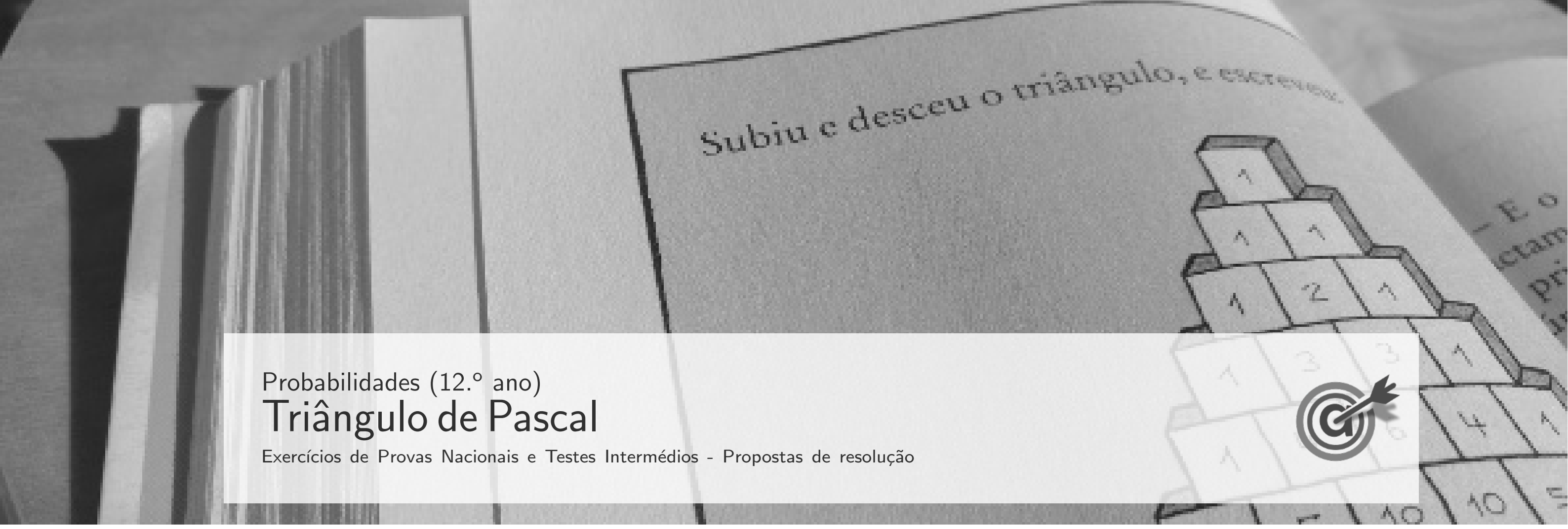

Probabilidades (12.º ano)

Triângulo de Pascal

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução

1. Como a soma de todos os elementos da linha n do triângulo de Pascal é 2^n, sabemos que: $2^n = 16\,384$ e como $2^{14} = 16\,384$ temos que $n = 14$

   Assim, o quarto elemento da linha seguinte $(n+1=15)$, é ${}^{15}C_3 = 455$

   Resposta: **Opção B**

   Exame – 2022, 2.ª fase

2. Como a soma dos dois últimos elementos da linha do triângulo de Pascal é 35, e o último número é 1, sabemos que o penúltimo número é $35-1=34$. Logo os elementos desta linha são todos da forma ${}^{34}C_k$, pelo que esta linha do triângulo de Pascal tem 35 elementos $({}^{34}C_0; {}^{34}C_1; {}^{34}C_2; {}^{34}C_3; \ldots; {}^{34}C_{34})$

   Como se trata de uma linha com um número ímpar de elementos, e pela simetria do triângulo de pascal podemos dividir estes elementos em dois grupos de 17 elementos (iguais dois a dois) e o número que ocupa a posição central, diferente de todos os restantes.

   Assim, escolhendo, ao acaso, dois elementos desta linha, podemos formar ${}^{35}C_2$ pares de números (casos possíveis), sendo que apenas 17 destes pares são compostos por números iguais (casos favoráveis), ou seja, o valor da probabilidade, na forma decimal, arredondado às centésimas, é :

$$\frac{17}{{}^{35}C_2} = 0{,}03$$

   Exame – 2018, Ép. especial

3. A linha do triângulo de Pascal em que a soma dos dois primeiros elementos com os dois últimos elementos é igual a 20, como o primeiro e o último números são 1, a soma do segundo com o penúltimo é 18, sendo estes iguais entre si, e por isso iguais a $\frac{18}{2} = 9$.
   Na linha do triângulo de Pascal em que o segundo elemento é 9, os elementos são da forma ${}^{9}C_k$, pelo que, recorrendo à calculadora, podemos verificar a composição da linha:

$$1 \;\; 9 \;\; 36 \;\; 84 \;\; 126 \;\; 126 \;\; 84 \;\; 36 \;\; 9 \;\; 1$$

   Assim, escolhendo, ao acaso, um elemento desta linha, a probabilidade de ele ser par é $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

