

Probabilidades (12.º ano)

## Teoremas e operações com conjuntos

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução



1. Como  $P(A \cap \bar{B}) = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,5$ , então:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0,8 = P(B) + 0,5 \Leftrightarrow 0,3 = P(B) \end{aligned}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2023, Ép. especial

2. Temos que:

- Como  $A \cap B = \emptyset$  então  $P(A \cap B) = 0$
- $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0,6 = 0,4$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,6 = P(A) + 0,4 - 0 \Leftrightarrow 0,6 - 0,4 = P(A) \Leftrightarrow 0,2 = P(A)$

E assim:  $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,2 = 0,8$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2022, 1.ª Fase

3. Temos que:

- Pelas leis de De Morgan temos que  $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = \frac{8}{9}$
- Pelo teorema do acontecimento contrário,  $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = \frac{8}{9}$
- Como são independentes ( $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ) vem que  $1 - P(A \cap B) = 1 - (P(A) \times P(B)) = \frac{8}{9}$
- Como os acontecimentos são equiprováveis ( $P(B) = P(A)$ ), vem que  $1 - (P(A) \times P(A)) = \frac{8}{9}$

Assim, resolvendo a equação temos:

$$1 - (P(A) \times P(A)) = \frac{8}{9} \Leftrightarrow (P(A))^2 = 1 - \frac{8}{9} \Leftrightarrow (P(A))^2 = \frac{1}{9} \underset{P(A) > 0}{\Leftrightarrow} P(A) = \sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{3}$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2019, Ép. especial

4. Como  $A$  e  $B$  são acontecimentos equiprováveis, temos que  $P(A) = P(B)$

E como  $A$  e  $B$  são acontecimentos independentes, temos que

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = P(A) \times P(A) = (P(A))^2$$

Logo, como  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ , temos que:

$$0,64 = P(A) + P(A) - (P(A))^2 \Leftrightarrow (P(A))^2 - 2 \times P(A) + 0,64 = 0$$

Finalmente, usando a fórmula resolvente para equações do segundo grau, temos que:

$$P(A) = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 0,64}}{2 \times 1} \Leftrightarrow P(A) = \frac{2 \pm 1,2}{2} \Leftrightarrow P(A) = 1,6 \vee P(A) = 0,4$$

Como  $P(A) \leq 1$ , então temos que  $P(A) = 0,4 = 0,40$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2018, Ép. especial

5. Como  $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = P(B) - P(A \cap B)$  vem que  $P(B) = 1 - 0,7 = 0,3$

Como  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ , temos que:

$$P(A \cap B) = 0,4 + 0,3 - 0,5 = 0,2$$

Finalmente, pelas leis de De Morgan, temos que:

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,2 = 0,8$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2015, 1.ª Fase

6. Usando as leis de DeMorgan, e a probabilidade do acontecimento contrário, temos que:

$P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$  então

$$P(\overline{A \cap B}) = 0,48 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0,48 \Leftrightarrow 1 - 0,48 = P(A \cup B) \Leftrightarrow 0,52 = P(A \cup B)$$

Como  $A$  e  $B$  são acontecimentos independentes, temos que  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ , logo

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Leftrightarrow P(A) \times P(B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Substituindo os valores das probabilidade, vem

$$\begin{aligned} 0,4 \times P(B) &= 0,4 + P(B) - 0,52 \Leftrightarrow 0,52 - 0,4 = P(B) - 0,4 \times P(B) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0,12 &= P(B) \times (1 - 0,4) \Leftrightarrow 0,12 = P(B) \times 0,6 \Leftrightarrow \frac{0,12}{0,6} = P(B) \Leftrightarrow 0,2 = P(B) \end{aligned}$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2014, 2.ª Fase



7. Temos que  $A$  e  $B$  são acontecimentos incompatíveis, logo  $P(A \cap B) = 0$

Como  $P(\overline{A \cap B}) = P(B) - P(A \cap B)$ , e  $P(A \cap B) = 0$ , vem que:  
 $P(\overline{A \cap B}) = P(B)$ , pelo que  $P(B) = 0,55$

Como  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ,  $P(A \cap B) = 0$  e  $P(A) = 0,3$ , temos que:  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,55 = 0,85$

