresente o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora e assinale o ponto relevante para a resolução do problema.



Teste Intermédio 12.º ano – 19.05.2010

14. Seja a função f, de domínio $[0,\pi[$, definida por $f(x) = e^x . \cos x$
Determine, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**, um valor, aproximado às décimas, da área do trapézio $[OABC]$, em que:

- O é a origem do referencial;
- A é o ponto de interseção do gráfico da função f com o eixo Oy;
- B é o ponto do gráfico de f, tal que a reta AB é paralela ao eixo Ox;
- C é o ponto de interseção do gráfico da função f com o eixo Ox.

Reproduza, na folha de respostas, o gráfico visualizado na calculadora, incluindo o referencial.
Desenhe o trapézio $[OABC]$, assinalando os pontos que representam os seus vértices.

Nota: Nas coordenadas dos vértices em que é necessário fazer arredondamentos, utilize duas casas decimais.

Exame – 2009, Ép. especial

15. Seja f a função, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}(2x) \cos x$
No domínio indicado, determine, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**, um valor, aproximado às décimas, da área do triângulo $[ABC]$, em que:

- A é o ponto do gráfico da função f cuja ordenada é máxima;
- B e C são os pontos de interseção do gráfico da função f com a reta de equação $y = 0{,}3$.

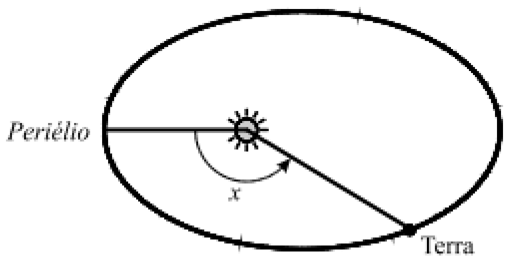
Reproduza, na folha de respostas, o gráfico, ou gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.
Desenhe o triângulo $[ABC]$, assinalando os pontos que representam os seus vértices.
Nota: Nas coordenadas dos vértices em que é necessário fazer arredondamentos, utilize duas casas decimais.

Exame – 2009, 2.ª Fase

16. Considere a função g, definida no intervalo $]1,7[$ por $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \ln x}{x}$ (ln designa logaritmo na base e)
Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, visualize o gráfico da função g e reproduza-o na sua folha de prova.
Com base nesse gráfico e utilizando as ferramentas adequadas da sua calculadora, resolva o seguinte problema:
Seja a função g' derivada de g. O conjunto solução da inequação $g'(x) < 0$ é um intervalo aberto $]a,b[$. Determine os valores de a e de b. Apresente os resultados arredondados às centésimas.
Justifique a sua resposta.

Exame – 2007, 2.ª Fase

17. Como sabe, a Terra descreve uma órbita elíptica em torno do Sol.
Na figura está representado um esquema dessa órbita.
Está assinalado o *periélio*, o ponto da órbita da Terra mais próximo do Sol.
Na figura está assinalado um ângulo de amplitude x radianos ($x \in [0,2\pi[$).
Este ângulo tem o seu vértice no Sol, o seu lado origem passa no *periélio* e o seu lado extremidade passa na Terra.



A distância d, em milhões de quilómetros, da Terra ao Sol, é (aproximadamente) dada, em função de x por $d = 149{,}6(1 - 0{,}0167 \cos x)$.

Sabe-se que x verifica a relação $\dfrac{2\pi t}{T} = x - 0{,}0167 \operatorname{sen} x$ em que:

- t é o tempo, em dias, que decorre desde a passagem da Terra pelo *periélio* até ao instante em que atinge a posição correspondente ao ângulo x;
- T é o tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa (365,24 dias).

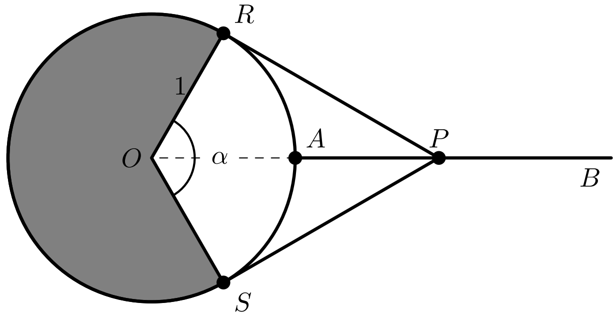
Sabe-se que a última passagem da Terra pelo *periélio* ocorreu a uma certa hora do dia 4 de Janeiro. Determine a distância a que a Terra se encontrava do Sol, à mesma hora do dia 14 de Fevereiro. Apresente o resultado em milhões de quilómetros, arredondado às décimas. Nos valores intermédios, utilize, no mínimo, quatro casas decimais.
Nota: a resolução desta questão envolve uma equação que deve ser resolvida graficamente, com recurso à calculadora; os apresente todos elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de algum, ou de alguns, ponto(s).

