MATEMÁTICA A - 12.º Ano
Probabilidades - Distribuições de probabilidades
Propostas de resolução

Exercícios de exames e testes intermédios

1. Como a caixa contém duas bolas brancas e três bolas pretas, num total de cinco e se retiram-se, ao acaso e em simultâneo, duas bolas da caixa, identificando os valores que a variável X pode assumir, e calculando as respetivas probabilidades, temos:

   - 0 - correspondente à extração de duas bolas pretas;
     $P(X=0) = \frac{{}^3C_2}{{}^5C_2} = \frac{3}{10}$
   - 1 - correspondente à extração de uma bola branca e outra preta;
     $P(X=1) = \frac{{}^3C_1 \times {}^2C_1}{{}^5C_2} = \frac{3}{5}$
   - 2 - correspondente à extração de duas bolas brancas;
     $P(X=2) = \frac{{}^2C_2}{{}^5C_2} = \frac{1}{10}$

   Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

   E assim, o valor médio da variável X, é:

   $$\mu = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{3}{5} + \frac{2}{10} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

   Resposta: **Opção B**

   Exame – 2019, 2.ª Fase

2. Organizando todas as somas possíveis numa tabela, temos:

	-1	1	1	1	1	1
-1	-2	0	0	0	0	0
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2

Logo, pela observação da tabela, podemos observar os valores possíveis para a soma e as respetivas probabilidades:

- $P(X = -2) = \frac{1}{36}$
- $P(X = 0) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$
- $P(X = 2) = \frac{25}{36}$

Assim, temos que $P(X = k) = \frac{5}{18}$, para $k = 0$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2019, 1.ª Fase

3. Da análise da tabela de distribuição de probabilidades da variável X podemos verificar que:

$$P(X = 1) = \frac{8}{27}$$

Como o produto dos números saídos nos três lançamentos do dado é 1, o que ocorre apenas se sair face numerada com o número 1 em todos os lançamentos, designado por n o número de faces numeradas com o número 1 no dado, temos que:

$$P(X = 1) = \frac{n}{6} \times \frac{n}{6} \times \frac{n}{6} = \frac{n^3}{6^3} = \frac{n^3}{216}$$

Desta forma podemos calcular o valor de n, resolvendo a equação:

$$\frac{n^3}{216} = \frac{8}{27} \Leftrightarrow n^3 = \frac{8 \times 216}{27} \Leftrightarrow n = \sqrt[3]{\frac{2^3 \times 6^3}{3^3}} \Leftrightarrow n = \frac{2 \times 6}{3} \Leftrightarrow n = \frac{2 \times 2 \times 3}{3} \Leftrightarrow n = 4$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2018, Ép. especial

4. Organizando todos os produtos possíveis numa tabela, temos:

1ª bola \ 2ª bola	0	1	2	3
0	–	0	0	0
1	0	–	2	3
2	0	2	–	6
3	0	3	6	–

Assim podemos observar que os valores que a variável X pode assumir são $k = 0$, ou $k = 2$, ou $k = 6$
Pela observação da tabela temos que: $P(X = 0) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, pelo que $k = 0$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2018, 1ª Fase

5. Temos que:

$$P(X > 1|X \leq 3) = \frac{P(X > 1 \cap X \leq 3)}{P(X \leq 3)} = \frac{P(2 \leq X \leq 3)}{1 - P(X > 3)} = \frac{P(X = 2) + P(X = 3)}{1 - P(X = 4)} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{5}{9}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2017, 2.ª Fase

6. Identificando os valores que a variável X pode assumir, e calculando as respetivas probabilidades, temos:

- 1 - correspondente à extração de duas bolas com o número 1 (1×1);
$P(X = 1) = \frac{{}^4C_2}{{}^9C_2} = \frac{1}{6}$
- 2 - correspondente à extração de uma bola com o número 1 e outra com o número 2 (1×2);
$P(X = 2) = \frac{{}^4C_1 \times {}^4C_1}{{}^9C_2} = \frac{4}{9}$
- 4 - correspondente à extração de uma bola com o número 1 e outra com o número 4 (1×4), ou, correspondente à extração de duas bolas com o número 2 (2×2);
$P(X = 4) = \frac{{}^4C_2}{{}^9C_2} + \frac{{}^4C_1 \times {}^1C_1}{{}^9C_2} = \frac{5}{18}$
- 8 - correspondente à extração de uma bola com o número 2 e outra com o número 4 (2×4);
$P(X = 8) = \frac{{}^4C_1 \times {}^1C_1}{{}^9C_2} = \frac{1}{9}$

(como só existe uma bola com o número 4, não é possível considerar a extração de duas bolas com o número 4)
Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	1	2	4	8
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$

Exame – 2016, 1.ª Fase

7. O valor médio da variável aleatória X é: $\mu = 1 \times a + 2 \times 2a + 3 \times 0{,}4$

   Como, numa distribuição de probabilidades de uma variável aleatória, a soma das probabilidades é 1, vem que
   $$a + 2a + 0{,}4 = 1 \Leftrightarrow 3a = 1 - 0{,}4 \Leftrightarrow 3a = 0{,}6 \Leftrightarrow a = \frac{0{,}6}{3} \Leftrightarrow a = 0{,}2$$
   Assim, substituindo o valor de a no cálculo do valor médio da variável X, vem:
   $$\mu = 1 \times 0{,}2 + 2 \times 2(0{,}2) + 3 \times 0{,}4 = 0{,}2 + 2(0{,}4) + 1{,}2 = 0{,}2 + 0{,}8 + 1{,}2 = 2{,}2$$
   Resposta: **Opção B**

Exame – 2015, 2.ª Fase

8. Como X é o número de bolas azuis retiradas da caixa, a variável X pode tomar os seguintes valores, com as respetivas probabilidades:

   - $X = 0$, se todas as bolas forem pretas (como se retiram 3 bolas e existem 4 pretas, podem ser todas pretas)
     $P(X = 0) = \frac{^4C_3}{^6C_3} = \frac{1}{5}$
   - $X = 1$, se retirarmos 1 bola azul (de entre as 2 que existem) e 2 bolas pretas (de entre as 4 que existem)
     $P(X = 1) = \frac{^2C_1 \times {}^4C_2}{^6C_3} = \frac{3}{5}$
   - $X = 2$, se retirarmos as 2 bolas azuis e 1 das 4 pretas que existem
     $P(X = 2) = \frac{^2C_2 \times {}^4C_1}{^6C_3} = \frac{1}{5}$

   Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

Exame – 2014, 2.ª Fase

9. Como X é o número de bolas retiradas da caixa, até ser retirada uma bola preta, a variável X pode tomar os seguintes valores, com as respetivas probabilidades:

   - $X = 1$, se a primeira bola retirada for preta
     $P(X = 1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
   - $X = 2$, se a primeira não for preta e a segunda sim, sabendo que a primeira que foi retirada não era preta $P(X = 2) = \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
   - $X = 3$, se a primeira não for preta, a segunda também não, sabendo que a primeira também não foi e a terceira ser preta, sabendo que as duas anteriores não o eram
     $P(X = 3) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{6}{7} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{3 \times 2}{7} = \frac{2}{4 \times 7} = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$
   - $X = 4$ se saírem sucessivamente as três bolas que não são pretas, pelo que a quarta bola será necessariamente uma bola preta
     $P(X = 4) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{84}$

   Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{84}$

Exame – 2014, 1.ª Fase

10. Como o valor médio é igual a 2,2 temos que:

$$0 \times a + 2 \times b + 4 \times 0{,}3 = 2{,}2 \Leftrightarrow 2b + 1{,}2 = 2{,}2 \Leftrightarrow 2b = 2{,}2 - 1{,}2 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = 0{,}5$$

Como numa distribuição de probabilidades de uma variável aleatória, a soma das probabilidade é 1, temos que:

$$a + 0{,}5 + 0{,}3 = 1 \Leftrightarrow a + 0{,}8 = 1 \Leftrightarrow a = 1 - 0{,}8 \Leftrightarrow a = 0{,}2$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 29.11.2013

11.

11.1. Como a caixa tem 5 bolas, com os números 1,2,3,4 e 5, ao retirarmos 3 bolas podemos ter 1 bola com número ímpar (se no conjunto das 3 estiverem as bolas com os números 2 e 4); 2 bolas com número ímpar (se no conjunto das 3 estiver uma bola com o número 2 ou com o número 4) ou 3 bolas com número ímpar (se o conjunto das 3 for composto pelas bolas com os números 1, 3 e 5).
Assim, como existem ${}^5C_3 = 10$ conjuntos diferentes de 3 bolas, podemos calcular as probabilidades:

- $P(X=1) = \dfrac{{}^3C_1 \times {}^2C_2}{{}^5C_3} = \dfrac{3}{10}$
- $P(X=2) = \dfrac{{}^3C_2 \times {}^2C_1}{{}^5C_3} = \dfrac{3 \times 2}{10} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$
- $P(X=3) = \dfrac{{}^3C_3 \times {}^2C_0}{{}^5C_3} = \dfrac{1}{10}$

Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

11.2. O valor de $P(Y < 10|X = 1)$ é a probabilidade de que a soma dos números das três bolas retiradas seja inferior a 10, sabendo que no conjunto das três bolas existe apenas uma com um número ímpar.
Como sabemos que no conjunto das três bolas existe apenas 1 com um número ímpar, podemos afirmar que as duas bolas com os números pares foram extraídas, ou seja, existem apenas 3 casos possíveis, que correspondem a cada uma das bolas com número ímpar. Concretamente os três grupos possíveis de bolas são: $\{1,2,4\}$; $\{2,3,4\}$ e $\{2,4,5\}$.
Considerando os três casos possíveis, as respetivas somas são 7 (1+2+4), 9 (2+3+4) e 11 (2+4+5), pelo que dois deles (somas 7 e 9) são favoráveis ao acontecimento em estudo (obter uma soma inferior a 10).
Assim, recorrendo à lei de LaPlace, ou seja calculando a probabilidade como o quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, temos que

$$P(Y < 10|X = 1) = \frac{2}{3}$$

Teste Intermédio 12.º ano – 29.11.2013

12. Existem 12 bolas numeradas de 1 a 12 e só duas delas têm um número múltiplo de 5 (a bola com o número 5 e a bola com o número 10).
Assim, ao retirarmos 3 bolas, podemos ter 0 bolas numeradas com múltiplos de 5, apenas 1 bola numerada com um número múltiplo de 5 ou 2 bolas numeradas com números múltiplos de 5.
Assim, calculando as respetivas probabilidades temos:

- $P(X=0) = \frac{{}^{2}C_0 \times {}^{10}C_3}{{}^{12}C_3} = \frac{1 \times 120}{220} = \frac{120}{220} = \frac{12}{22} = \frac{6}{11}$
- $P(X=1) = \frac{{}^{2}C_1 \times {}^{10}C_2}{{}^{12}C_3} = \frac{2 \times 45}{220} = \frac{90}{220} = \frac{9}{22}$
- $P(X=2) = \frac{{}^{2}C_2 \times {}^{10}C_1}{{}^{12}C_3} = \frac{1 \times 10}{220} = \frac{1}{22}$

Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{6}{11}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{22}$

Exame – 2013, Ép. especial

13. Como $P(X=1) = \frac{3}{5}$, sabemos que $\frac{3}{5}$ dos jornalistas são do sexo feminino, ou seja, $\frac{3}{5} \times 20 = 12$ jornalistas são sexo feminino num total de 20, e por isso, 8 jornalistas do sexo masculino.