Assim, pelo teorema do acontecimento contrário,  $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,85 = 0,15$

Finalmente, pelas leis de De Morgan, temos que:

$$P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A \cup B}) = 0,15$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2013, Ép. especial

8.  $A$  e  $B$  são independentes se  $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$

Temos ainda que

- $P(B) = 1 - 0,6 = 0,4$ , porque  $P(B) = 1 - P(\overline{B})$
- $P(\overline{A \cup B}) = 0,4$ , porque  $P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A \cup B})$
- $P(A \cup B) = 1 - 0,4 = 0,6$ , porque  $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B})$
- $P(A \cap B) = 0,3 + 0,4 - 0,6 = 0,1$ , porque  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

Assim temos que

$$P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$$

porque  $0,3 \times 0,4 = 0,12 \neq 0,1$

Logo  $A$  e  $B$  não são acontecimentos independentes.

Teste Intermédio 12.º ano – 28.02.2013

9. Como

- $\overline{A \cup (A \cap \overline{B})} = (\overline{A \cup A}) \cap (\overline{A \cup \overline{B}}) = \Omega \cap (\overline{A \cap B}) = \overline{A \cap B}$
- $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$

temos que

$$P(\overline{A \cup (A \cap \overline{B})}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 29.11.2013



10.  $X$  e  $Y$  são independentes se  $P(X) \times P(Y) = P(X \cap Y)$

Observando a figura ao lado, podemos verificar que apenas os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $D$  e  $E$  pertencem ao plano de equação  $y = 0$ , pelo que existem 4 casos favoráveis ao acontecimento  $X$ , num total de 6 casos possíveis, ou seja, recorrendo à Regra de Laplace, temos que

$$P(X) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Analisando as coordenadas dos pontos, podemos verificar que todos os vértices do octaedro têm duas coordenadas nulas, pelo que a soma das coordenadas é igual à coordenada não nula.

Assim temos que os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  têm a coordenada não nula positiva, e por isso a soma das coordenadas é positiva, e para os restantes pontos a coordenada não nula é negativa, e por isso a soma das coordenadas é negativa, pelo que existem 3 casos favoráveis à ocorrência do acontecimento  $Y$ , num total de 6 possíveis, e assim, recorrendo à Regra de Laplace, temos:

$$P(Y) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Temos ainda que o acontecimento  $X \cap Y$  corresponde a selecionar um vértice que pertence ao plano de equação  $y = 0$  e cuja soma das coordenadas seja positiva.

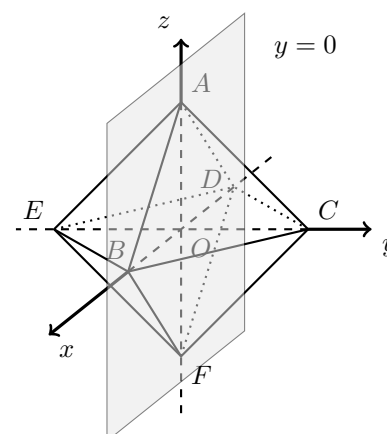
Assim, podemos verificar que apenas os pontos  $A$  e  $B$  verificam simultaneamente as duas condições, pelo que existem 2 casos favoráveis e 6 possíveis, e assim, recorrendo à Regra de Laplace, temos

$$P(X \cap Y) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Assim temos que

$$P(X) \times P(Y) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = P(X \cap Y)$$

Logo  $X$  e  $Y$  são acontecimentos independentes.



Teste Intermédio 12.º ano – 29.11.2013

11. Temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Como  $A$  e  $B$  são independentes, então  $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$ , pelo que, podemos escrever que

$$P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(A) \times P(B) \quad (1)$$

Como  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{10}{10} - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$ , substituindo os valores conhecidos na igualdade (1), vem:

$$\begin{aligned} \frac{3}{10} + P(B) - \frac{3}{4} &= \frac{3}{10} \times P(B) \Leftrightarrow \frac{6}{20} + \frac{20P(B)}{20} - \frac{15}{20} = \frac{6P(B)}{20} \Leftrightarrow 6 + 20P(B) - 15 = 6P(B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 20P(B) - 6P(B) = 15 - 6 \Leftrightarrow 14P(B) = 9 \Leftrightarrow P(B) = \frac{9}{14} \end{aligned}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2012, 1.ª Fase