Exame – 2006, 2.ª Fase

18. Considere a função f definida no intervalo $[1,2]$ por $f(x) = \cos(x-1) + \ln x$ (ln designa logaritmo de base e).
Para um certo valor real positivo a e para um certo valor real b, a função g, definida no intervalo $[1,2]$ por $g(x) = a.f(x) + b$ tem por contradomínio o intervalo $[4,5]$.
Utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora, determine os valores de a e de b, arredondados às centésimas.
Explique como procedeu. Na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que tenha visualizado na calculadora, bem como coordenadas relevantes de algum, ou alguns, pontos.
Sempre que, em valores intermédios, proceder a arredondamentos, conserve um mínimo de três casas decimais.

Exame – 2006, 1.ª Fase

19. Na figura ao lado, estão representadas uma semirreta $\dot{A}B$ e uma circunferência de centro O e de raio 1 (os pontos O, A e B são colineares; o ponto A pertence à circunferência.



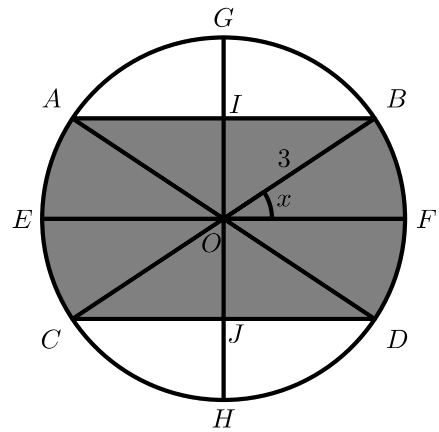
Considere que o ponto P se desloca ao longo da semirreta $\dot{A}B$, nunca coincidindo com o ponto A.
Os pontos R e S acompanham o movimento do ponto P, de tal forma que as retas PR e PS são sempre tangentes à circunferência, nos pontos R e S, respetivamente.
Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo SOR ($\alpha \in]0,\pi[$).
A área do **quadrilátero** $[ORPS]$ é dada, em função de α, por $f(\alpha) = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
Recorra à calculadora para determinar **graficamente** a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema:

Qual é o valor de α, para o qual a área do quadrilátero $[ORPS]$ é igual à área da região sombreada?

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos**, obtido(s), bem como as coordenadas relevantes de alguns pontos. Apresente o valor pedido na forma de dízima, arredondado às décimas.

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)

20. Na figura ao lado está representada uma circunferência com centro no ponto O e **raio 3**.
Os diâmetros $[EF]$ e $[GH]$ são perpendiculares.



Considere que o ponto B se desloca sobre o arco FG.
Os pontos A, C e D acompanham o movimento do ponto B, de tal forma que:

- as cordas $[AB]$ e $[CD]$ permanecem paralelas a $[EF]$;
- $[AD]$ e $[BC]$ são sempre diâmetros da circunferência

Os pontos I e J também acompanham o mesmo movimento, de tal forma que são sempre os pontos de interseção de $[GH]$ com $[AB]$ e $[CD]$, respetivamente.

Para cada posição do ponto B, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo FOB, $\left(x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ e a a área da região sombreada é dada, em função de x por $A(x) = 18(x + \operatorname{sen} x.\cos x)$

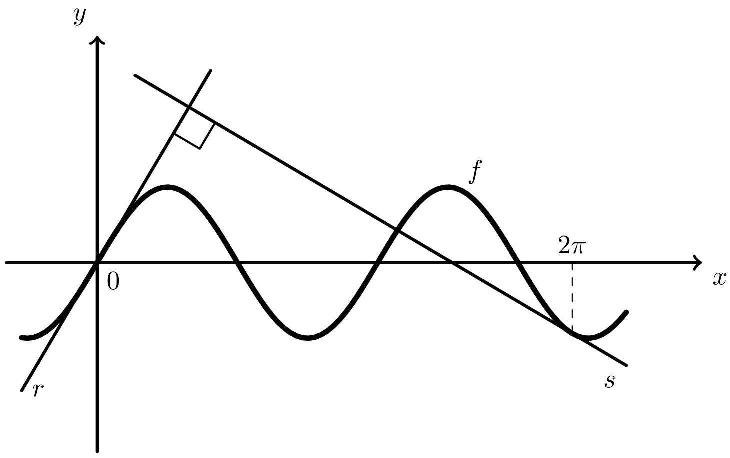
Recorra à calculadora para determinar **graficamente** a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema: *Qual é o valor de x para o qual a área da região sombreada é igual a metade da área do círculo?*
Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente obtido(s), bem como coordenadas relevantes o gráfico, ou gráficos, de algum, ou de alguns, ponto(s). Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

Exame – 2005, 1.ª Fase (cód. 435)

21. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}(ax)$, onde a designa uma constante real (o argumento da função **seno** está expresso em **radianos**).

