

# MATEMÁTICA A - 12º Ano

## Probabilidades - Distribuição normal

### Propostas de resolução

#### Exercícios de exames e testes intermédios

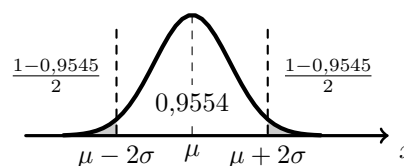
1. Como  $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$ , logo como  $(P(X < \mu - 2\sigma) = P(X > \mu + 2\sigma))$ , temos que:

$$P(X < \mu - 2\sigma) \approx \frac{1 - 0,9545}{2}$$

E assim, vem que:

$$P(X > \mu - 2\sigma) = 1 - P(X < \mu - 2\sigma) \approx 1 - \frac{1 - 0,9545}{2} \approx 0,977$$

Resposta: **Opção C**



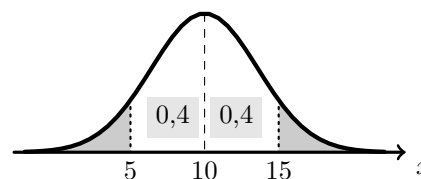
Exame – 2018, 2ª Fase

2. Como a distribuição normal é simétrica em relação ao valor médio (10), temos que:

$$P(\mu < X < \mu + k) = P(\mu - k < X < \mu)$$

e assim:

- $P(5 < X < 10) = P(10 < X < 15) = 0,4$
- $P(5 < X < 15) = P(5 < X < 10) + P(10 < X < 15) = 0,4 + 0,4 = 0,8$
- $P(X < 5 \vee X > 15) = 1 - P(5 < X < 15) = 1 - 0,8 = 0,2$

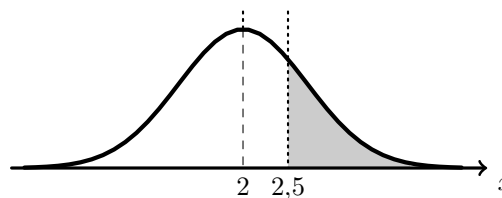


Resposta: **Opção B**

Exame – 2017, Ép. especial

3. Atendendo a que a variável aleatória  $X$  segue uma distribuição normal, com  $\mu = 2$  e  $\sigma = 0,5$ , temos que:

- $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(1,5 < X < 2,5) \approx 0,6827$
- $P(X > \mu + \sigma) = P(X > 2,5) =$   
 $= \frac{1 - P(1,5 < X < 2,5)}{2} \approx \frac{1 - 0,6827}{2} \approx 0,16$



Resposta: **Opção D**

Exame – 2016, Ép. especial

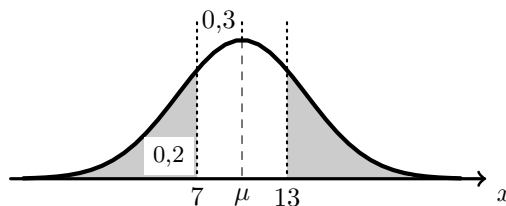


4. Atendendo às características da distribuição normal, temos que:

- $P(X < 10) = 0,5$
- $P(X < 7) = P(X < 10) - P(7 < X < 10) = 0,5 - 0,3 = 0,2$

Logo como a distribuição normal é simétrica em relação ao valor médio e como 7 e 13 são valores equidistantes da média ( $10 - 7 = 3$  e  $13 - 10 = 3$ ), temos que:

$$P(X > 13) = P(X < 7) = 0,2$$

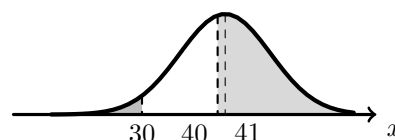
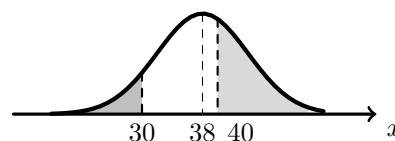
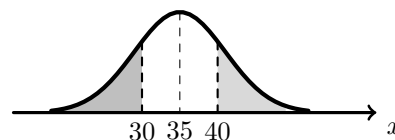
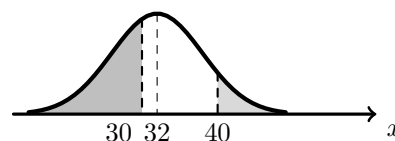