12. O acontecimento «o aluno é do sexo masculino» pode ser representado por  $\overline{A}$   
 O acontecimento «o aluno não está no 12.º ano» pode ser representado por  $\overline{B}$

Assim, o acontecimento «o aluno é do sexo masculino e não está no 12.º ano» pode ser representado por  $\overline{A \cap B}$

E, pelas leis de De Morgan, temos  $\overline{A \cap B} = \overline{A \cup B}$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2012

13. Se  $A$  e  $B$  são dois acontecimentos incompatíveis, então não podem ocorrer simultaneamente.

Assim, temos que  $A \cap B = \emptyset$ , pelo que  $P(A \cap B) = 0$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12.º ano – 13.03.2012

14. Temos que  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ , e como  $A$  e  $B$  são acontecimentos independentes, vem que  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Assim,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) &\Leftrightarrow P(A \cup B) - P(A) = P(B) - P(A) \times P(B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(A \cup B) - P(A) = P(B)(1 - P(A)) \Leftrightarrow P(A \cup B) - P(A) = P(B) \times P(\overline{A}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{P(A \cup B) - P(A)}{P(\overline{A})} = P(B) \end{aligned}$$

Como  $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,9 = 0,1$ , temos que:

$$P(B) = \frac{0,73 - 0,1}{0,9} = \frac{0,63}{0,9} = 0,7$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2011, Prova especial

15. Como  $A$  e  $B$  são acontecimentos incompatíveis, temos que  $A \cap B = \emptyset$ , ou seja,  $P(A \cap B) = 0$

Pelas leis de De Morgan temos que  $P(\overline{A \cap B}) = 0,3 \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0,3$ , e assim

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0,3 = 0,7$$

Como  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = P(B)$ , calculamos o valor de  $P(B)$ , substituindo os valores conhecidos:

$$P(B) = 0,7 + 0 - 0,5 = 0,2$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2011, Ép. especial



16.  $A$  e  $B$  são independentes se  $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$

Pela Regra de Laplace, como existem 4 cartas do naipe de espadas (número de casos favoráveis, no conjunto das 7 cartas que a Ana introduziu no saco (número de casos possíveis), temos que  $P(A) = \frac{4}{7}$

Da mesma forma, temos como nas 7 cartas existem 2 reis, temos que  $P(B) = \frac{2}{7}$

E assim, vem que

$$P(A) \times P(B) = \frac{4}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{8}{49}$$

Temos ainda que  $P(A \cap B)$  é a probabilidade de retirar o rei de espadas, ou seja, existe apenas 1 carta cuja extração é favorável a este acontecimento, num conjunto de 7 possíveis, pelo que

$$P(A \cap B) = \frac{1}{7}$$

E assim, como  $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$ , podemos afirmar que os acontecimentos  $A$  e  $B$  não são independentes.

Teste Intermédio 12.º ano – 19.01.2011

17. Como  $P(\overline{B}) = 0,3$ , pelo teorema  $P(X) = 1 - P(\overline{X})$ , temos que:

$$P(B) = 1 - 0,3 = 0,7$$

Assim, pelo teorema  $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$ , temos que:

$$P(A \cup B) = 0,4 + 0,7 - 0,3 = 0,8$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2010, Ép. especial

18. Como a probabilidade de pelo menos, uma das amigas telefonar à sua mãe, é  $P(A \cup B)$   
Como os acontecimentos  $A$  e  $B$  são independentes, temos que  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$   
Assim, pelo teorema  $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$ , temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

Pelo que

$$P(A \cup B) = 0,7 + 0,8 - 0,7 \times 0,8 = 0,94$$

Apresentando o valor da probabilidade calculada em percentagem, temos  $P(A \cup B) = 94\%$