Na figura ao lado está parte da representação gráfica da função f.
Na figura estão também representadas:

- uma reta r tangente ao gráfico f de no ponto de abcissa 0;
- uma reta s tangente ao gráfico f de no ponto de abcissa 2π.



Recorra à calculadora para determinar **graficamente** a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema:

Sabendo que as retas r e s são perpendiculares e que $a \in \left[\frac{3}{2},2\right]$, qual é o valor de a?

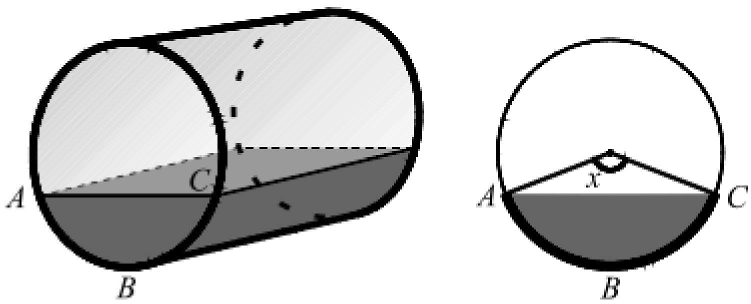
Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos**, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de algum (ou alguns) ponto(s). Apresente o valor pedido na forma de dízima, arredondado às décimas.

Exame – 2004, Ép. especial (cód. 435)

22. A figura ao lado, à esquerda, representa um depósito de forma cilíndrica, que contém um certo volume de um combustível.
Admita que a função V, de domínio $[0,2\pi]$, definida por

$$V(x) = 80(x - \operatorname{sen} x)$$

dá o volume, em metros cúbicos, de combustível existente no depósito, em função da amplitude x, em **radianos**, do arco ABC (que, como se sabe, é igual à amplitude do ângulo ao centro correspondente, assinalado na figura da direita).



Recorra à calculadora para determinar **graficamente** a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema: *Qual terá de ser a amplitude, em radianos, do arco ABC para que existam $300m^3$ de combustível no depósito ?*
Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos**, obtido(s). Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas.

Exame – 2004, 1.ª Fase (cód. 435)

23. A Rita está a participar num concurso de papagaios de papel.
No regulamento do concurso, estão as condições de apuramento para a final, que se reproduzem a seguir:

> Após um certo instante, indicado pelo júri:
> - o papagaio não pode permanecer no ar mais do que um minuto;
> - o papagaio tem de permanecer no ar, pelo menos doze segundos seguidos, a uma altura superior a dez metros;
> - o papagaio tem de ultrapassar os vinte metros de altura.

Admita que a distância, em metros, do papagaio da Rita ao solo, t **segundos** após o instante indicado pelo júri, é dada por

$$d(t) = 9{,}5 + 7\,\text{sen}\left(\frac{t^2}{200}\right) + 5\cos\left(\frac{t}{4}\right)$$

(os argumentos das funções seno e co-seno estão expressos em radianos).

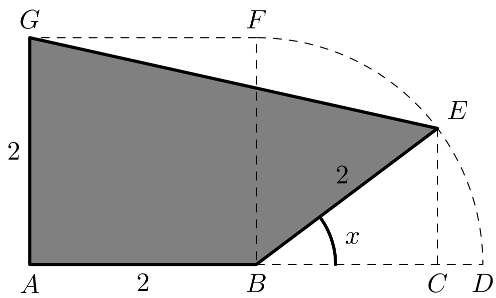
Note-se que, a partir do momento em que o papagaio atinge o solo, a distância do papagaio ao solo deixa de ser dada pela expressão, uma vez que passa a ser (naturalmente) igual a zero.

Deverá a Rita ser apurada para a final?

Utilize a calculadora para investigar esta questão. Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explicite as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. **Inclua, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos** (coordenadas arredondadas às décimas).