   Resposta: **Opção C**

   Exame – 2014, Ép. especial

4. Como a soma de todos os elementos da linha n do triângulo de Pascal é 2^n, sabemos que: $2^n = 256$ e como $2^8 = 256$ temos que $n = 8$

   Assim, o terceiro elemento da linha 8, é ${}^8C_2 = 28$

   Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 29.11.2013

5. O segundo e o penúltimo números de qualquer linha do triângulo de Pascal são iguais.
   Assim, se o produto do segundo elemento pelo penúltimo elemento de um linha é 484, podemos calcular o valor de ambos:
$$a \times a = 484 \;\Leftrightarrow\; a^2 = 484 \;\Leftrightarrow\; a = \sqrt{484} \;\Leftrightarrow\; a = 22$$
   Assim, temos que a linha em causa tem 23 elementos da forma ${}^{22}C_n$.
   Logo só existem 6 elementos desta linha que são inferiores a 1000:
   ${}^{22}C_0 = {}^{22}C_{22}(= 1)$; ${}^{22}C_1 = {}^{22}C_{21}(= 22)$ e ainda ${}^{22}C_2 = {}^{22}C_{20}(= 231)$
   Porque
   ${}^{22}C_3 = {}^{22}C_{19} = 1540$ e todos os restantes são superiores a estes.

   Logo, sabemos que existem $23 - 6 = 17$ elementos superiores a 1000 num total de 23, ou seja, o valor da probabilidade é $\frac{17}{23}$

   Resposta: **Opção C**

Exame – 2013, 2.ª Fase

6. Como o penúltimo elemento da linha do triângulo de Pascal é 111, sabemos que essa linha tem 112 elementos, todas da forma ${}^{112}C_n$.

   Logo só existem 6 elementos desta linha que são inferiores a 10^5:
   ${}^{111}C_0 = {}^{111}C_{111}(= 1)$; ${}^{111}C_1 = {}^{111}C_{110}(= 111)$ e ainda ${}^{111}C_2 = {}^{111}C_{109}(= 6105)$
   Porque
   ${}^{111}C_3 = {}^{111}C_{108} = 221\,815$ e todos os restantes são superiores a estes.

   Logo, sabemos que existem $112 - 6 = 106$ elementos superiores a 10^5, num total de 112, ou seja, o valor da probabilidade é $\frac{106}{112} = \frac{53}{56}$

   Resposta: **Opção B**

Exame – 2012, 2.ª Fase

7. Como a soma dos três primeiros elementos de uma linha do triângulo de Pascal é 61 426 e o terceiro elemento dessa linha é 61 075 e, como sabemos que o primeiro é 1, podemos calcular o segundo número (b):

$$61\,426 = 1 + b + 61\,075 \quad \Leftrightarrow \quad 61\,426 - 1 - 61\,075 = b \quad \Leftrightarrow \quad b = 350$$

E assim podemos calcular os primeiros números da linha seguinte:

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & & 350 & & 61\,075 & & \ldots \\ 1 & & 351 & & 61\,425 & & \ldots & \end{array}$$

Como a soma dos últimos três elementos de qualquer linha é igual à soma dos primeiros 3 elementos dessa linha, temos que a soma pretendida é:

$$61\,425 + 351 + 1 = 61\,777$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2011, Prova especial

8. Como o terceiro elemento de qualquer linha do triângulo de Pascal é da forma ${}^nC_2$, logo sabemos que ${}^nC_2 = 55$.

Resolvendo a equação $\dfrac{n!}{2!(n-2)!)} = 55$ ou concretizando diferentes valores de n, verificamos que ${}^{11}C_2 = 55$.

Assim, temos que $n = 11$, ou seja o segundo elemento da linha 11 é 55, e logo o penúltimo elemento dessa linha é 11.

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 19.01.2011

9. Somando quaisquer dois números, dos que estão reproduzidos no enunciado, o resultado é sempre um número diferente de 105.
Como os restantes números da mesma linha do triângulo de Pascal são todos maiores que 105, somando quaisquer dois deles, ou um deles com um dos elementos reproduzidos, o resultado será sempre superior a 105.
Assim, não existe qualquer par de elementos desta linha do triângulo de Pascal, cuja soma seja 105, ou seja, a probabilidade da soma de dois elementos desta linha do triângulo de Pascal ser igual a 105, é nula.