Resposta: **Opção B**

Exame – 2016, 1ª Fase

5. Analisando as hipóteses de respostas, temos:

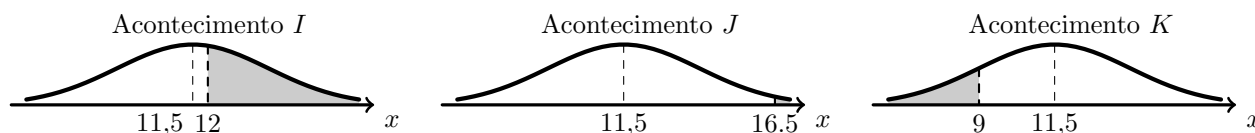
- Se  $\mu = 32$ ,  $P(X < 30) > P(X > 40)$  porque, como 30 está mais próximo do valor médio, e nenhuma das probabilidades excede 0,5, a probabilidade correspondente a  $P(X > 30)$  é maior.
- Se  $\mu = 35$ ,  $P(X < 30) = P(X > 40)$  porque os dois valores são equidistantes da média e a distribuição é simétrica.
- Se  $\mu = 38$ ,  $P(X < 30) < P(X > 40)$  porque, como 40 está mais próximo do valor médio, e nenhuma das probabilidades excede 0,5, a probabilidade correspondente a  $P(X > 40)$  é maior.
- Se  $\mu = 41$ ,  $P(X < 30) < P(X > 40)$  porque,  $P(X > 40) > 0,5$  e  $P(X < 30) < 0,5$



Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12º ano – 29.11.2013

6. Esboçando a representação da representação geométrica das probabilidades dos três acontecimentos, vem:



Assim podemos afirmar que o acontecimento  $I$  é o mais provável e o acontecimento  $J$ , o menos provável, pelo que:

$$P(J) < P(K) < P(I)$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2013, Ép. especial



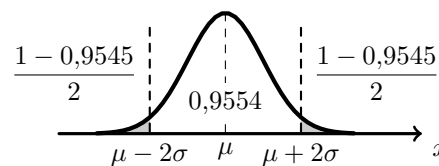
7. Como  $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$ , logo como  $(P(X < \mu - 2\sigma) = P(X > \mu + 2\sigma))$ , temos que:

$$P(X > \mu + 2\sigma) \approx \frac{1 - 0,9545}{2} = 0,02275$$

Assim,  $\mu + 2\sigma = 23$ , e como  $\mu = 11$ , vem:

$$11 + 2\sigma = 23 \Leftrightarrow \sigma = \frac{23 - 11}{2} \Leftrightarrow \sigma = \frac{12}{2} \Leftrightarrow \sigma = 6$$

Resposta: **Opção C**



Exame – 2013, 1ª Fase

8. Como a distribuição normal é simétrica em relação ao valor médio, temos que:

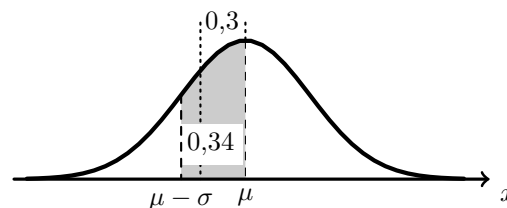
Como  $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$ , então  $P(\mu - \sigma < X) \approx 0,34135$

Assim, como  $P(4,7 < X < 5) = 0,3$ , e  $0,3 < 0,34135$  temos que:

$$4,7 > 5 - \sigma \Leftrightarrow \sigma > 5 - 4,7 \Leftrightarrow \sigma > 0,3$$

Logo a única opção compatível com esta restrição é o valor 0,4

Resposta: **Opção D**



Teste Intermédio 12º ano – 28.02.2013

9. Como a experiência «Analisar um pacote de açúcar» se repete dez vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades da variável X: «Número de pacotes em condições de serem comercializados», segue o modelo binomial ( $P(X = k) = {}^n C_k p^k q^{n-k}$ ).