Exame – 2010, Ép. especial

19. Como  $A$  e  $B$  são acontecimentos incompatíveis, temos que  $A \cap B = \emptyset$ , ou seja,  $P(A \cap B) = 0$

Como  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = P(B)$ , calculamos o valor de  $P(B)$ , substituindo os valores conhecidos:

$$P(B) = 70\% + 0\% - 30\% = 40\%$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2010, 1.ª Fase



20. Como  $A$  e  $B$  são acontecimentos independentes, então

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,5 = 0,2$$

E assim temos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,5 - 0,2 = 0,7$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2010

21. Como  $P(A) = 0,5$  e  $P(B) = 0,7$ , temos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,7 - P(A \cap B) = 1,2 - P(A \cap B)$$

Logo, como  $P(A \cup B) \leq 1$ , então  $P(A \cap B) > 0$

Como  $P(A \cap B) > 0$  então  $A \cap B \neq \emptyset$ , ou seja,  $A$  e  $B$  são acontecimentos compatíveis.

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 10.12.2008

22.  $R$  e  $S$  são independentes se  $P(R) \times P(S) = P(R \cap S)$

Recorrendo à Regra de Laplace, e verificando que o dado tem 2 faces com os números todos iguais (número de casos favoráveis) num total de 6 (número de casos possíveis), podemos calcular a probabilidade do acontecimento  $R$ :

$$P(R) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Da mesma forma, observando que o dado tem 2 faces em que a soma dos três algarismos é 3 ( $1 + 1 + 1 = 3$  e  $2 + 1 + 0 = 3$ ) num total de 6 faces, temos que a probabilidade do acontecimento  $S$  é

$$P(S) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Assim vem que

$$P(R) \times P(S) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Temos ainda que o acontecimento  $R \cap S$  corresponde a «os números saídos são todos iguais, e a sua soma é igual a 3», pelo que existe apenas uma face do dado ( $1 + 1 + 1 = 3$ ) que é favorável à ocorrência do acontecimento  $R \cap S$ , e assim vem que

$$P(R \cap S) = \frac{1}{6}$$

Desta forma, verificámos que  $P(R) \times P(S) \neq P(R \cap S)$ , pelo que os acontecimentos  $R$  e  $S$  não são independentes.

Teste Intermédio 12.º ano – 10.12.2008



23. Como se pretende calcular a probabilidade de o estudante escolhido não ser rapaz ou não ter tido classificação positiva, para utilizar a igualdade  $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A}) - P(B) + P(A \cup B)$ , podemos definir os acontecimentos

- $A$ : O estudante escolhido ser rapaz
- $B$ : O estudante escolhido ter tido classificação positiva

E assim,  $\overline{A \cup B}$  é o acontecimento "o estudante escolhido não ser rapaz ou não ter tido classificação positiva".

Temos que o número de casos possíveis é  $160 + 120 = 280$ , correspondendo ao número total de estudantes que realizaram o exame (160 raparigas e 120 rapazes).

- O número de casos favoráveis para o acontecimento  $\overline{A}$  é 160, correspondendo ao número de raparigas. E assim temos que  $P(\overline{A}) = \frac{160}{280}$
- O número de casos favoráveis para o acontecimento  $B$  é  $160 \times 0,65 + 120 \times 0,6 = 176$ , correspondendo a 65% das raparigas e 60% dos rapazes. E assim temos que  $P(B) = \frac{176}{280}$
- O número de casos favoráveis para o acontecimento  $A \cup B$  é  $120 + 160 \times 0,65 = 224$ , correspondendo à soma do número de rapazes com 65% das raparigas que teve positiva. E assim temos que  $P(A \cup B) = \frac{224}{280}$

Logo, calculando a probabilidade de o estudante escolhido não ser rapaz ou não ter tido classificação positiva, e apresentando o resultado em forma de dízima, com aproximação às centésimas, vem

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A}) - P(B) + P(A \cup B) = \frac{160}{280} - \frac{176}{280} + \frac{224}{280} = \frac{208}{280} \approx 0,74$$

Exame – 2008, 2.ª Fase

24. Como

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) = P(A)$$

Vem que

$$P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) = 80\% - 60\% + 10\% = 30\%$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2008, 1.ª Fase

25. Definindo os acontecimentos

- $X$ : «tirar um iogurte de pêsego»
- $Y$ : «tirar um sumo de laranja»

Temos que  $a = P(X) = \frac{1}{5}$ ,  $b = P(Y) = \frac{1}{3}$  e admite-se que  $X$  e  $Y$  são independentes.