Resposta: **Opção D**

Exame – 2010, 2.ª Fase

10. Na linha do triângulo de Pascal em que o segundo elemento é 2009, existem 2010 elementos, todos da forma ${}^{2009}C_k$.

Como ${}^{2009}C_0 = {}^{2009}C_{2009}(= 1)$ e ${}^{2009}C_1 = {}^{2009}C_{2008}(= 2009)$ são os 4 únicos elementos da linha menores do que *um milhão*, porque ${}^{2009}C_2 = {}^{2009}C_{2007}(= 2\,017\,026)$ e todos os restantes são maiores, sabemos que existem $2010 - 4 = 2006$ elementos desta linha que são maiores do que *um milhão*.

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12.º ano – 04.12.2009

11. A linha do triângulo de Pascal que é constituída por todos os elementos da forma ${}^{14}C_p$ tem 15 elementos, dos quais, apenas 2 são iguais a 14 (${}^{14}C_1$ e ${}^{14}C_{13}$), pelo que a probabilidade de um número desta linha, escolhido ao acaso, ser o número 14 é $\frac{2}{15}$.

    Resposta: **Opção C**

Exame – 2009, 2.ª Fase

12. A linha do triângulo de Pascal que tem exatamente nove elementos, é composta pelos elementos da forma ${}^{8}C_k$, dos quais, apenas 2 são iguais a 8 (${}^{8}C_1$ e ${}^{8}C_7$).
    Como também existem dois elementos iguais a 1 (${}^{8}C_0$ e ${}^{8}C_8$), se selecionarmos um par de elementos desta linha constituído por um 1 e um 8, obtemos um produto igual a 8.
    Assim, existem $2\times 2 = 4$ pares cujo produto é 8, num conjunto de ${}^{9}C_2 = 36$ pares, pelo que a probabilidade de um par de números desta linha, escolhidos ao acaso ter um produto igual a 8 é: $\frac{4}{26} = \frac{1}{9}$

    Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 27.05.2009

13. Como a soma dos dois primeiros elementos de uma linha do triângulo de Pascal é 13, e o primeiro número é 1, sabemos que o segundo número é $13 - 1 = 12$. Logo os elementos desta linha são todos da forma ${}^{12}C_k$

    Como ${}^{12}C_0 = {}^{12}C_{12} = 1$; ${}^{12}C_1 = {}^{12}C_{11} = 12$ e ${}^{12}C_2 = {}^{12}C_{10} = 66$ são exatamente estes os 6 elementos desta linha que são menores do que 70, porque ${}^{12}C_3 = {}^{12}C_9 = 220$ e todos os restantes são maiores que 220.

    Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12.º ano – 10.12.2008

14. Como o 14º elemento de uma linha do triângulo de Pascal é igual ao 15º elemento dessa mesma linha, os 14 primeiros elementos são iguais (por ordem inversa) aos elementos do segundo grupo de 14 elementos, ou seja a linha tem 28 elementos.

    Resposta: **Opção C**

Exame – 2008, Ép. especial

15. A linha do triângulo de Pascal que tem 15 elementos é constituída por 15 números da forma ${}^{14}C_k$.
    Como ${}^{14}C_0 = {}^{14}C_{14} = 1$, ${}^{14}C_1 = {}^{14}C_{13} = 14$ e ${}^{14}C_2 = {}^{14}C_{12} = 91$ estes são os únicos 6 elementos da linha menores que 100, porque ${}^{14}C_3 = {}^{14}C_{11} = 364$ e todos os restantes são maiores que 364.

    Resposta: **Opção C**

Exame – 2008, 2.ª Fase

16. Como a soma dos dois últimos elementos de uma linha do triângulo de Pascal é 31 e o último número é 1, então o penúltimo número é 30; ou seja, a linha é constituída pelos elementos da forma ${}^{30}C_k$.
    Logo, os elementos da linha anterior são da forma ${}^{29}C_k$, e o quinto elemento dessa linha é ${}^{29}C_4 = 23\,751$

    Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 17.01.2008

17. No início da linha do triângulo de Pascal que contém os elementos da forma ${}^{2006}C_k$, existem 4 elementos menores que ${}^{2006}C_4$:
${}^{2006}C_0$, ${}^{2006}C_1$, ${}^{2006}C_2$ e ${}^{2006}C_3$, pelo que existem mais 4 no final da linha:
${}^{2006}C_{2003}$, ${}^{2006}C_{2004}$, ${}^{2006}C_{2005}$ e ${}^{2006}C_{2006}$
Desta forma, são 8 os elementos dessa linha que são menores que ${}^{2006}C_4$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 07.12.2006