Escolhendo, ao acaso, 2 jornalistas, de entre os 20, podemos selecionar grupos, com 0, 1 ou 2 jornalistas do sexo feminino, e as probabilidades são:

- $P(Y=0) = \frac{{}^{12}C_0 \times {}^{8}C_2}{{}^{20}C_2} = \frac{1 \times 28}{190} = \frac{14}{95}$
- $P(Y=1) = \frac{{}^{12}C_1 \times {}^{8}C_1}{{}^{20}C_2} = \frac{12 \times 8}{190} = \frac{96}{190} = \frac{48}{95}$
- $P(Y=2) = \frac{{}^{12}C_2 \times {}^{8}C_0}{{}^{20}C_2} = \frac{66 \times 1}{190} = \frac{33}{95}$

Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória Y é:

y_i	0	1	2
$P(Y=y_i)$	$\frac{14}{95}$	$\frac{48}{95}$	$\frac{33}{95}$

Exame – 2013, 2.ª Fase

14. Sabemos que: $P(X>1) = P(X=2)+P(X=3) = b+b = 2b$,
e que $P(X<2) = P(X=0)+P(X=1) = a+2a = 3a$
Assim $P(X>1) = P(X<2) \Leftrightarrow 2b = 3a \Leftrightarrow b = \frac{3a}{2}$
e também $a+2a+b+b = 1 \Leftrightarrow 3a+2b = 1$

Logo, podemos calcular os valores de a e b:

$$\begin{cases} b = \frac{3a}{2} \\ 3a+2b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3a}{2} \\ 3a+2\times\frac{3a}{2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3a}{2} \\ 3a+3a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2}\times\frac{1}{6} \\ a=\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{12} \\ a=\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{4} \\ a=\frac{1}{6} \end{cases}$$

Assim, calculando o valor médio da variável x, vem:

$$\mu = 0\times a + 1\times 2a + 2\times b + 3\times b = 0+2a+2b+3b = 2a+5b$$

Substituindo os valores de a e de b, temos:

$$\mu = 2\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{4} = \frac{2}{6}+\frac{5}{4} = \frac{1}{3}+\frac{5}{4} = \frac{4}{12}+\frac{15}{12} = \frac{19}{12}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2013, 1.ª Fase

15. Como são retiradas duas bolas, o produto dos números das duas bolas pode ser 0,6 e 9.
Se pelo menos uma dela tiver o número 0 (retirar duas bolas com o número 0, ou, uma com o número 0 e outra com outro número), o produto será 0.
Se as bolas retiradas tiverem os números 2 e 3, o produto será 6.
Se se ambas tiverem o número 3, o produto será 9.

Assim, calculando as probabilidades, temos:

- $P(X=0) = \frac{^4C_2}{^7C_2} + \frac{^4C_1 \times {}^3C_1}{^7C_2} = \frac{6}{21}+\frac{12}{21} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$
- $P(X=6) = \frac{^1C_1 \times {}^2C_1}{^7C_2} = \frac{1\times 2}{21} = \frac{2}{21}$
- $P(X=9) = \frac{^2C_2}{^7C_2} = \frac{1}{21}$

Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	6	9
$P(X=x_i)$	$\frac{6}{7}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2013

16. Como

$P(X=0 \vee X=1) = 0{,}81 \Leftrightarrow P(X=0)+P(X=1) = 0{,}81 \Leftrightarrow 2a+a = 0{,}81 \Leftrightarrow 3a = 0{,}81 \Leftrightarrow a = 0{,}27$

Temos que o valor médio da variável X, é:

$$\mu = -1\times(1-3a) + 0\times 2a + 1\times a = -1+3a+0+a = 4a-1$$

Substituindo o valor de a, vem:

$$\mu = 4\times 0{,}27 - 1 = 0{,}08$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2012, Ép. especial

17. Como o valor médio da variável aleatória X é $\frac{35}{24}$, temos que:

$$\frac{35}{24} = 0 \times b^3 + 1 \times a + 2 \times 2a \Leftrightarrow \frac{35}{24} = 0 + a + 4a \Leftrightarrow \frac{35}{24} = 5a \Leftrightarrow \frac{7 \times 5}{24 \times 5} = a \Leftrightarrow \frac{7}{24} = a$$

Também sabemos que:

$$b^3 + a + 2a = 1 \Leftrightarrow b^3 + 3a = 1 \Leftrightarrow b^3 = 1 - 3a$$

Substituindo o valor de a, temos:

$$b^3 = 1 - 3 \times \frac{7}{24} \Leftrightarrow b^3 = 1 - \frac{21}{24} \Leftrightarrow b^3 = \frac{24}{24} - \frac{21}{24} \Leftrightarrow b^3 = \frac{3}{24} \Leftrightarrow b^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2012, 2.ª Fase

18. Como no saco estão 5 bolas e extraímos 4, temos apenas 5 conjuntos de bolas que podem ser extraídos:

- bolas com os números $\{-2, -1, 0, 1\}$, produto correspondente: $-2 \times (-1) \times 0 \times 1 = 2 \times 0 = 0$
- bolas com os números $\{-2, -1, 0, 2\}$, produto correspondente: $-2 \times (-1) \times 0 \times 2 = 4 \times 0 = 0$
- bolas com os números $\{-2, -1, 1, 2\}$, produto correspondente: $-2 \times (-1) \times 1 \times 2 = 4$
- bolas com os números $\{-2, 0, 1, 2\}$, produto correspondente: $-2 \times 0 \times 1 \times 2 = -4 \times 0 = 0$
- bolas com os números $\{-1, 0, 1, 2\}$, produto correspondente: $-1 \times 0 \times 1 \times 2 = -2 \times 0 = 0$

Ou seja, os produtos possíveis são apenas 0 e 4.
Quando a bola com o número 0 é extraída, o que acontece 4 em cada 5 vezes, o produto é 0, ou seja, $P(X = 0) = \frac{4}{5}$
Quando a bola com o número 0 não é extraída, o que acontece 1 em cada 5 vezes, o produto é 4, ou seja, $P(X = 4) = \frac{1}{5}$

Exame – 2012, 1.ª Fase

19. Como se escolhem 2 alunos de um total de 24, existem ${}^{24}C_2 = 276$ grupos, que podem ter na sua composição 0, 1 ou 2 raparigas.

