

MATEMÁTICA A - 12.º Ano

Probabilidades - Distribuição binomial

Propostas de resolução

Exercícios de exames e testes intermédios

1. Como a experiência se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial ($P(X = k) = {}^n C_k p^k q^{n-k}$).

Temos que:

- $n = 5$ (repete-se o lançamento do dado por cinco vezes).
- $p = \frac{1}{4}$ (a probabilidade do sucesso, ou seja «Sair face 4» é $\frac{1}{4}$, porque o dado tem quatro faces e apenas uma delas tem o número 4).
- $q = \frac{3}{4}$, a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Assim, calculando a probabilidade de sair face 4 exatamente três vezes, e arredondando o resultado às centésimas, temos:

$$P(X = 3) = {}^5 C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \approx 0,09$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2019, Ép. especial

2. Como a experiência se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial ($P(X = k) = {}^n C_k p^k q^{n-k}$).

Temos que:

- $n = 10$ (repete-se esta experiência dez vezes).
- $p = \frac{1}{4}$ (a probabilidade do sucesso, ou seja «Sair face com o número 3» é $\frac{1}{4}$, porque o dado tem quatro faces e apenas uma delas tem o número 3).
- $q = \frac{3}{4}$, a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Assim, calculando a probabilidade de sair face como o número 3 exatamente seis vezes, e arredondando o resultado às milésimas, temos:

$$P(X = 6) = {}^{10} C_6 \left(\frac{1}{4}\right)^6 \left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0,016$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2018, 1.ª Fase



3. Como a experiência se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial ($P(X = k) = {}^n C_k p^k q^{n-k}$).

Temos que:

- $n = 6$ (repete-se esta experiência seis vezes).
- $p = \frac{5}{12}$ (a probabilidade do sucesso, ou seja «Sair bola branca» é $\frac{5}{12}$, porque existem 12 bolas na caixa das quais 5 são brancas)
- $q = \frac{7}{12}$; a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$

Assim, calculando a probabilidade de sair bola branca, pelo menos, duas vezes, e arredondando o resultado às centésimas, temos:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = \\ &= 1 - \left({}^6 C_0 \left(\frac{5}{12} \right)^0 \left(\frac{7}{12} \right)^6 + {}^6 C_1 \left(\frac{5}{12} \right)^1 \left(\frac{7}{12} \right)^5 \right) = 1 - \left(\left(\frac{7}{12} \right)^6 + 6 \times \frac{5}{12} \left(\frac{7}{12} \right)^5 \right) \approx 0,79 \end{aligned}$$

Exame – 2017, Ép. especial

4. Como a experiência se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial ($P(X = k) = {}^n C_k p^k q^{n-k}$).

Temos que:

- $n = 5$ (o Carlos vai executar uma série de cinco lances livres).
- $p = 0,4$ (em cada lance livre, a probabilidade de o Carlos encestar é 0,4)
- $q = 0,6$ (a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - 0,4 = 0,6$)

Assim, calculando a probabilidade de o Carlos encestar exatamente quatro vezes, temos:

$$P(X = 4) = {}^5 C_4 \times 0,4^4 \times 0,6^{5-4} = 0,0768$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2016, 2.ª Fase

5. Como a variável X segue distribuição binomial, na repetição independente de 10 provas da mesma experiência, temos que, a probabilidade do sucesso é a probabilidade de ocorrência do acontecimento definido, ou seja, a probabilidade de que a soma das duas bolas retiradas seja 7, em cada uma das repetições da experiência aleatória.

Como existem 9 bolas no saco, existem ${}^9 C_2$ pares de bolas, que se podem retirar simultaneamente, ou seja, o número de casos possíveis em cada realização da experiência. O número de casos favoráveis é 3 (correspondentes às somas 1+6, 2+5 e 3+4), pelo que a probabilidade é

$$p = \frac{3}{{}^9 C_2} = \frac{1}{12}$$

A ocorrência de n sucessos, implica a ocorrência de $10 - n$ insucessos, pelo que $\frac{11}{12}$, é a probabilidade do insucesso, ou seja, a probabilidade de que não ocorra a soma 7, em cada uma das realizações da experiência aleatória.

A expressão ${}^{10} C_n$ permite considerar que os n sucessos esperados ocorram em qualquer conjunto de n experiências, no universo das 10 realizações, ou seja, o número de posições diferentes na sequência de 10 realizações, em que podem ocorrer os n sucessos.

Exame – 2015, Ép. especial



6. Como a experiência se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial ($P(X = k) = {}^n C_k p^k q^{n-k}$).

Temos que:

- $n = 8$ (o dado é lançado 8 vezes de forma independente).
- $p = \frac{1}{6}$ (a probabilidade do sucesso, ou seja «Sair a face com o número 1» é $\frac{1}{6}$, porque o dado tem 6 faces, das quais apenas uma tem o número 1)
- $q = \frac{5}{6}$, a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Assim, calculando a probabilidade da face com o número 1 sair pelo menos duas vezes, e arredondando o resultado às décimas, temos:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = \\ &= 1 - \left({}^8 C_0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^8 + {}^8 C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^7 \right) = 1 - \left(\left(\frac{5}{6}\right)^8 + 8 \times \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^7 \right) \approx 0,4 \end{aligned}$$

Teste Intermédio 12.º ano – 29.11.2013

7. Como as sucessivas extrações das bolas são feitas repondo a bola extraída anteriormente, cada repetição da experiência é feita de forma independente das restantes.