18. Como a soma dos dois primeiros elementos de uma linha do triângulo de Pascal é 21, e o primeiro elemento é 1, o segundo elemento é $21 - 1 = 20$, e portanto a linha tem 21 elementos da forma ${}^{20}C_k$

Como a linha tem 21 elementos, os primeiros 10 elementos são iguais (por ordem inversa) aos últimos 10, e o maior é o 11º elemento, ou seja ${}^{20}C_{10} = 184\,756$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12.º ano – 07.12.2005

19. Como o segundo elemento da linha do triângulo de Pascal é 35, a linha tem 36 elementos. Logo os primeiros 18 elementos são iguais aos últimos 18 (pela ordem inversa).

Assim existem 18 pares de números desta linha que são iguais, num total de ${}^{36}C_2$ pares possíveis, pelo que a probabilidade de dois elementos desta linha, escolhidos ao acaso, serem iguais é $\dfrac{18}{{}^{36}C_2}$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2003, 2.ª Fase

20. Representado a linha do triângulo do Pascal cujo quarto elemento é 19 600, e os primeiros elementos da linha seguinte, temos:

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & & a & & b & & 19\,600 & \ldots \\ 1 & & c & & d & & \ldots & & \end{array}$$

Como a soma dos quatro primeiros elementos da linha representada em cima é 20 876, temos que

$$1 + a + b + 19\,600 = 20\,876 \Leftrightarrow a + b = 20\,876 - 19\,600 - 1 \Leftrightarrow a + b = 1\,275$$

Observando a representação das duas linhas podemos observar que o terceiro elemento da segunda linha é $d = a + b$, ou seja, é o número 1275

Resposta: **Opção A**

Exame – 2003, 1.ª Fase – 2.ª chamada

21. Representado a linha do triângulo do Pascal cuja soma dos três primeiros termos é 121, e os primeiros elementos da linha seguinte, temos:

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & & a & & b & & \ldots & \\ 1 & & c & & d & & \ldots & & \end{array}$$

Como a soma dos três primeiros elementos da linha representada em cima é 121, temos que

$$1 + a + b = 121 \quad \Leftrightarrow \quad a + b = 121 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad a + b = 120$$

Observando a representação das duas linhas podemos observar que o terceiro elemento da segunda linha é $d = a + b$, ou seja, é o número 120

Resposta: **Opção C**

Exame – 2001, Prova para militares

22. Como a soma dos dois últimos elementos de uma linha do triângulo de Pascal é 21, e o último número é 1, sabemos que o penúltimo (e também o segundo) é 20, ou seja, a linha é composta por 21 elementos da forma ${}^{21}C_k$.

Assim a soma dos três primeiros elementos dessa linha é:

$${}^{20}C_0 + {}^{20}C_1 + {}^{20}C_2 = 1 + 20 + 190 = 211$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2001, 1.ª Fase – 2.ª chamada (progr. antigo)

23. Na linha do triângulo de Pascal com onze elementos, os elementos são da forma ${}^{10}C_k$.
Assim, os primeiros cinco elementos são iguais (por ordem inversa) aos últimos cinco, e o sexto elemento é o maior, ou seja o elemento ${}^{10}C_5$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2000, Ép. especial (prog. antigo)

24. Como a linha completa do triângulo de Pascal tem 7 elementos, e os 7 elementos são da forma ${}^{6}C_k$.

Logo, $a = {}^{6}C_0$, $b = {}^{6}C_1$ e $c = {}^{6}C_2$

Resposta: **Opção B**

Exame – 1999, 1.ª Fase – 1.ª chamada (prog. antigo)

25. Da observação da reprodução parcial das duas linhas, podemos concluir que

$$36 + a = 120 \quad \Leftrightarrow \quad a = 120 - 36 \quad \Leftrightarrow \quad a = 84$$

Como $a + 126 = b$, substituindo o valor calculado para a, temos:

$$84 + 126 = b \quad \Leftrightarrow \quad 210 = b$$

Resposta: **Opção C**

Prova Modelo – 1999 (prog. antigo)

26. Como o penúltimo número de uma linha do triângulo de Pascal é 10, todos os elementos dessa linha são da forma ${}^{10}C_k$

    Assim, o primeiro elemento dessa linha é ${}^{10}C_0$, o segundo é ${}^{10}C_1$ e o terceiro é ${}^{10}C_2 = 45$

    Resposta: **Opção C**

Exame – 1998, 1.ª Fase – 1.ª chamada (progr. antigo)