Calculando as três probabilidades, temos:

- $P(X = 0) = \frac{{}^{10}C_2}{{}^{24}C_2} = \frac{45}{276} = \frac{15}{92}$
- $P(X = 1) = \frac{{}^{10}C_1 \times {}^{14}C_1}{{}^{24}C_2} = \frac{10 \times 14}{276} = \frac{140}{276} = \frac{35}{69}$
- $P(X = 2) = \frac{{}^{14}C_2}{{}^{24}C_2} = \frac{91}{276}$

Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{15}{92}$	$\frac{35}{69}$	$\frac{91}{276}$

Teste Intermédio 12.º ano – 13.03.2012

20. Como $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 2a + a = 3a$ e $P(X=5) = \frac{1}{10}$, temos que:

$$P(X \leq 1) = 3P(X=5) \Leftrightarrow 3a = 3 \times \frac{1}{10} \Leftrightarrow a = \frac{1}{10}$$

Também sabemos que:

$$2a + a + b + b + b + \frac{1}{10} = 1 \Leftrightarrow 3a + 3b = 1 - \frac{1}{10} \Leftrightarrow 3a + 3b = \frac{10}{10} - \frac{1}{10} \Leftrightarrow 3a + 3b = \frac{9}{10}$$

Substituindo o valor de a, temos:

$$3 \times \frac{1}{10} + 3b = \frac{9}{10} \Leftrightarrow 3b = \frac{9}{10} - \frac{3}{10} \Leftrightarrow 3b = \frac{6}{10} \Leftrightarrow b = \frac{\frac{6}{10}}{3} \Leftrightarrow b = \frac{6}{30} \Leftrightarrow b = \frac{1}{5}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2011, 2.ª Fase

21. Como a soma das probabilidades é igual a 1, temos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + a = 1 \Leftrightarrow a = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = \frac{6}{6} - \frac{3}{6} - \frac{2}{6} \Leftrightarrow a = \frac{1}{6}$$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 26.05.2011

22. Como são retiradas duas bolas da caixa, no final podem estar fora da caixa 0 bolas (se tiverem sido retiradas duas bolas brancas); 1 bola (se uma das bolas retiradas for preta - ou a primeira ou a segunda) ou 2 bolas (se as duas bolas retiradas forem pretas).

Calculando as 3 probabilidades, temos:

- Retirar a primeira bola branca, e a segunda também sabendo que a primeira foi reposta:
$P(X=0) = \frac{4}{8} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- Retirar a primeira bola branca, e a segunda preta sabendo que a primeira foi reposta, ou, retirar a primeira bola preta e a segunda branca sabendo que a primeira não foi reposta:
$P(X=1) = \frac{4}{8} \times \frac{4}{8} + \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{4} + \frac{4}{14} = \frac{7}{28} + \frac{8}{28} = \frac{15}{28}$
- Retirar a primeira bola preta, e a segunda também sabendo que a primeira não foi reposta:
$P(X=2) = \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$

Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$

Teste Intermédio 12.º ano – 19.01.2011

23. Como existem 7 perfumes de senhora e são escolhidos 6 ao acaso, podem ser escolhidos 6 perfumes de senhora, e portanto zero perfumes de homem, logo $P(X=0) > 0$, pelo que podemos excluir as opções (B) e (C).

Calculando a probabilidade de escolher 6 perfumes de senhora, do conjunto dos 10, temos:

$$P(X=0) = \frac{{}^{7}C_6}{{}^{10}C_6} = \frac{7}{{}^{10}C_6}$$

Logo, apenas a opção (A) é compatível com este cálculo.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2010, Ép. especial

24. Organizando todas as somas possíveis numa tabela, temos:

Dado B \ Dado A	0	0	0	0	-1	-2
-1	-1	-1	-1	-1	-2	-3
1	1	1	1	1	0	-1
1	1	1	1	1	0	-1
1	1	1	1	1	0	-1
1	1	1	1	1	0	-1
1	1	1	1	1	0	-1

Logo, pela observação da tabela, podemos observar os valores possíveis para a soma e as respetivas probabilidades:

- $P(X=-3)=\frac{1}{36}$
- $P(X=-2)=\frac{1}{36}$
- $P(X=-1)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$
- $P(X=0)=\frac{5}{36}$
- $P(X=1)=\frac{4\times 5}{36}=\frac{4\times 5}{4\times 9}=\frac{5}{9}$

E assim, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	-3	-2	-1	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{9}$

Exame – 2010, 2.ª Fase

25. Como a soma das probabilidades é 1, temos que:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+2a+a=1 \Leftrightarrow 3a=1-\frac{1}{5}-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3a=\frac{10}{10}-\frac{2}{10}-\frac{5}{10} \Leftrightarrow 3a=\frac{3}{10} \Leftrightarrow a=\frac{3}{30} \Leftrightarrow a=\frac{1}{10}$$

Logo, temos que $P(X=2)=2\times\frac{1}{10}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$, e assim

$$P(X=0)=P(X=2)=\frac{1}{5}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2010, 1.ª Fase

26. Organizando todos os produtos possíveis numa tabela, temos:

Bolas	0	0	0	1	1	2
0	–	0	0	0	0	0
0	–	–	0	0	0	0
0	–	–	–	0	0	0
1	–	–	–	–	1	2
1	–	–	–	–	–	2
2	–	–	–	–	–	–

Logo, pela observação da tabela, podemos observar os valores possíveis para a produto e as respetivas probabilidades:

- $P(X=0) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$
- $P(X=1) = \frac{1}{15}$
- $P(X=2) = \frac{2}{15}$

E assim, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2010

27.