Definindo o acontecimento «registar número múltiplo de 3» como sucesso, este acontecimento tem probabilidade não nula em cada repetição da experiência e como as repetições são independentes, a probabilidade é constante em cada uma delas.

Assim, para a aplicação do modelo binomial ($P(X = k) = {}^n C_k p^k q^{n-k}$), como o João fará extrações sucessivas até ter registado 8 elementos, temos que a experiência será repetida 8 vezes ($n = 8$).

Como definimos o acontecimento «registar número múltiplo de 3» como sucesso, temos que a probabilidade é $p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ (das 12 bolas, 4 são múltiplos de 3: $M_3 = \{3,6,9,12\}$).

Logo a probabilidade do insucesso é $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Como se pretende calcular a probabilidade de que nas 8 experiências, sejam registados exatamente 5 vezes números múltiplos de 3, temos que $k = 5$.

Assim, temos que:

$$P(X = 5) = {}^8 C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^{8-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times {}^8 C_5$$

Exame – 2013, Ép. especial

8. Como a experiência se repete várias vezes, de forma independente (porque se repõe a bola na caixa após cada extração), a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial ($P(X = k) = {}^n C_k p^k q^{n-k}$).

Temos que:

- $n = 5$ (a experiência é efetuada cinco vezes).
- $p = \frac{2}{5}$ (a probabilidade do sucesso, ou seja "Sair bola preta" é $\frac{2}{5}$, porque existem 2 bolas pretas na caixa, num total de 3)
- $q = \frac{1}{3}$, a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Assim, calculando a probabilidade da ser extraída bola preta, pelo menos, quatro vezes, temos:

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= P(X = 4) + P(X = 5) = {}^5 C_4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + {}^5 C_5 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \\ &= 5 \times \frac{2^4}{3^4} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2^5}{3^5} \times 1 = \frac{5 \times 2^4 \times 1}{3^5} + \frac{2^5}{3^5} = \frac{5 \times 2^4 + 2^5}{3^5} = \frac{112}{243} \end{aligned}$$

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2012



9. Usando o modelo binomial ($P(X = k) = {}^n C_k p^k q^{n-k}$), temos que $n = 5$.

Para o acontecimento I , $p = q = \frac{1}{2}$ e $k = 2$.

Para o acontecimento J , $p = \frac{1}{6}$, pelo que $q = \frac{5}{6}$ e $k = 2$.

Assim, temos que:

- $P(I) = P(X = 2) = {}^5 C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{2^5} = \frac{5}{16} \approx 0,31$
- $P(\bar{I}) = 1 - P(I) = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16} \approx 0,69$
- $P(J) = P(Y = 2) = {}^5 C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 10 \left(\frac{5^3}{6^5}\right) \approx 0,16$
- $P(\bar{J}) = 1 - P(J) = 1 - \frac{10 \times 5^3}{6^5} \approx 0,84$

Logo o acontecimento mais provável é o acontecimento \bar{J} .

Resposta: **Opção D**

Exame – 2011, Ép. especial

10. Como a experiência se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial ($P(X = k) = {}^n C_k p^k q^{n-k}$).

Temos que:

- $n = 3$ (o dado é lançado 3 vezes de forma independente).
- $p = \frac{1}{4}$ (a probabilidade do sucesso, ou seja «Sair a face com o número 1» é $\frac{1}{4}$, porque o dado tem 4 faces, das quais apenas uma tem o número 1)
- $q = \frac{3}{4}$, a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Assim, calculando a probabilidade da face com o número 1, ocorrer 0,1,2 ou 3 vezes, temos:

- $P(X = 0) = {}^3 C_0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 1 \times 1 \times \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$
- $P(X = 1) = {}^3 C_1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{3^2}{4^2} = \frac{3 \times 1 \times 3^2}{4^3} = \frac{27}{64}$
- $P(X = 2) = {}^3 C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = 3 \times \frac{1}{4^2} \times \frac{3}{4} = \frac{3 \times 1 \times 3}{4^3} = \frac{9}{64}$
- $P(X = 3) = {}^3 C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1 \times \frac{1}{4^3} \times 1 = \frac{1}{64}$

Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

Exame – 2011, Prova especial



11. Como a experiência «*Um jovem compra o bilhete*» se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades da variável X: «*Número de jovens que usa o multibanco no pagamento*», segue o modelo binomial ($P(X = k) = {}^n C_k p^k q^{n-k}$).