Exame – 2003, 2.ª Fase (cód. 435)

24. Na figura ao lado está representado a sombreado um polígono $[ABEG]$.
Tem-se que:
- $[ABFG]$é um quadrado de lado 2
- FD é um arco de circunferência de centro em B; o ponto E move-se ao longo desse arco; em consequência, o ponto C desloca-se sobre o segmento $[BD]$, de tal forma que se tem sempre $[EC] \perp [BD]$
- x designa a amplitude, em radianos, do ângulo CBE $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$



Sabendo que a área do polígono $[ABEG]$ é dada, em função de x, por $A(x) = 2(1 + \text{sen}\,x + \cos x)$, recorra à calculadora para determinar **graficamente** as soluções da equação que lhe permite resolver o seguinte problema:
Quais são os valores de x para os quais a área do polígono $[ABEG]$ é 4,3?
Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos**, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos. Apresente os valores pedidos na forma de dízima, arredondados às décimas.

Exame – 2003, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

25. Considere as funções f e g de domínio $\mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = \frac{1}{3} + 2e^{1-x} \qquad\qquad g(x) = 2\,\mathrm{sen}\,x - \cos x$$

Recorrendo à calculadora, determine as soluções inteiras da inequação $f(x) > g(x)$, no intervalo de $[0,2\pi]$.Explique como procedeu.

Exame – 2002, 2.ª Fase (cód. 435)

26. De uma função f, de domínio $[-\pi,\pi]$, sabe-se que a sua **derivada** f' está definida igualmente no intervalo $[-\pi,\pi]$ e é dada por

$$f'(x) = x + 2\cos x$$

O gráfico de f contém um único ponto onde a reta tangente é paralela ao eixo Ox.
Recorrendo à sua calculadora, determine um valor arredondado às centésimas para a abcissa desse ponto.
Explique como procedeu.

Exame – 2002, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

27. Considere a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x + \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{x}$
Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine o número de zeros da função f, no intervalo $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$
Explique como procedeu, apresentando o gráfico, ou gráficos, em que se baseou para dar a sua resposta.

Exame – 2001, Prova para militares (cód. 435)

28. Admita que, num dia de Verão, a temperatura da água de um lago, em graus centígrados, pode ser dada, aproximadamente, por

$$f(t) = 17 + 4\cos\left[\frac{\pi(t+7)}{12}\right]$$

onde t designa o tempo, em horas, decorrido desde as zero horas desse dia.
(Considere que o argumento da função cosseno está expresso em radianos.)
Numa pequena composição, com cerca de quinze linhas, indique como varia a temperatura da água do lago, ao longo do dia.
Não deixe de referir os seguintes aspetos:

- quando é que a temperatura aumenta, e quando é que diminui;
- a que horas é que a temperatura é máxima, e qual é o valor desse máximo;
- a que horas é que a temperatura é mínima, e qual é o valor desse mínimo;
- as melhores horas para se tomar banho, admitindo que um banho só é realmente bom se a temperatura da água não for inferior a 19 graus.

Utilize a calculadora, se considerar que lhe pode ser útil.
Se o desejar, pode enriquecer a sua composição com o traçado de um ou mais gráficos.

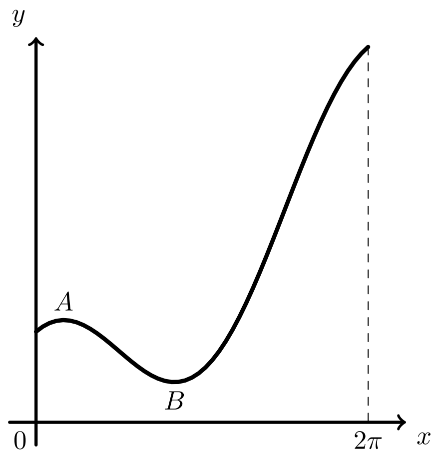
Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)

29. Na figura ao lado está representado o gráfico da função f, de domínio $[0,2\pi]$, definida por $f(x) = x + 2\cos x$.

    A e B são pontos do gráfico cujas ordenadas são extremos relativos de f, e a ordenada do ponto A é $\dfrac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$

    Considere a reta tangente ao gráfico de f no ponto A.

    Essa reta interseta o gráfico num outro ponto C.
    Recorrendo à calculadora, determine um valor aproximado para a abcissa do ponto C (apresente o resultado arredondado às décimas).
    Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).