Como a probabilidade de que não ocorra  $X$  nem ocorra  $Y$  é igual a  $1 - a - b + a \times b$ , temos que a probabilidade (na forma de fração irredutível) de, ao tirar, ao acaso, um iogurte e um sumo do frigorífico, o iogurte não ser de pêsego e o sumo não ser de laranja é:

$$1 - a - b + a \times b = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{15}{15} - \frac{3}{15} - \frac{5}{15} + \frac{1}{15} = \frac{8}{15}$$

Exame – 2007, 2.ª Fase





26.  $A$  e  $B$  são acontecimentos independentes se

$$P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$$

Assim, sabemos que existem  $9 \times 9 \times 9 = 9^3$  Algarismos diferentes que se podem formar com os nove algarismos.

Calculando a probabilidade dos acontecimentos  $A$ ,  $B$  e  $A \cap B$  temos:

- Apenas os números cujo algarismo das unidades é 5 são múltiplos de 5, pelo que existem  $9 \times 9 \times 1 = 9^2$  números diferentes que são múltiplos de 5, e assim vem que  $P(A) = \frac{9^2}{9^3} = \frac{1}{9}$
- Existem  $9 \times 8 \times 7$  números cujos algarismos são todos diferentes, pelo que  $P(B) = \frac{9 \times 8 \times 7}{9^3} = \frac{56}{9^2}$
- Os números que são múltiplos de cinco e cujos algarismos são todos diferentes são  $8 \times 7 \times 1 = 56$ , pelo que  $P(A \cap B) = \frac{56}{9^3}$

Assim, como

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{9} \times \frac{56}{9^2} = \frac{56}{9^3} = P(A \cap B)$$

podemos afirmar que  $A$  e  $B$  são acontecimentos independentes.

Exame – 2007, 1.ª Fase

27. Como

$$(A \cup B) \cap C = \emptyset \Leftrightarrow (A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset \Leftrightarrow A \cap C = \emptyset \wedge B \cap C = \emptyset$$

E assim, como  $A \cap C = \emptyset$ , então  $P(A \cap C) = 0$ , pelo que

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = 0,21 + 0,47 - 0 = 0,68$$

Exame – 2007, 1.ª Fase

28. Como  $A \subset B$ , então  $A \cup B = B$ , pelo que

$$P[(A \cup B) \cap \overline{B}] = P(B \cap \overline{B}) = P(\emptyset) = 0$$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 07.12.2006

29. Como  $A$  e  $B$  são acontecimentos independentes, então  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ , pelo que, substituindo os valores conhecidos vem

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = P(A) \times \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = P(A)$$

E assim, calculando o valor de  $P(A \cup B)$  e apresente o resultado na forma de fração irredutível, temos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} - \frac{6}{12} = \frac{11}{12}$$

Teste Intermédio 12.º ano – 07.12.2006



30. Como se pretende que  $P(A \cap B) = P(A)$ , então  $A \cap B = A$ , ou seja  $A \subset B$

No âmbito da experiência descrita, podemos definir os acontecimentos, nem impossíveis nem certos, tais que  $A \neq B$  e  $P(A \cap B) = P(A)$ :

- $A$ : O produto dos dois números saídos é 48
- $B$ : O produto dos dois números saídos é um número par

Exame – 2006, Ép. especial

31. Relativamente à Opção 1, como todos os alunos da turma têm 16 ou 17 anos ou mais do que 17 anos, vem que  $X \cup Y = \Omega$ , pelo que  $P(X \cup Y) = 1$ , e assim a afirmação  $P(X \cap Y) < 1$  é falsa.

Relativamente à Opção 2, temos que os alunos da turma cuja idade é par ou um múltiplo de 4, são exatamente os mesmos cuja idade é par, pelo que  $X \cup Y = X$ , e assim a afirmação  $P(X \cup Y) > P(X)$  é falsa.