Temos que:

- $n = 9$ (serão comprados bilhetes 9 vezes de forma independente).
- $p = 0,6$ (é a probabilidade do sucesso, ou seja "O jovem usa o multibanco no pagamento")
- $q = 0,4$, a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - 0,6 = 0,4$

Assim, calculando da ocorrência de 6 sucessos ($k = 6$) no conjunto das 9 repetições da experiência, e arredondando o resultado às centésimas, temos:

$$P(X = 6) = {}^9 C_6 (0,6)^6 (0,4)^3 \approx 0,25$$

Exame – 2011, 1.ª Fase

12. Como a experiência «*Lançar um dado*» se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades da variável X: «*Número de vezes que sai face 4*», segue o modelo binomial

$$(P(X = k) = {}^n C_k p^k q^{n-k})$$

Como $n = 15$, $p = \frac{1}{6}$ e $q = \frac{5}{6}$, temos que:

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{15} - {}^{15} C_1 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{14} &= 1 - \left({}^{15} C_0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{15} + {}^{15} C_1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{14} \right) = \\ &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - P(X < 2) = P(X \geq 2) \end{aligned}$$

Ou seja, a expressão apresentada é o valor da probabilidade do acontecimento: «*A face 4 sai pelo menos duas vezes*».

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 19.01.2011

13. Como a experiência «*O Zé Mão Quente executa um lance livre*» se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades da variável X: «*Número de concretiza o lance livre, num conjunto de 8 lançamentos*», segue o modelo binomial ($P(X = k) = {}^n C_k p^k q^{n-k}$).

Como $n = 8$, considerando como sucesso o acontecimento «*Concretizar o lance livre*», vem $p = 0,9$ e $q = 0,1$, temos que:

$$\begin{aligned} 1 - 0,9^8 - {}^8 C_7 \times 0,9^7 \times 0,1 &= 1 - \left({}^8 C_8 (0,9)^8 (0,1)^0 + {}^8 C_7 (0,9)^7 (0,1)^1 \right) = \\ &= 1 - (P(X = 8) + P(X = 7)) = 1 - P(X \geq 7) = P(X < 7) = P(X \leq 6) \end{aligned}$$

Ou seja, a expressão apresentada é o valor da probabilidade do acontecimento: «*O Zé Mão Quente concretiza no máximo seis lances livres*».

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12.º ano – 04.12.2009

14. Como a experiência «*Lançar um dado*» se repete cinco vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades da variável X: «*Número de vezes que sai face 2*», segue o modelo binomial

$$(P(X = k) = {}^n C_k p^k q^{n-k})$$

Como $n = 5$, $p = \frac{1}{6}$ e $q = \frac{5}{6}$, temos que:

$$P(X = 2) = {}^5 C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0,16$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 29.04.2008



15. Como o Manuel irá repetir 2 vezes a experiência de lançar a bola ao cesto, com probabilidade de sucesso de 70%, a distribuição de probabilidades da variável X: «Número de vezes o Manuel encesta», segue o modelo binomial

$$(P(X = k) = {}^n C_k p^k q^{n-k})$$

Como $n = 2$, $p = 0,7$ e $q = 1 - 0,7 = 0,3$, e pretendemos calcular da probabilidade de o jogo terminar empatado, ou seja, de o Manuela encestar apenas um dos dois lance livres, temos que:

$$P(X = 1) = {}^2 C_1 (0,7)^2 (0,3)^{2-1} = 2 \times 0,7 \times 0,3 = 0,42$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 1999, 2.ª Fase (prog. antigo)

16. Como a experiência «Sair um boneco» se repete sete vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades da variável X: «Número de vezes que sai Rato Mickey», segue o modelo binomial

$$(P(X = k) = {}^n C_k p^k q^{n-k})$$

Como $n = 7$, $p = \frac{1}{3}$ (porque cada um dos 3 bonecos tem igual probabilidade de sair) e $q = \frac{2}{3}$, temos que:

$$P(X = 2) = {}^7 C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{7-2} = {}^7 C_2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 1999, 1.ª Fase – 2.ª chamada (prog. antigo)

17. Como a experiência «Lançar um dado» se repete cinco vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades da variável X: «Número de vezes que sai face seis», segue o modelo binomial

$$(P(X = k) = {}^n C_k p^k q^{n-k})$$

Como $n = 5$, $p = \frac{1}{6}$ e $q = \frac{5}{6}$, temos que:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - {}^5 C_0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 1998, 1.ª Fase – 1.ª chamada (prog. antigo)

18. Como a experiência «Lançar a moeda» se repete dez vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades da variável X: «Número de vezes que sai a face escudo», segue o modelo binomial

$$(P(X = k) = {}^n C_k p^k q^{n-k})$$

Como $n = 10$, $p = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$, temos que:

$$P(X = 4) = {}^{10} C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = {}^{10} C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^{4+6} = {}^{10} C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

Resposta: **Opção A**

Prova modelo – 1998 (prog. antigo)