Considerando como sucesso o acontecimento «Pacote estar em condições de ser comercializado», a respetiva probabilidade, é:

$$p = P(5,7 < Y < 7,3) = P(6,5 - 2 \times 0,4 < Y < 6,5 + 2 \times 0,4) = P(\mu - 2\sigma < Y < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

Logo,  $q = 1 - p = 1 - P(5,7 < Y < 7,3) \approx 1 - 0,9545 = 0,0455$

Assim temos  $n = 10$ , vem  $p \approx 0,9545$  e  $q \approx 0,0455$ , pelo que:

$$P(X = 8) = {}^{10} C_8 \times (0,9545)^8 \times (0,0455)^2 \approx 0,064$$

Exame – 2012, 2ª Fase

10. Como a variável  $X$  segue uma distribuição normal com  $\mu = 6$ , temos que:

- $P(B) = P(X > 6) = P(X > \mu) = 0,5$

- $P(X < 7) = 1 - P(X > 7) = 1 - 0,1 = 0,9$  e  $P(X < 6) = P(X > 6) = 0,5$

Logo  $P(A \cap B) = P(6 < X < 7) = P(X < 7) - P(X < 6) = 0,9 - 0,5 = 0,4$

Assim, recorrendo à fórmula da probabilidade condicional, temos que:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,4}{0,5} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{5}{10}} = \frac{4}{5}$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12º ano – 13.03.2012



11. Como  $a \in \mathbb{R}^+$ , e a variável  $X$  segue uma distribuição normal, com  $\mu = 0$ , sabemos que a distribuição é simétrica relativamente à reta  $x = 0$ .

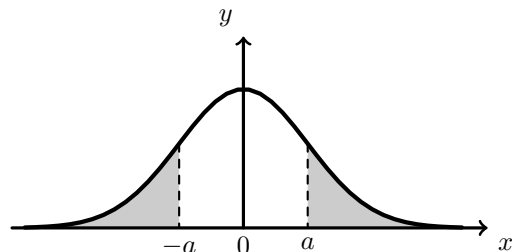
Assim, como  $P(X \geq 0) = P(X \leq 0) = 0,5$ , temos que:

- Como  $a > 0$ , então  $P(X \geq a) < 0,5$ , logo  $P(X \leq -a) < 0,5$
- $P(X \leq a) = 1 - P(X \geq a)$ , pelo que,  $P(X \leq a) > 0,5$  e também  $P(X \geq -a) > 0,5$

Desta forma podemos afirmar que:

- $P(X \leq a) + P(X \geq -a) > 0$
- $P(X \leq a) + P(X \geq -a) < 1$
- $P(X \leq a) > P(X \geq a)$

Como a distribuição é simétrica e  $a$  e  $-a$  são valores equidistantes do valor médio, temos que  $P(X \leq a) = P(X \geq -a)$



Resposta: **Opção B**

Exame – 2011, 2ª Fase

12. Como a variável  $X$  segue uma distribuição normal, com  $\mu = 80$ , temos que:

$P(X < 80) = 0,5$ , logo, como  $P(76 < X < 80) = 0,4$ , temos que

$$P(76 < X < 80) = P(X < 80) - P(X < 76) \Leftrightarrow 0,4 = 0,5 - P(X < 76) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(X < 76) = 0,5 - 0,4 \Leftrightarrow P(X < 76) = 0,1$$

Como a distribuição é simétrica relativamente ao valor médio, temos que  $P(X < 76) = P(X > a)$  e  $\mu - 76 = 80 - 76 = 4$ , logo,

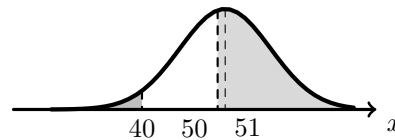
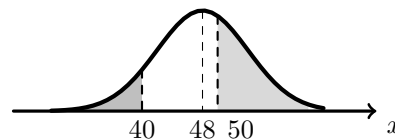
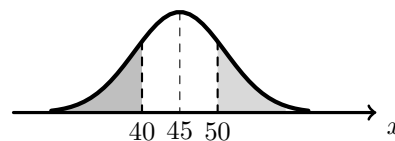
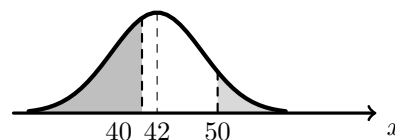
$$a = \mu + 4 \Leftrightarrow a = 80 + 4 \Leftrightarrow a = 84$$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12º ano – 19.01.2011