Exame – 2001, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

30. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & \text{se } x < 0 \\[2mm] \dfrac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\[2mm] \dfrac{\operatorname{sen} x}{2x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Considere a função j, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $j(x) = \dfrac{1}{3x}$

No intervalo $[-1{,}1000\pi]$, os gráficos de j e de h intersetam-se em 1001 pontos.
Destes 1001 pontos, seja A o que tem menor abcissa positiva. Determine as coordenadas desse ponto (apresente os valores na forma de dízima com aproximação às décimas).

Exame – 2001, Prova modelo (cód. 435)

31. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definido por $f(x) = \dfrac{x + 3\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}}{\ln(e^x + 4)}$

    31.1. Sabe-se que existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e que o seu valor é um número inteiro.
    Recorrendo à sua calculadora, conjeture-o. Explique como procedeu.

    31.2. Será conclusivo, para a determinação de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, um método que se baseie exclusivamente na utilização da calculadora? Justifique a sua resposta.

Exame – 2001, Prova modelo (cód. 435)

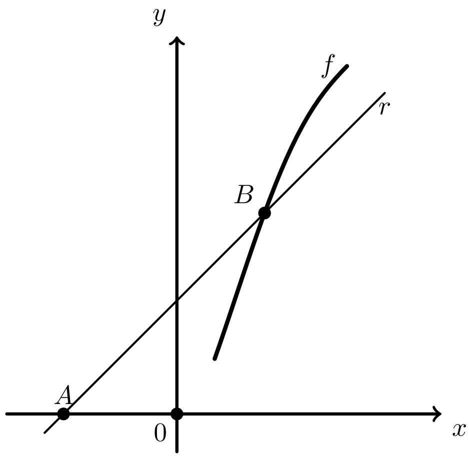
32. Considere a função f de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - \cos x$

Na figura ao lado estão representadas:

- parte do gráfico da função f
- parte de uma reta r, cuja inclinação é 45º, que contém o ponto $A(-3{,}0)$ e que interseta o gráfico da função f no ponto B

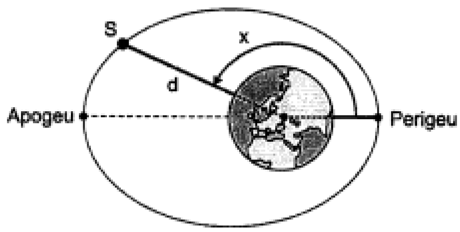
Recorrendo à sua calculadora, determine a área do triângulo $[AOB]$, onde O designa a origem do referencial. Apresente o resultado arredondado às unidades.

Nota: sempre que, nos valores intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, uma casa decimal.



Exame – 2000, 2.ª fase (cód. 435)

33. Um satélite **S** tem uma órbita elíptica em torno da Terra, tal como se representa na figura ao lado.
Tenha em atenção que os elementos nela desenhados não estão na mesma escala.
Na elipse estão assinalados dois pontos:
- o *apogeu*, que é o ponto da órbita mais afastado do centro da Terra;
- o *perigeu*, que é o ponto da órbita mais próximo do centro da Terra;



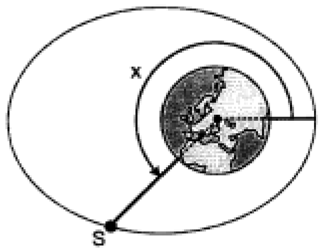
O ângulo x, assinalado na figura, tem o seu vértice no centro da Terra; o seu lado origem passa no *perigeu*, o seu lado extremidade passa no satélite e a sua amplitude está compreendida entre 0 e 360 graus.

A distância d, em km, do satélite ao **centro** da Terra, é dada por $d = \dfrac{7\,820}{1 + 0{,}07 \cos x}$

Num certo instante, o satélite está na **posição indicada na figura ao lado**.

A distância do satélite ao **centro** da Terra é, então, de $8\,200\, km$.

Determine o valor de x, em graus, arredondado às unidades.



Exame – 2000, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

34. No ano de 2000, em Lisboa, o tempo que decorreu entre o nascer e o pôr do Sol, no dia de ordem n do ano, é dado em horas, aproximadamente por

$$f(n) = 12{,}2 + 2{,}64 \operatorname{sen} \frac{\pi(n-81)}{183} \qquad n \in \{1,2,3, \ldots\ldots, 366\}$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos).

Por exemplo: No dia 3 de fevereiro, trigésimo quarto dia do ano, o tempo que decorreu entre o nascer e o pôr do Sol foi de $f(34) \approx 10{,}3$ horas.

Em alguns dias do ano, o tempo entre o nascer e o pôr do Sol é superior a 14,7 horas. Recorrendo à sua calculadora, determine em quantos dias do ano é que isso acontece. Indique como procedeu.

Exame – 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)