Relativamente à Opção 3, como não existem raparigas de 18 anos na turma, vem que  $X \cap Y = \emptyset$ , pelo que  $P(X \cap Y) = 0$ , e assim a afirmação  $P(X \cap Y) > 0$  é falsa.

Temos assim que, relativamente à Opção 4, as três afirmações são verdadeiras.

Exame – 2006, 2.ª Fase

32. Como  $A = A \cup B \vee A \subset (A \cup B)$ , então  $P(A) \leq P(A \cup B) \Leftrightarrow P(A \cup B) \geq P(A) \Leftrightarrow P(A \cup B) \geq 0,3$

Como  $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,3 = 0,7$  e  $\bar{A} = \bar{A} \cup \bar{B} \vee \bar{A} \subset (\bar{A} \cup \bar{B})$ , então  $P(\bar{A}) \leq P(\bar{A} \cup \bar{B}) \Leftrightarrow P(\bar{A} \cup \bar{B}) \geq P(\bar{A}) \Leftrightarrow P(\bar{A} \cup \bar{B}) \geq 0,7$

Como  $A \cap B = A \vee (A \cap B) \subset A$ , então  $P(A \cap B) \leq P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq 0,3$

Como  $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$  e  $P(A \cap B) \leq 0,3$ , vem que  $P(\overline{A \cap B}) > 1 - 0,3 \Leftrightarrow P(\overline{A \cap B}) > 0,7$

Assim temos que o único acontecimento que pode ter probabilidade inferior a 0,3 é o acontecimento  $A \cap B$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2006, 1.ª Fase

33. Como o acontecimento  $A \cup B$  corresponde a selecionar uma rapariga ou um aluno que não usa óculos, vem que o acontecimento contrário de  $A \cup B$ , é «selecionar um rapaz e um aluno que usa óculos», ou mais simplesmente

O aluno é um rapaz e usa óculos

Resposta: **Opção A**

Exame – 2005, Ép. especial



34. Recorrendo a um contra-exemplo, considerando a experiência aleatória de lançar uma moeda ao ar e considerando os acontecimentos
- $X$ : Sair cara
  - $Y$ : Sair coroa

Temos que  $P(X \cap Y) = 0$ , mas nem o acontecimento  $X$  é impossível, nem o acontecimento  $Y$  é impossível.

Resposta: **Opção D**

Exame – 2005, 1.ª Fase

35. Como  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = P(B)$ , calculamos o valor de  $P(B)$ , substituindo os valores conhecidos:

$$P(B) = 0,8 + 0,1 - 0,3 = 0,6$$

E assim,

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,6 = 0,4$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2004, 2.ª Fase

36. Dois acontecimentos  $A$  e  $B$  são incompatíveis se  $A \cap B = \emptyset$ , ou seja se  $P(A \cap B) = 0$ . E assim temos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A) + P(B) = P(A \cup B)$$

Dois acontecimentos  $A$  e  $\overline{A}$  são contrários se

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \Leftrightarrow P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2004, 1.ª Fase

37. Como o saco contém bolas azuis, brancas e pretas, ao retirar, ao acaso, uma bola do saco, ela pode ser azul, branca ou preta.

Assim o contrário do acontecimento  $A$  é o acontecimento  $\overline{A}$  - a bola retirada não é azul, ou seja, a bola retirada é branca ou preta.

O acontecimento contrário de  $\overline{B}$  é o acontecimento  $B$ .

Os acontecimentos  $A$  e  $B$  não podem ocorrer simultaneamente, porque só é retirada uma bola, e cada bola só tem uma cor, pelo que são incompatíveis.

Quando é retirada uma bola azul, é também "não branca", pelo que os acontecimentos  $A$  e  $\overline{B}$  ocorrem simultaneamente, ou seja, não são incompatíveis.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2003, 1.ª Fase – 2ª chamada



38. Como  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ , vem que

$$P(A \cup B) = 0,3 + 0,5 - P(A \cap B) = 0,8 - P(A \cap B)$$

- Como  $P(A \cap B) \geq 0$  então  $P(A \cup B) \leq 0,8$
- Como  $(A \cap B) \subset A$ , então  $P(A \cap B) \leq P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq 0,3$   
E assim,  $P(A \cup B) = 0,8 - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) \geq 0,8 - 0,3 \Leftrightarrow P(A \cup B) \geq 0,5$