13. Analisando as hipóteses de respostas, temos:

- Se  $\mu = 42$ ,  $P(X > 50) < P(X < 40)$  porque, como 40 está mais próximo do valor médio, e nenhuma das probabilidades excede 0,5, a probabilidade correspondente a  $P(X < 40)$  é maior.
- Se  $\mu = 45$ ,  $P(X < 50) = P(X > 40)$  porque os dois valores são equidistantes da média e a distribuição é simétrica.
- Se  $\mu = 48$ ,  $P(X < 50) > P(X > 40)$  porque, como 50 está mais próximo do valor médio, e nenhuma das probabilidades excede 0,5, a probabilidade correspondente a  $P(X > 50)$  é maior.
- Se  $\mu = 51$ ,  $P(X < 50) > P(X > 40)$  porque,  $P(X > 50) > 0,5$  e  $P(X < 40) < 0,5$



Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12º ano – 04.12.2009



14. Como a variável  $X$  segue uma distribuição normal, com  $\mu = 5$ , temos que:  
 $P(X \geq 5) = 0,5$ , logo, como  $P(5 \leq X \leq 6) = 0,4$ , temos que

$$P(5 \leq X \leq 6) = P(X \geq 5) - P(X \geq 6) \Leftrightarrow 0,4 = 0,5 - P(X \geq 6) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(X \geq 6) = 0,5 - 0,4 \Leftrightarrow P(X \geq 6) = 0,1$$

Como a distribuição é simétrica relativamente ao valor médio, temos que  $P(X \geq 6) = P(X \leq 4)$  logo  $P(X \leq 4) = 0,1$ , e desta forma,

- Como  $P(X \leq 4) = 0,1$  então  $P(X \geq 4) = 1 - 0,1 = 0,9$ , pelo que  $P(X \geq 2) \geq P(X \geq 4) \Leftrightarrow P(X \geq 2) \geq 0,9$
- $P(4 \leq X \leq 5) = P(5 \leq X \leq 6) = 0,4$
- $P(4 \leq X \leq 6) = P(4 \leq X \leq 5) + P(5 \leq X \leq 6) = 0,4 + 0,4 = 0,8$
- $P(X \leq 4) = P(X \geq 6)$  logo  $P(X \leq 4) = 0,1$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2009, Ép. especial

15. Como a variável aleatória  $X$  segue uma distribuição normal, com  $\mu = 9$ , temos que:  
 $P(9 - 3\sigma < X < 9 + 3\sigma) = 99,73\%$

Como  $P(8,7 < X < 9,3) = 99,73\%$ , temos que  $9 - 3\sigma = 8,7$  e  $9 + 3\sigma = 9,3$

Assim, vem que:  $9 - 3\sigma = 8,7 \Leftrightarrow 9 - 8,7 = 3\sigma \Leftrightarrow 0,3 = 3\sigma \Leftrightarrow 0,1 = \sigma$

(Ou, em alternativa:  $9 + 3\sigma = 9,3 \Leftrightarrow 3\sigma = 9,3 - 9 \Leftrightarrow 3\sigma = 0,3 \Leftrightarrow \sigma = 0,1$ )

Resposta: **Opção A**

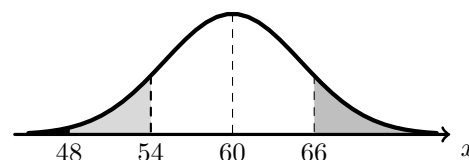
Teste Intermédio 12º ano – 10.12.2008

16. Como a variável aleatória  $X$  segue uma distribuição normal, temos que,  
 $P(X < \mu - k) = P(X > \mu + k)$ ,  $k \in \mathbb{R}^+$ , e como  $\mu = 60$  e  $\sigma = 5$ , vem:

- $P(X > 66) = P(X > 60 + 6) = P(X < 60 - 6) = P(X < 54)$
- Como  $48 < 54 < \mu$ , temos que  $P(X < 48) < P(X < 54)$

Assim, como  $P(A) = P(X < 54)$ , e  $P(B) = P(X < 48)$ , temos

$$P(B) < P(A)$$



Resposta: **Opção C**

Exame – 2008, 1ª Fase

17. Como a variável aleatória  $X$  segue uma distribuição normal, e  $\mu = 2$  temos que:

- $P(X > 1) = P(1 < X < 2) + P(X > 2) > 50\%$
- $P(X > 1,5) = P(1,5 < X < 2) + P(X > 2) > 50\%$
- $P(X > 2) = 50\%$
- $P(X > 2,5) = P(X > 2) - P(2 < X < 2,5) < 50\%$

Logo, de entre os valores de  $a$  apresentados nas opções, 2,5 é o único compatível com  $P(X > a) = 15\%$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12º ano – 17.01.2008



18. Como a variável aleatória  $X$  segue uma distribuição normal, e  $\mu = 140$ , temos que  $P(X \leq 140) = P(X \geq 140) = 50\%$ , logo

- $P(140 \leq X \leq 170) = P(X \geq 140) - P(X \geq 170)$ , logo  $P(140 \leq X \leq 170) < 50\%$
- $P(120 \leq X \leq 140) = P(X \leq 140) - P(X \leq 120)$ , logo  $P(120 \leq X \leq 140) < 50\%$
- $P(130 \leq X \leq 150) = 1 - P(X \leq 130) - P(X \geq 150)$
- $P(150 \leq X \leq 180) = P(X \geq 150) - P(X \geq 180)$ , logo  $P(150 \leq X \leq 180) < 50\%$

Assim, de entre os pares de valores de  $a$  e de  $b$  apresentados nas opções,  $a = 130$  e  $b = 150$  é o único par compatível com  $P(a \leq X \leq b) = 60\%$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12º ano – 07.12.2006

19. Como a variável  $X$  segue uma distribuição normal de valor médio 40, temos que:  $P(X > 45) = P(X < 35)$ . Assim:

- Como  $P(X > 45) = 0,2$  temos que  $P(X < 35) = 0,2$
- Como  $P(X < 40) = 0,5$

Logo,  $P(35 < X < 40) = P(X < 40) - P(X < 35) = 0,5 - 0,2 = 0,3$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12º ano – 07.12.2005

20. Como as duas distribuições são simétricas relativamente à mesma reta, e a distribuição normal é simétrica relativamente ao valor médio, temos que os valores médios das duas distribuições são iguais, ou seja,  $a = c$

Como a distribuição  $N(a,b)$  apresenta observações próximas do valor médio com maior probabilidade associada, verificamos que as observações estão mais concentradas, ou seja a dispersão é comparativamente menor.

Da mesma forma, como a distribuição  $N(c,d)$  apresenta observações mais afastadas do valor médio com maior probabilidade associada, podemos afirmar que as observações estão mais dispersas, ou seja, com dispersão comparativamente maior.

Logo,  $d > b \Leftrightarrow b < d$

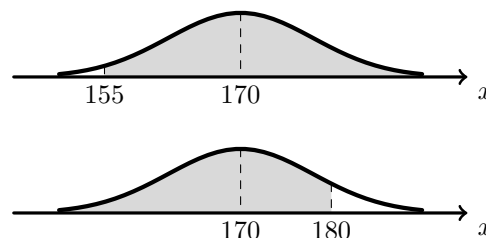
Resposta: **Opção B**

Exame – 2002, 1ª Fase – 2ª chamada

21. Considerando  $X$  a variável aleatória, com valor médio  $\mu = 170$ , temos que:

- $P(X > 180) < 0,5$
- $P(X < 180) > 0,5$
- $P(X > 155) > 0,5$
- $P(X < 155) < 0,5$

Como  $|\mu - 155| > |\mu - 180|$ , ou seja, o valor 155 está mais afastado do valor médio, temos que  $P(X > 155) > P(180)$ .



Resposta: **Opção C**

Prova modelo – 2001