27.1. Sabemos que a soma das probabilidades é 1, ou seja:

$$0{,}2+a+0{,}2+b+0{,}1+0{,}15=1 \Leftrightarrow a+b+0{,}65=1 \Leftrightarrow a+b=1-0{,}65 \Leftrightarrow a+b=0{,}35$$

e que $\mu = 3{,}4$, ou seja:

$$1\times 0{,}2+2\times a+3\times 0{,}2+4\times b+5\times 0{,}1+6\times 0{,}15=3{,}4 \Leftrightarrow 0{,}2+2a+0{,}6+4b+0{,}5+0{,}9=3{,}4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a+4b=3{,}4-2{,}2 \Leftrightarrow 2a+4b=1{,}2 \Leftrightarrow a+2b=0{,}6$$

Logo, podemos calcular os valores de a e b:

$$\begin{cases} a+b=0{,}35 \\ a+2b=0{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0{,}35-b \\ 0{,}35-b+2b=0{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0{,}35-b \\ b=0{,}6-0{,}35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0{,}35-0{,}25 \\ b=0{,}25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0{,}1 \\ b=0{,}25 \end{cases}$$

27.2. Temos que:

- $C=\{1{,}3{,}5\}$, logo, $P(C)=P(X=1)+P(X=3)+P(X=5)=0{,}2+0{,}2+0{,}1=0{,}5$
- $D=\{5{,}6\}$, logo, $P(D)=P(X=5)+P(X=6)=0{,}1+0{,}15=0{,}25$
- $C\cap D=\{5\}$, logo, $P(C\cap D)=P(X=5)=0{,}1$

Como os acontecimentos C e D são independentes se, e só se, $P(C)\times P(D)=P(C\cap D)$, temos:

$$\left.\begin{array}{r} P(C)\times P(D)=0{,}5\times 0{,}25=0{,}125 \\ P(C\cap D)=0{,}1 \end{array}\right\} P(C)\times P(D)\neq P(C\cap D)$$

Pelo que podemos afirmar que os acontecimentos C e D **não são independentes**.

Teste Intermédio 12.º ano – 04.12.2009

28. Analisando o número de divisores de cada elemento do conjunto A, temos:

- $D_1 = \{1\}$, ou seja, o número de divisores de 1 é 1
- $D_3 = \{1,3\}$, ou seja, o número de divisores de 3 é 2
- $D_5 = \{1,5\}$, ou seja, o número de divisores de 5 é 2
- $D_6 = \{1,2,3,6\}$, ou seja, o número de divisores de 6 é 4
- $D_8 = \{1,2,4,8\}$, ou seja, o número de divisores de 8 é 4

Assim o número de divisores do elemento escolhido pode ser 1 (que ocorre 1 em cada 5 vezes), 2 (que ocorre 2 em cada 5 vezes) ou 4 (que ocorre 2 em cada 5 vezes), pelo que a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	1	2	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

E o valor médio da variável aleatória X é:

$$\mu = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{2}{5} + 4 \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} + \frac{8}{5} = \frac{13}{5}$$

Exame – 2009, Ép. especial

29. Como a soma das probabilidades é 1, temos que:

$$\frac{k}{8} + \frac{1}{4} + \frac{k}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{k}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2k}{8} = \frac{8}{8} \Leftrightarrow k + 2 + 2k = 8 \Leftrightarrow 3k = 8 - 2 \Leftrightarrow k = \frac{6}{3} \Leftrightarrow k = 2$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2009, 1.ª Fase

30.
- Como, nas faces do dado tetraédrico, 3 é o único número ímpar maior 2, temos que $P(A \cap B) = P(X = 3) = 0{,}4$.
- Como $P(A) = P\left(\overline{A}\right)$ e $P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1$, então $P(A) + P(A) = 1 \Leftrightarrow P(A) = 0{,}5$
  Logo, como $P(A) = P(X = 1) + P(X = 3)$ e $P(X = 3) = 0{,}4$, então
  $0{,}5 = P(X = 1) + 0{,}4 \Leftrightarrow P(X = 1) = 0{,}1$
- Como $P(A \cup B) = 0{,}8$ então $P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.
  $\overline{A \cup B}$ é o conjunto dos números que não são ímpares nem maiores que 2, ou seja o número 2, pelo que $P(X = 2) = 0{,}2$
- Como $P\left(\overline{A}\right) = P(A)$ temos que $P\left(\overline{A}\right) = 0{,}5$ e $P\left(\overline{A}\right) = P(X = 2) + P(X = 4)$, então
  $0{,}5 = 0{,}2 + P(X = 4) \Leftrightarrow P(X = 4) = 0{,}3$

E assim, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,1	0,2	0,4	0,3

Teste Intermédio 12.º ano – 27.05.2009

31. Como a soma das probabilidades é 1, temos que:

$$\frac{3}{n} + \frac{4}{n} + \frac{5}{n} = 1 \Leftrightarrow \frac{12}{n} = 1 \Leftrightarrow 12 = n$$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12.º ano – 11.03.2009

32. Como o valor médio da variável aleatória é 1,4, temos que:

$$0 \times a + 1 \times b + 2 \times 0{,}5 = 1{,}4 \Leftrightarrow 0 + b + 1 = 1{,}4 \Leftrightarrow b = 1{,}4 - 1 \Leftrightarrow b = 0{,}4$$

Logo, como a soma das probabilidades é 1, substituindo o valor calculado para b, vem:

$$a + 0{,}4 + 0{,}5 = 1 \Leftrightarrow a + 0{,}9 = 1 \Leftrightarrow a = 1 - 0{,}9 \Leftrightarrow a = 0{,}1$$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 10.12.2008

33. Analisando produtos dos números das seis faces do dado, temos que o zero está em 4 faces do cubo, pelo que o produto é zero, 4 em cada 6 lançamentos do dado. Ou seja a probabilidade é $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

A face com os números "1-1-1"corresponde a um produto 1, que ocorre 1 em cada 6 lançamentos do dado.

A face com os números "2-2-2"corresponde a um produto 8, que também ocorre 1 em cada 6 lançamentos do dado.