Pelo que podemos afirmar que

$$0,5 \leq P(A \cup B) \leq 0,8$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2003, 1.ª Fase – 1ª chamada

39. Fazendo a contagem dos alunos que têm dezasseis anos ou são raparigas, temos  $5 + 2 + 4 + 4 = 15$  casos favoráveis, num conjunto de 25 casos possíveis, pelo que, recorrendo à Regra de Laplace, e apresentando o resultado na forma de fração irredutível temos

Idade	Rapazes	Raparigas
15	4	2
16	5	4
17	6	4

$$p = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

\*\*\* Outra resolução: \*\*\*

Definindo os acontecimentos

- $D$ : O aluno selecionado ter 16 anos
- $R$ : O aluno selecionado ser rapariga

Temos que  $P(D) = \frac{5+4}{25} = \frac{9}{25}$ ;  $P(R) = \frac{2+4+4}{25} = \frac{10}{25}$  e

$P(D \cap R) = \frac{4}{25} = \frac{10}{25}$  e assim, a probabilidade, na forma de fração irredutível, de que o representante, escolhido ao acaso, que tenha dezasseis anos ou seja uma rapariga é

$$P(D \cup R) = P(D) + P(R) - P(D \cap R) = \frac{9}{25} + \frac{10}{25} - \frac{4}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

Exame – 2002, Prova para militares

40. Definindo os acontecimentos

- $A$ : «O António acerta no alvo»
- $B$ : «O Belmiro acerta no alvo»

Como  $A$  e  $B$  são acontecimentos independentes, temos que

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,7 \times 0,8 = 0,42$$

Como o alvo é atingido se ocorrer o acontecimento  $A$  ou o acontecimento  $B$ , temos que a probabilidade de o alvo ser atingido é

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,7 - 0,42 = 0,88$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2001, Ép. especial



41. Definindo os acontecimentos

- $A$ : A bola retirada é amarela
- $N$ : A bola retirada é tem o número 1

Temos que a bola amarela número 1 está no saco é equivalente a  $P(A \cap N) > 0$

Como sabemos que  $P(A) \geq 0,5$ ,  $P(N) = 0,25$  e  $P(A \cup N) = 0,625$ , então

$$P(A \cap N) = P(A) + P(N) - P(A \cup N) = 0,5 + 0,25 - 0,625 = 0,125$$

E assim podemos concluir que a probabilidade de extrair a bola amarela com o número 1 é superior a zero, ou seja a bola amarela com o número 1 está no saco.

Exame – 2001, 1.<sup>a</sup> Fase – 1.<sup>a</sup> chamada

42. Como  $A \subset B$ , então

- $P(A) \leq P(B)$
- $(A \cap B) = A$ , pelo que  $P(A \cap B) = P(A)$  (e  $P(A) \neq 0$  porque  $A$  não é um acontecimento impossível)
- $(A \cup B) = B$ , pelo que  $P(A \cup B) = P(B)$  (e  $P(B) \neq 1$  porque  $B$  não é um acontecimento certo)
- Como  $P(A) \leq P(B)$ ,  $P(A) = 1 - P(\bar{A})$  e  $P(B) = 1 - P(\bar{B})$  então

$$P(A) \leq P(B) \Leftrightarrow 1 - P(\bar{A}) \leq 1 - P(\bar{B}) \Leftrightarrow -P(\bar{A}) \leq -P(\bar{B}) \Leftrightarrow P(\bar{A}) \geq P(\bar{B})$$

Resposta: **Opção D**

Prova modelo – 2001

43. O acontecimento  $A \cup B$  corresponde a «sair face ímpar ou número maior ou igual a 4», o que corresponde a verificar-se a ocorrência das faces 1, 3, 4, 5, ou 6

Assim o acontecimento contrário de  $A \cup B$  corresponde a «não sair uma das faces 1, 3, 4, 5 ou 6», o que significa

«sair face 2»

Resposta: **Opção C**

Exame – 2000, 1.<sup>a</sup> Fase – 1.<sup>a</sup> chamada