Assim, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	8
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Teste Intermédio 12.º ano – 10.12.2008

34. Como o número de bolas brancas retiradas, num conjunto de três é, no mínimo dois, significa que no saco está apenas uma única bola preta (caso existissem pelo menos duas, poderíamos obter um conjunto de três bolas onde estivessem duas bolas pretas, e por isso apenas uma bola branca, pelo que a variável X tomaria o valor 1, o que não se verifica).

Como o saco contém um total de cinco bolas, e sabemos que o número de bolas pretas é - exatamente - um, logo o número de bolas brancas é quatro ($5 - 1 = 4$).

O saco contém uma bola preta e quatro bolas brancas.

Teste Intermédio 12.º ano – 10.12.2008

35. Como as fichas têm os números 1 e 2, só existem três somas possíveis:

- soma 2: se as duas fichas selecionadas tiverem o número 1 (${}^3C_2$ conjuntos possíveis).
- soma 3: se as duas fichas selecionadas tiverem números diferentes (${}^3C_1 \times {}^4C_1$ conjuntos possíveis).
- soma 4: se as duas fichas selecionadas tiverem o número 2 (${}^4C_2$ conjuntos possíveis).

Logo, como existem ${}^7C_2$ conjuntos diferentes de fichas, podemos calcular os valores da probabilidade associada à ocorrência de cada soma:

- $P(X = 2) = \frac{{}^3C_2}{{}^7C_2} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$
- $P(X = 3) = \frac{{}^3C_1 \times {}^4C_1}{{}^7C_2} = \frac{3 \times 4}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$
- $P(X = 4) = \frac{{}^4C_2}{{}^7C_2} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

E assim, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

Exame – 2008, 2.ª Fase

36. Pela observação da figura, podemos afirmar que o número da face que fica voltada para cima, após cada lançamento é -2 (o que acontece 2 em cada 6 vezes); ou -1 (o que ocorre 1 em cada 6 lançamentos); ou 1 (que se verifica 3 em cada 6 observações).

Logo, podemos calcular os valores da probabilidade associada à cada número:

- $P(X=-2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
- $P(X=-1)=\frac{1}{6}$
- $P(X=1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

E assim, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	-2	-1	1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

Desta forma, calculando o valor médio da variável X, temos:

$$\mu=-2\times\frac{1}{3}+(-1)\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}=-\frac{2}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=-\frac{4}{6}-\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$$

Teste Intermédio 12.º ano – 17.01.2008

37. Pela observação dos valores que a variável X pode tomar, podemos excluir as opções (A) e (B).
Na opção (A), como não existe duas moedas de 20 cêntimos, não é possível obter a quantia de 40 cêntimos com duas moedas, e $P(X=40)\neq 0$.
Da mesma forma, na opção (B), como não existem duas moedas de 10 cêntimos, não é possível obter a quantia de 20 cêntimos com duas moedas, e $P(X=20)\neq 0$.

Como podemos fazer ${}^6C_2$ conjuntos de duas moedas, com as moedas da opção (C), apenas um desses conjuntos resulta numa quantia de 20 cêntimos, e com as moedas da opção (D), são ${}^3C_2=3$ os conjuntos (dos ${}^6C_2$ possíveis) que resultam numa quantia de 20 cêntimos, pelo que temos $P(X=20)=\frac{3}{{}^6C_2}$ apenas na opção (D).

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2007

38. Como a soma das probabilidades é 1, vem:

$$0{,}2+0{,}4+b=1 \;\Leftrightarrow\; 0{,}6+b=1 \;\Leftrightarrow\; b=1-0{,}6 \;\Leftrightarrow\; b=0{,}4$$

Também sabemos que o valor médio da variável aleatória é 2,4, pelo que, temos:

$$0\times 0{,}2+a\times 0{,}4+2a\times b=2{,}4 \;\Leftrightarrow\; 0+0{,}4a+2ab=2{,}4 \;\Leftrightarrow\; a(0{,}4+2b)=2{,}4$$

Logo, substituindo o valor calculado para b, temos:

$$a(0{,}4+2\times 0{,}4)=2{,}4 \;\Leftrightarrow\; a(0{,}4+0{,}8)=2{,}4 \;\Leftrightarrow\; a\times 1{,}2=2{,}4 \;\Leftrightarrow\; a=\frac{2{,}4}{1{,}2} \;\Leftrightarrow\; a=2$$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12.º ano – 07.12.2006

39. Como extraímos uma bola de um conjunto de dez, e só existem bolas com os números 1, 2, e 3, e a variável X é o número da bola extraída, vem que:

- $P(X=1)=\frac{4}{10}=0{,}4$
- $P(X=2)=\frac{5}{10}=0{,}5$
- $P(X=3)=\frac{1}{10}=0{,}1$

Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,4	0,5	0,1

Teste Intermédio 12.º ano – 07.12.2006

40. Como o dado cúbico tem 6 faces e o dado octaédrico tem 8 faces, podemos fazer $6 \times 8 = 48$ pares de faces, equiprováveis, usando uma face de cada dado.

Destas 48, apenas 4 correspondem a pares com soma 5:

Dado cúbico	1	2	3	4
Dado octaédrico	4	3	2	1
Soma	5	5	5	5

Assim,

$$P(X = 5) = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$$

Exame – 2006, Ép. especial

41. Como a soma das probabilidades é 1, vem:

$$a + a + 0{,}4 = 1 \Leftrightarrow 2a + 0{,}4 = 1 \Leftrightarrow 2a = 1 - 0{,}4 \Leftrightarrow 2a = 0{,}6 \Leftrightarrow a = \frac{0{,}6}{2} \Leftrightarrow a = 0{,}3$$

Logo, o valor médio da variável aleatória é:

$$\mu = 0 \times 0{,}3 + 1 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}4 = 0 + 0{,}3 + 0{,}8 = 1{,}1$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2006, 2.ª Fase

42. Como a soma das probabilidades é 1, vem:

$$\frac{{}^{2005}C_{99}}{{}^{2006}C_{100}} + \frac{a}{{}^{2006}C_{100}} = 1 \Leftrightarrow \frac{{}^{2005}C_{99}}{{}^{2006}C_{100}} + \frac{a}{{}^{2006}C_{100}} = \frac{{}^{2006}C_{100}}{{}^{2006}C_{100}} \Leftrightarrow {}^{2005}C_{99} + a = {}^{2006}C_{100}$$

Visualizando estes elementos nas linhas 2005 e 2006 do triângulo de Pascal, temos:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & {}^{2005}C_0 & & {}^{2005}C_1 & & \ldots\ \ldots\ \ldots & & & {}^{2005}C_{99} & & {}^{2005}C_{100} & \ldots \\ {}^{2006}C_0 & & {}^{2006}C_1 & & \ldots\ \ldots\ \ldots & & & {}^{2006}C_{99} & & {}^{2006}C_{100} & & \ldots \end{array}$$

Pelo que podemos afirmar que: ${}^{2005}C_{99} + {}^{2005}C_{100} = {}^{2006}C_{100}$, ou seja, como ${}^{2005}C_{99} + a = {}^{2006}C_{100}$,

$$a = {}^{2005}C_{100}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2006, 1.ª Fase

43. Organizando, numa tabela, todos as somas possíveis, no conjunto dos dois lançamentos, temos:

1º lançamento \ 2º lançamento	1	1	2	2	2	2
1	2	2	3	3	3	3
1	2	2	3	3	3	3
2	3	3	4	4	4	4
2	3	3	4	4	4	4
2	3	3	4	4	4	4
2	3	3	4	4	4	4

Assim temos que as somas possíveis são $X = 2$, $X = 3$ e $X = 4$, e:

$$P(X = 2) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Logo, se $P(X = k) = \frac{1}{9}$, então $k = 2$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 17.03.2006

44. Começamos por construir a tabela de distribuição de probabilidades para a variável
X: número da face saída no lançamento de um dado

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Logo, o valor médio da variável aleatória é:

$$\mu = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = \frac{21}{6}$$

Como o João vai lançar seis mil vezes o dado, e vai adicionar os números saídos, o valor esperado para a soma, e portanto o valor que se espera mais próximo da soma obtida, é:

$$6000 \times \frac{21}{6} = 21\,000$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 07.12.2005

45. Organizando, numa tabela, todos os pares de bolas (com uma bola de cada caixa) que podem ser retirados, temos:

Caixa 2 \ Caixa 1	P	P	V	V	V
P	PP	PP	PV	PV	PV
P	PP	PP	PV	PV	PV
V	VP	VP	VV	VV	VV

Assim, pela observação da tabela, podemos afirmar que o número de bolas verdes retiradas pode ser 0 (o que acontece 4 em cada 15 vezes), 1 (o que ocorre $6 + 2 = 8$ em cada 15 vezes) ou 2 (o que verifica 3 em cada 15 vezes, ou seja, com probabilidade $\frac{1}{5}$), pelo que a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{5}$

Teste Intermédio 12.º ano – 07.12.2005

46. Como $P(X = 0) = \frac{1}{4}$ sabemos que 1 em cada 4 vezes não saí qual face par nos dois lançamentos, ou seja, saí face ímpar nos dois lançamentos.

Como existem tantas faces com número par, como faces com número ímpar, $P(X = 2) = \frac{1}{4}$, ou seja, também 1 em cada 4 vezes saí face par nos dois lançamentos.
Assim, como $P(X = 0) = P(X = 2)$ temos que $b = \frac{1}{4}$

Logo, como a soma das probabilidades é 1, temos que:

$$\frac{1}{4} + a + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow a + \frac{2}{4} = 1 \Leftrightarrow a + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2005, Ép. especial

47. Como o João só tem 1 disco italiano, no conjunto dos 4 discos selecionados, ou existe um disco italiano ($X = 1$), ou não existe nenhum ($X = 0$).
Como existem ${}^{14}C_4$, grupos diferentes de 4 discos, calculando as probabilidades, temos:

- $P(X = 0) = \frac{{}^{13}C_4}{{}^{14}C_4} = \frac{715}{1001} = \frac{5}{7}$ (escolhemos 4 discos dos 13 que não são italianos)
- $P(X = 1) = \frac{{}^{1}C_1 \times {}^{13}C_3}{{}^{14}C_4} = \frac{1 \times 286}{1001} = \frac{2}{7}$ (escolhemos o disco italiano e 3 discos dos restantes 13)

Assim, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$

Exame – 2005, 2.ª Fase

48. Como o valor médio da variável aleatória é 1, vem:

$$0 \times a + 2 \times b + 4 \times b = 1 \Leftrightarrow 0 + 2b + 4b = 1 \Leftrightarrow 6b = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{6}$$

Como a soma das probabilidades é 1, substituindo b por $\frac{1}{6}$, temos que:

$$a + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1 \Leftrightarrow a + \frac{2}{6} = 1 \Leftrightarrow a + \frac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow a = 1 - \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = \frac{3}{3} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2005, 1.ª Fase

49. Como existem 8 bolas dentro da caixa no total, podemos retirar ${}^{8}C_2 = 28$ pares de bolas que podem ser retirados da caixa.

Destes 28 pares,

- ${}^{5}C_2 = 10$ são constituídos por duas bolas brancas, pelo que, se for removido um destes pares, $X = 3$ (ficam 3 bolas brancas na caixa), e $P(X = 3) = \frac{{}^{5}C_2}{{}^{8}C_2} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$
- ${}^{5}C_1 \times {}^{3}C_1 = 5 \times 3 = 15$ são constituídos por uma bola branca e uma bola preta, pelo que, se for removido um destes pares, $X = 4$ (ficam 4 bolas brancas na caixa), e $P(X = 4) = \frac{{}^{5}C_1 \times {}^{3}C_1}{{}^{8}C_2} = \frac{15}{28}$
- ${}^{3}C_2 = 3$ são constituídos por duas bola pretas, pelo que, se for removido um destes pares, $X = 5$ (ficam 5 bolas brancas na caixa), e $P(X = 5) = \frac{{}^{3}C_2}{{}^{8}C_2} = \frac{3}{28}$

Assim, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

Exame – 2004, Ép. especial

50. Como o João tem seis moedas no bolso, retirando duas moedas, o João pode retirar ${}^6C_2 = 15$ conjuntos de duas moedas, que podem somar a quantia de:

- 1 euro, $(X = 1)$, caso as duas moedas sejam de 50 cêntimos.
  Como existem quatro moedas de 50 cêntimos, $P(X = 1) = \frac{{}^4C_2}{{}^6C_2} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$
- 1 euro e 50 cêntimos, $(X = 1{,}5)$, caso as duas moedas sejam uma de 50 cêntimos e a outra de 1 euro.
  Como existem quatro moedas de 50 cêntimos e duas de 1 euro,
  $P(X = 1{,}5) = \frac{{}^4C_1 \times {}^2C_1}{{}^6C_2} = \frac{4 \times 2}{15} = \frac{8}{15}$
- 2 euros, $(X = 2)$, caso as duas moedas sejam uma de 1 euro.
  Como existem duas moedas de 1 euro, $P(X = 2) = \frac{{}^2C_2}{{}^6C_2} = \frac{1}{15}$

Assim, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	1	1,5	2
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

Exame – 2004, 1.ª Fase

51. Como a Patrícia irá comer os bombons até encontrar o que tem licor, caso o encontre na primeira tentativa, não terá comido qualquer bombom sem licor, pelo que $P(X = 0) \neq 0$.
Calculando $P(X = 0)$, ou seja, a Patrícia comer só um bombom (o que tem licor), o que significa que seleciona ao acaso um dos 5 bombons e o bombom selecionado é o único que tem licor, temos:

$$P(X = 0) = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

Pelo que podemos excluir as opções (B), (C) e (D).

Resposta: **Opção A**

Exame – 2003, 2.ª Fase

52. Como na caixa estão três cartões, numerados de 1 a 3, e são extraídos dois em simultâneo, só existem ${}^3C_2 = 3$ pares de cartões que podem ser retirados:

- 1 e 2, sendo o maior o número 2
- 1 e 3, sendo o maior o número 3
- 2 e 3, sendo o maior o número 3

Assim, $P(X = 3) = \frac{2}{3}$, pelo que podemos excluir as opções (B), (C) e (D).

Resposta: **Opção A**

Exame – 2003, 1.ª Fase – 1.ª chamada

53.
- A variável X_1 não tem esta distribuição de probabilidades, porque, como existem 2 faces com cada um dos três números e o dado é equilibrado, temos que: $P(X_1 = -1) = P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{3}$
- A variável X_2não tem esta distribuição de probabilidades, porque, $(-1)^2 = 1$ e por isso a variável X_2 não toma o valor -1, pelo que: $P(X_2 = -1) \neq \frac{2}{9}$
- A variável X_3não tem esta distribuição de probabilidades, porque, $1 + 1 = 2$ e por isso a variável X_3 pode tomar o valor 2, pelo que: $P(X_3 = 2) \neq 0$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2002, 2.ª Fase

54. Como a soma das probabilidades é 1, temos que:

$$a + 2a + a = 1 \;\Leftrightarrow\; 4a = 1 \;\Leftrightarrow\; a = \frac{1}{4}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2002, 1.ª Fase – 1.ª chamada

55.

55.1. Como a caixa só tem bolas pretas e brancas, e se retiram, duas, retirar duas bolas brancas, é equivalente a retirar zero bolas pretas, ou seja, $P(X = 2) = P(Y = 0)$.
Da mesma forma, quando se retira uma bola branca, também se retira uma bola preta, pelo que $P(X = 1) = P(Y = 1)$.
E também, não retirar qualquer bola branca, significa que o número de bolas pretas retiradas é 2, logo, $P(X = 0) = P(Y = 2)$.
Assim, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória Y é:

y_i	0	1	2
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$

55.2. Como no total existem 12 bolas na caixa, e a extração sucessiva é feita repondo a primeira bola, temos um total de $12 \times 12 = 144$ casos possíveis.

Considerando que na caixa existem b bolas brancas, para que $Y = 0$ ou $X = 2$, ou seja, para que sejam retiradas duas bolas brancas, dos 144 casos possíveis, devemos ter $b \times b = b^2$ casos favoráveis.
Como $P(X = 2) = P(Y = 0) = \frac{1}{16}$, temos que:

$$\frac{b^2}{144} = \frac{1}{16} \;\Leftrightarrow\; b^2 = \frac{1 \times 144}{16} \;\Leftrightarrow\; b^2 = 9 \;\Leftrightarrow\; b = \pm 3$$

Logo, na caixa, existem 3 bolas brancas e $12 - 3 = 9$ bolas pretas.

Exame – 2001, Prova para militares

56. Como na caixa existem 5 bombons e apenas 2 têm licor, retirando 3 pode acontecer que nenhum deles tenha licor, ou seja $P(X = 0) \neq 0$.

Como existem ${}^5C_3$ conjuntos de 3 bombons e apenas 1 deles é composto pelos três bombons sem licor (${}^3C_3 = 1$), temos que $P(X = 0) = \frac{1}{{}^5C_3}$. Pelo que podemos excluir as opções (B), (C) e (D).

Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, 1.ª Fase – 1.ª chamada

57. Ao lançar por duas vezes o dado, podem ser observadas faces diferentes de 6 nos dois lançamentos, ou seja, podemos registar zero observações do número 6 no conjunto dos dois lançamentos, pelo que $P(X = 0) \neq 0$.

Como a probabilidade de não sair 6 num dos lançamentos é $\frac{5}{6}$, e o segundo lançamento é independente do primeiro, temos que $P(X = 0) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^2$. Assim podemos excluir as opções (B), (C) e (D).

Resposta: **Opção A**

Exame – 2000, 2.ª Fase